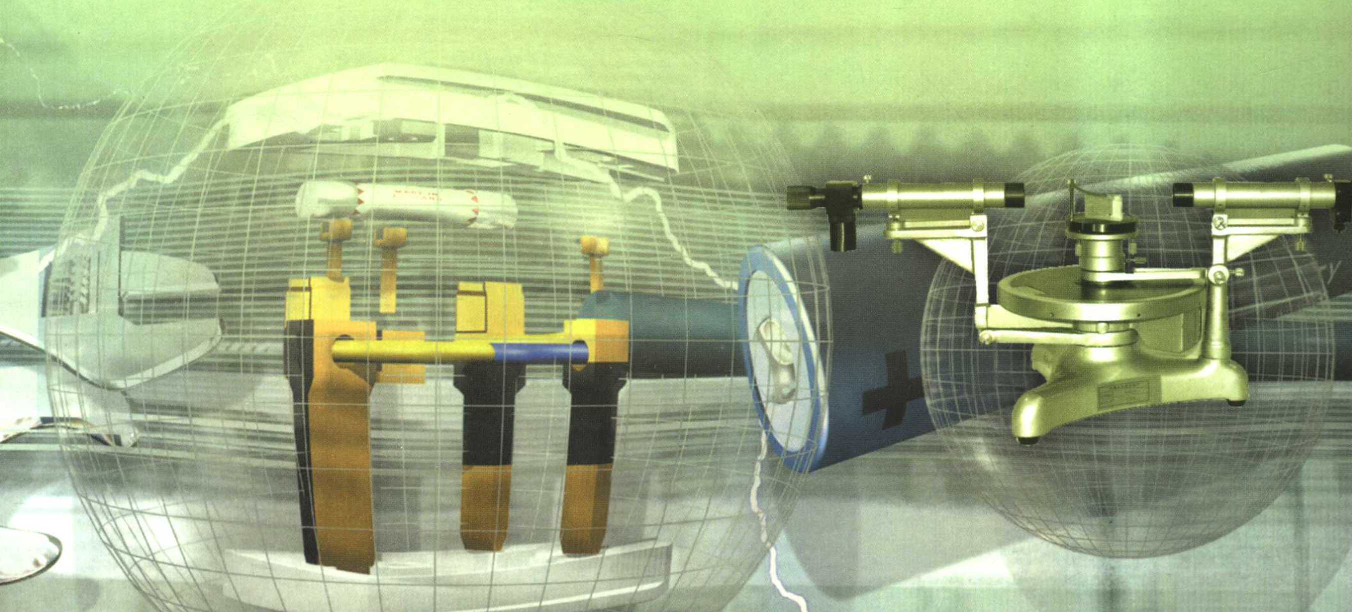
Daxuewuli SHIYAN

高等学校教材

大学物理实验

新疆大学物理科学与技术学院
基础物理教研室 编



新疆大学出版社

大学物理实验

新疆大学物理科学与技术学院
基础物理教研室 编

新 疆 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验. 新疆大学物理科学与技术学院基础物理教研室编. —乌鲁木齐:新疆大学出版社. 2007. 2

ISBN 978 - 7 - 5631 - 2090 - 1

Ⅰ. 大… Ⅱ. 新… Ⅲ. 物理学—高等学校—教材 Ⅳ. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 021555 号

大学物理实验

新疆大学物理科学与技术学院

基础物理教研室 编

新疆大学出版社出版发行

(乌鲁木齐市胜利路 14 号 邮编:830046)

新疆新华印刷厂印刷

787 × 1092 1/16 18 印张 400 千字

2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

印数:1—8000

ISBN 978 - 7 - 5631 - 2090 - 1 定价:22.00 元

前　言

本书是根据教育部高等学校非物理类专业物理基础课程教学指导分委员会2004年12月制定的《非物理类理工学科大学物理实验课程教学基本要求》(正式报告稿),结合新疆物理实验课的教学实际,由新疆大学物理科学与技术学院基础物理教研室对姬秉正为主编、张冀生等为副主编的《大学物理实验》(修订版,新疆科技卫生出版社,1998.12~2001.7)进行增删、修订,重新编写而成。可作为理工类本科各专业的教材或教学参考书,专科理工类各专业也可选用。

本书以物理实验中的基本实验方法、测量方法和操作技术为主线编写,主要内容分四章:第一章为测量误差、数据处理和不确定度的评定;第二章是以"填平补齐"中学物理实验为主要目的,在实验方法和不确定度的评定方面有所提高的预备性实验;第三章为基础性和综合性实验,是本课程的核心内容;第四章为设计性实验。本书的一些实验可用不同的仪器或方法完成,因而同一个实验分成了不同的项目(如实验21分为21-1和21-2等);在同一个实验中,实验内容的安排也注意由易到难(如实验1、7等),不同类型的班级可选作不同的内容。书中按国家计量技术规范,对真值、系统误差、随机误差给予新的定义,还编入了间接测量量的合成标准不确定度计算公式,用Origin软件处理实验数据的方法等内容。

参加本书编写工作的有:黄龙(新写实验24,改写实验2),王青(新写实验3-2、3-3、8),张冀生(新写实验4、10、18、23,改写实验22),凌海秋(新写实验5、13、21-1),穆保霞(新写实验12、20-2-2,改写实验11),姜轶(新写实验16),许瑾(新写实验31、32-2、33),戴康(改写实验28),杨祖慎(新写第四章),崔秀花(新写第一章§7),李琳(新写附录6),姬秉正(新写第一章§1~§6、实验16.2,改写全书其他内容)。机械学院CAD中心的闻霞、黄艳绘制了部分插图。全书由姬秉正教授负责并统稿,张军教授主审。

物理实验教学是一项集体事业,本书的编写,包含了多年来新疆大学物理科学与技术学院实验室工作人员和实验课教师在实验室建设和实验课教学方面辛勤劳动的集体成果,谨向他们和在本书编写过程中提出过宝贵意见的同志,一并致以衷心感谢!

一本好实验教材的编写,有赖于不断地实践和长期的研究探索,才能日臻完善。对本书的错谬及不足之处,恳请使用和阅读本书的教师、同学、读者不吝指正。

新疆大学物理科学与技术学院

基础物理教研室

2006年11月

目　　录

绪 论

§1 大学物理实验课的地位、作用和任务

大学物理实验课是高等理工科院校对学生进行科学实验基本训练的必修基础课程，是本科生接受系统实验方法和实验技能训练的开端.

物理实验课覆盖面广，具有丰富的实验思想、方法、手段，同时能提供综合性很强的基本实验技能训练，是培养学生科学实验能力、提高科学素质的重要基础. 它在培养学生严谨的治学态度、活跃的创新意识、理论联系实际和适应科技发展的综合应用能力等方面具有其他实践类课程不可替代的作用.

本课程的具体任务是:

1. 培养与提高学生科学实验基本素质，确立正确的科学思想和科学方法. 即通过物理实验课的教学，使学生掌握误差、数据处理、不确定度的评定的基本理论和方法，学会常用仪器的调整和使用、掌握常用的物理实验方法和常用的实验操作技术、能够对常用物理量进行一般测量、具有初步的实验设计能力.

2. 培养学生的基本科学实验技能，提高学生的科学实验基本素质，使学生初步掌握实验科学的思想和方法. 培养学生的科学思维和创新意识，使学生掌握实验研究的基本方法，提高学生的分析能力和创新能力.

3. 提高学生的科学素养，培养学生理论联系实际和实事求是的科学作风，认真严谨的科学态度，积极主动的探索精神，遵守纪律，团结协作，爱护公共财产的优良品德.

§2 大学物理实验课的基本程序

1. 课前预习

由于实验课时间有限，熟悉仪器和测量任务重，因此必须根据所排的实验进行课前预习. 预习是完成实验的基础. 预习时应认真阅读教材，着重明确实验目的，理解实验原理、装置和实验大体步骤. 实验前要写好实验报告的实验名称、实验目的及要求、原理或装置简述(如实验所依据的主要公式，电学实验的线路图或光学实验的光路图等)，画好记录数据的表格.

上课时，教师应首先检查学生的预习情况，把预习情况作为评定实验成绩的一项内容. 对

于没有预习的学生，教师有权取消其本次实验.

2. 课内操作

操作是实验的中心环节. 进入实验室必须遵守实验室规则. 在教师指导下，了解实验仪器的量程、功能、操作方法和注意事项. 电学实验中，线路接好经教师检查后，才能接通电源. 光学实验中，严禁用手接触光学元件的光学表面.

记录数据不要用铅笔. 对“错误”的数据也要保留，因为有些“错误”的数据经过比较会发现是正确的、甚至发现新的科学规律. 若确认记录的数据有错误，可在错误的数据下画一整齐的线段，不要涂改数据. 要如实记录数据、实验现象及有关的环境条件，同时还应记录主要仪器的名称、型号、量限和准确度等级指数.

操作完成后，请教师审阅数据，待教师签字后，再把仪器复原、整理好.

3. 课后完成实验报告的后半部分

根据经教师签字的原始数据，按要求对数据进行处理、不确定度的评定、误差分析，正确表示出实验结果. 若用作图法处理数据，应严格按作图法要求画出图线. 按时将包含原始数据的实验报告交给教师.

实验报告是实验的小结，最后可写出自己的体会和收获，讨论实验中遇到的问题，提出对实验的改进意见并回答思考题.

§3 物理实验守则

1. 学生在规定的时间内进行实验，不得无故旷课和迟到. 无故迟到超过 20 分钟，取消这次实验.

2. 对排定的实验要预习并写出预习报告，对于没有预习的学生，教师有权停止这次实验.

3. 实验时要严肃认真，爱护仪器，遵守仪器的操作规则. 未经教师许可不能调换本组仪器，也不能动用与本次实验无关的仪器，以防止发生人身事故或使国家财产受到损失. 如有仪器缺损，应及时报告教师，根据情节按规定进行赔偿.

4. 电学实验的电路接好并经教师检查后，才能接通电源，以免发生意外. 光学实验严禁用手触摸光学元件的光学表面. 实验完毕，将数据和仪器经教师检查，教师在实验原始记录上签字后，才能结束实验. 不经教师签字而离开实验室，发生仪器缺损，由该组同学负责赔偿.

5. 实验完毕，应先断电源，将仪器整理好，搞好卫生，关好自来水龙头和门窗后才能离开实验室.

第一章　测量误差　数据处理　不确定度的评定

§1　测量误差　测量不确定度

本节的计量术语及定义,都根据国家计量技术规范《JJF1001—1998　通用计量术语及定义》和《JJF1059—1999 测量不确定度评定与表示》,分别简称为 JJF1001 和 JJF1059.

(一)测量误差的基本知识

测量是指以确定被测对象量值为目的的全部操作．按照测量值获得方法的不同,测量分为直接测量和间接测量两种．

直接从仪器或量具上得出待测量的量值,称为**直接测量**．例如,用米尺测物体的长度,用量筒测量液体体积,用天平测物体的质量等都是直接测量,相应的被测物理量称为**直接测量量**．

如果待测量的量值是由若干个直接测量量通过函数运算而得到,则称为**间接测量**,相应的被测物理量称为**间接测量量**．例如,通过直接测量铜圆柱体的质量 m、直径 d 和高度 h,再根据公式 $\rho=\dfrac{4m}{\pi d^2 h}$ 计算出铜 $\bar{y}$ 的密度,这就是间接测量,ρ 为间接测量量．

1．真值　约定真值　测量误差

JJF1001 中定义:**与给定的特定量的定义一致的值为[量的]**[①]**真值**(true value[of a quantity])．同时注明了 3 点:

(1)量的真值只有通过完善的测量才有可能获得．

(2)真值按其本性是不确定的．

(3)与给定的特定量的定义一致的值不一定只有一个．

因为量的真值只有通过完善的测量才有可能获得,但实际测量是不完善的,因此实际测量就不能获得真值,即从测量的角度讲,真值不可能确切获知．真值按其本性是不确定的论点,符合当今人们对微观物质世界的认识和量子力学的原理(如海森伯的不确定关系、玻恩对波函数的统计解释等)．虽然通过测量不能获得真值,但是,通过定义使量值符合定义则是可能的．例如:在国际单位制中,定义保存在巴黎国际计量局的铂－铱合金的国际千克原器的质量为 1 千克、定义光在真空中(1/299 792 458)s 时间间隔内所经路径的长度为 1 米、水的三相点

① 方括号内的字[量的]可省略,下同．

的热力学温度为273.16K，这些与定义一致的值就是真值．还有一种真值是理论真值，如平面三角形三内角之和恒为180°，此值也可表述为π(rad)．

测量结果减去被测量的真值，称为**[测量]误差**(error[of measurement])．如用x表示测量结果，a表示真值，测量误差

$$\Delta x = x - a \tag{0-1-1}$$

测量误差可为正值，也可为负值．当测量结果大于真值时为正，否则为负．测量误差也可以用相对误差表示，**相对误差**(relative error)定义为

$$E_r = \Delta x / a \tag{0-1-2}$$

为了将以上两式相区别，相对于称(0-1-2)式为相对误差而言，(0-1-1)式定义的误差称为测量的**绝对误差**．注意，绝对误差可正可负，不是误差的绝对值，误差的绝对值称为误差的模．

随着科学技术的进步，测量误差可以被控制得越来越小．但实践证明，任何测量的误差都不可能降为零，这个结论被称为**误差公理**．也就是说，除了与特定量的定义一致的值为真值外，**通过测量不可能获得真值**．为了计算测量误差，该规范还定义，**对于给定的目的具有适当不确定度的、赋予特定量的值，有时是约定采用的值为约定真值**(conventional true value[of a quantity])．因此，被认为充分接近真值、可以替代真值的量值：推荐值(如1986年国际常数委员会推荐的阿伏加德罗常量值6.022 136 7×10^{23} mol^{-1})、最佳估计值、已修正过的算术平均值、计量标准器所复现的值等，都可作为约定真值．约定真值有时称为**指定值、最佳估计值、约定值、参考值**．这样一来，测量误差往往是测量结果与约定真值之差．

2. 误差的分类

根据误差出现的不同特点，误差可分为随机误差和系统误差．

(1)随机误差

JJF1001中定义：**测量结果与在重复性条件下、对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值之差为随机误差**(random error)．以ε_i表示每次测量结果的随机误差，即

$$\varepsilon_i = x_i - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{0-1-3}$$

对此定义可这样理解：在相同测量条件下(在短时间内测量的程序、观测者、仪器、地点都相同，这些条件称为**重复性条件**)多次测量同一量时，每次测得值为$x_i(i=1、2、3、\cdots n)$，每次测量的随机误差$\varepsilon_i = x_i - a$的大小和正负以不可预知的方式变化，是随机的．随机误差产生的基本原因，是还没有被人们所认识和无法控制的运动中的物质世界对测量的影响，如温度的不均匀、微小的振动、电磁场、各种射线等环境因素对测量的既不能消除又无法估量的影响，这种影响称为随机效应，它们导致重复观测中的分散性．当测量次数n足够多时，ε_i就显示出统计规律．随机误差的最本质的统计规律是其算术平均值随着测量次数的增加而趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 0 \tag{0-1-4}$$

这个特性称为抵偿性．将(0－1－1)式代入上式，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-a=0$$

∴
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=a \tag{0-1-5}$$

即仅存随机误差的情形下，测量次数无限多时的算术平均值就是真值．因此，随机误差就定义为测量结果与测量次数无限多时的算术平均值之差．

本课程在计算随机误差时，重复测量次数应取6至10次，由于重复测量次数不是无限多，故只可能确定随机误差的估计值．并在随机误差起主导作用的测量中，以算术平均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{0-1-6}$$

为约定真值．

(2)系统误差

JJF1001中定义：**在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值与被测量的真值之差为系统误差**(systematic error)．这个定义应这样理解：不存在系统误差时，由(0－1－5)式定义的测量次数无限多时的算术平均值就是真值；存在系统误差时，(0－1－5)式定义的值就不是真值，它与真值之差为系统误差，以β表示系统误差，即

$$\beta=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-a \tag{0-1-7}$$

系统误差产生的基本原因，有仪器因素(如零点没校准、仪器没放水平、砝码不准等)、理论因素(如用落体法测重力加速度时，忽略空气阻力等)、环境因素(如量热器系统的温度高于环境温度时，系统散热等)及人员因素(如记录某一信号时，总是习惯滞后或超前等)．来源于影响量的已识别的效应称为系统效应．由于通过测量不可能获得真值，故系统效应的获知也是有限的，只可能根据有限次数的测量平均值与约定真值之差来确定系统误差β的估计值．由(0－1－7)式的定义可知，β不仅属于某个测量结果，而是属于在重复性条件下的各个测量结果，即每次重复测量结果的β是恒定的，当然，在另一种重复性条件下测量的β的大小和正负是另一个恒定值．

根据有限次数的测量结果确定了β的估计值后，取$-\beta$为**修正值**(correction)，修正值与测量结果以代数和相加，系统误差的模会比修正前的要小，但不可能为零．也就是说，由于系统误差及其原因不能完全获知，因此通过修正值对系统误差的补偿也是有限的．

将(0－1－3)式与(0－1－7)式相加，得任一次测量的误差

$$\Delta x=\varepsilon_i+\beta=x_i-a \tag{0-1-8}$$

由(0－1－7)式的定义可进一步说明，存在系统误差时，(0－1－3)式仍然是正确的：因为此时$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$不等于真值，它与真值之差为系统误差，同时每次测量结果x_i中也包含重复测量中恒定的系统误差，于是$x_i-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$仍为每次测量的随机误差．

JJF1001 中定义:“**测量结果与被测量的真值之间的一致程度为测量准确度**(accuracy of measurement). 注:1. 不要用术语精密度代替准确度 . 2. 准确度是一个定性概念”. 准确度反映了随机误差与系统误差的合成误差的大小,合成误差越小,准确度越高 .

除系统误差与随机误差外,测量时由于粗心大意、操作错误、仪器有缺陷或环境干扰等因素,造成的误差为**过失误差(或粗大误差)**,过失误差是完全可以避免的 . 含有过失误差的测量值称为坏值 . 测量结果中不能包含过失误差,即所有的坏值都应剔除 .

系统误差与随机误差在一定条件下是可以互相转化的,例如,钢卷尺上的某一分度线具有恒定的系统误差,但整个钢卷尺上的所有分度线的误差却有大有小,有正有负,以不可预知的方式变化,就是随机误差 . 随着人们对客观世界认识水平的不断提高,可以把过去列入随机误差的分量确定为系统误差并将其修正,这样测量的准确度随着科学技术的进步也在不断地提高 .

(二)测量不确定度

既然测量结果与被测量真值之差定义为测量误差,那么根据(0-1-1)式和(0-1-2)式的定义计算误差时,就需要知道真值 . 而真值却不能通过次数有限、存在误差的实际测量获得 . 因此,误差的定义(0-1-1)式和(0-1-2)式只有理论上的价值 . 为了解决这个困难,在传统误差理论中引入了约定真值,测量的目的是为了刻意追求不可得到的真值,这是传统误差理论基本定义的缺陷 .

如果换个思路,使测量的目的为合理地评估出真值以多大的概率存在于某个量值区间,这个区间反映了测量结果的不确定性,只要这个区间符合测量要求就行,而不必刻意追求真值的具体量值 . 这是现实的,也是在实际测量中完全可以实现的 . 例如,某人在市场买了一包塑料袋包装的食盐,标称净质量为 1000g ±5g、包装袋质量为 10g. 此人在市场监督的电子秤上称得此包食盐总质量为 1008g,包装袋质量充其量为 10g,虽然此包食盐净质量约为 998g,但仍符合标称值,他认为质量合格,而没有必要再去追求此包食盐净质量的真值到底是多少,也是这个道理 .

1980 年,国际计量局提出了实验不确定度建议书,建议用不确定度来评定测量结果 . 1993 年,国际标准化组织、国际计量委员会、国际电工委员会、国际法制计量组织、国际纯物理及应用物理联合会等 7 个国际权威组织发布实施《测量不确定度表示指南(1993)》以来,用不确定度来评价测量结果在我国国民经济和科学的各领域都得到全面推广和应用 . 1999 年,我国还颁布并实施了技术规范《JJF 1059—1999 测量不确定度评定与表示》,以便规范不确定度评定与表示中的具体问题 . 因此,对传统误差理论进行变革,用不确定度评定与表示物理实验结果也就成为必然 .

JJF1059 中定义:**表征合理地赋予被测量之值的分散性,与测量结果相联系的参数为[测量]不确定度**(uncertainty[of measurement]). 不确定度恒取正值 . 不确定度一词指可疑程度,广义而言,测量不确定度意为对测量结果正确性的可疑程度,也就是说要对被测量的真值所处范围作出评定 . 测量不确定度可以包括许多分量,这些分量按其数值的评定方法可归并为两

类：

不确定度的 A **类评定**(type A evaluation of uncertainty)——**在重复性条件下，对同一被测量进行多次测量的结果，用统计分析的方法来评定的不确定度**．用统计分析的方法计算出的那些分量，称为不确定度的 A **类分量**；

不确定度的 B **类评定**(type B evaluation of uncertainty)——**用不同于统计分析的方法，来评定的不确定度**．所计算出的那些分量，称为不确定度的 B **类分量**．

这两类分量只是在评定时所采用的方法不同，其本质是完全相同的．不确定度的初步估算和表示，在 §3 中叙述．

§2　有效数字及其运算

(一)有效数字的概念

如图 0-2-1 所示，用米尺测量钢棒 *A* 的长度．*A* 棒长在 3.2～3.3cm 之间．究竟多长呢？我们可估读为 3.26cm，也可估读为 3.27cm 或 3.28cm．这百分位上的 6、7、8 是估计出来的，而且每人估计出的值也可能不同，所以我们把这些估计出来的数叫**存疑数字(欠准数字)**．在本节中为了表示清楚，在存疑数字下面划一横线．存疑数字前的 3.2cm 是仪器测出的确切数字，称为**可靠数字**．测量中所能得到的若干位可靠数字与最后一位存疑数字构成了**有效数字**．测量结果中有几位有效数字，就称为是几位有效数字．上面所说的 *A* 棒长度的测量结果 3.26cm、3.27cm、3.28cm 都是三位有效数字．

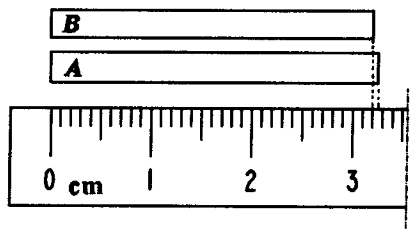


图 0-2-1　长度的测量

(二)使用有效数字的注意点

1. 有效数字前面的 0 不是有效数字

例如：3.24cm = 0.032 4m = 0.000 032 4km

这三个数都是三位有效数字，3 前面的 0 都不是有效数字，而是由于单位换算所引起．因此，有效数字的位数不等于小数点后保留几位．为了正确、方便地表达出有效数字，我们用科学标记法：即小数点前一律取一位有效数字，数值上的不同可用乘以 10 的不同次幂表示：

$$3.24\text{cm} = 3.24\times10^{-2}\text{m} = 3.24\times10^{-5}\text{km} = 3.24\times10^{4}\mu\text{m}$$

2. 有效数字中间和后面的 0 也是有效数字

例如：8.020g 是四位有效数字，3.20cm 是三位有效数字．要注意

$$3.2\underline{0}\text{cm}\neq3.\underline{2}\text{cm}$$

这是因为 3.$\underline{2}$cm 是两位有效数字，$\underline{2}$ 是存疑数字．而 3.2$\underline{0}$cm 的存疑位是$\underline{0}$，如图 0-2-1 中对钢棒 *B* 的测量．如果图 0-2-1 中的米尺没有毫米刻线，*A*、*B* 两棒的长度都可测为

3. $\underline{2}$cm. 因此有效数字位数越多，测量越准确．有效数字是测量结果的客观反映，它的位数多少不能随意增减．

3. 电子秒表、电阻箱、便携式惠斯登电桥等仪器无法进行估读．这些仪器在测得值的最后一位就存在着仪器误差，就是存疑数字，而不必再估读．

4. 参与运算的常数如 1/2、π、$\sqrt{2}$等，由于它们不是测得量，其有效数字的位数是无限的，可根据需要来选取．

（三）有效数字的运算法则

1. 加减结果的存疑位以参与运算的各个量中存疑位最大的为准，可称为“尾数对齐”．

说明：

$$\begin{array}{r} 32.\underline{1} \\ +\ \ 3.22\underline{6} \\ \hline 35.\underline{3}\,\underline{2}\,\underline{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20.6\underline{5} \\ -\ \ 3.91\underline{4} \\ \hline 16.7\underline{3}\,\underline{6} \end{array}$$

在相加运算中，结果的“$\underline{3}$”已为存疑数字，因此“2 $\underline{6}$”两位数便无存在意义，其结果为 35. $\underline{3}$，有效数字为三位，存疑位在十分位上，与参与运算两个数中存疑位大的 32. $\underline{1}$ 相同．同理，相减的结果 16. 7 $\underline{4}$ 为四位有效数字，存疑位“$\underline{4}$”与参与运算的存疑位大的数 20. 6 $\underline{5}$ 相同．这里由于差的千分位是“6”，按大于 5 则入的原则，我们已进了一位．这个方法可推广到多个量的加减运算中去．

2. 乘除时结果有效数字位数与参与运算的各个因子中有效数字位数最少的相同，可称为“位数对齐”．

说明：

$$\begin{array}{r} 2.67\underline{3} \\ \times\qquad 2\underline{1} \\ \hline \underline{2}\,\underline{6}\,\underline{7}\,\underline{3} \\ 5346 \\ \hline 5\underline{6}.\underline{1}\,\underline{3}\,\underline{3} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 1\underline{8}\,\underline{4} \\ 2\underline{1} & \overline{)\,386\underline{4}} \\ & \underline{2\underline{1}} \\ & 1\underline{7}\,\underline{6} \\ & \underline{16\underline{8}} \\ & \underline{8}\,\underline{4} \\ & \underline{\underline{8}\,\underline{4}} \\ & 0 \end{array}$$

在相乘的结果中，由于“$\underline{6}$”已为存疑数字，其后的$\underline{1}\,\underline{3}\,\underline{3}$ 就没有必要保留，因此积为 5 $\underline{6}$. 这是两位有效数字，与参与运算的有效数字位数少的“2 $\underline{1}$”相同．在相除的结果中，“$\underline{8}$”为存疑数字，这是因为用“2 $\underline{1}$”去除余数“1 $\underline{7}\,\underline{6}$”时商取“$\underline{8}$”是不可靠的，因此相除的结果为 $1.\underline{8}\times10^2$，与参与运算的有效数字位数少的除数都为两位有效数字．

3. 乘方、开方的有效数字位数与底相同，这是乘除法的特例．如：

$$1\underline{1}^2 = 1\underline{1}\times1\underline{1} = 1\underline{2}\,\underline{1} \approx 1.\underline{2}\times10^2$$

$$\sqrt{8.\underline{6}} \approx 2.\underline{9}\,\underline{3} \approx 2.\underline{9}$$

应当指出，以上规则仅仅是一种处理有效数字的简略方法，严格来讲，有效数字的位数应由不确定度来决定，对此将在下节讨论．

(四)数的修约规则

根据国家标准《GB3101—93 有关量、单位和符号的一般原则》的《附录 B 数的修约规则》规定,数的修约可应用通常的"四舍五入"方法,但最好应用"选取偶数倍为修约数"的方法,即以保留数字的最后一位(称为末位)为单位. 它后面的数大于 0.5 时,末位进 1;小于 0.5 时,末位不变;恰为 0.5 时,末位为奇数时进 1,末位为偶数时不变,其目的是使末尾后的数为 0.5 时,舍与入的概率均等. 例如:将下列数据保留四位有效数字时,则

$3.141\,59 \approx 3.142$

$4.210\,50 \approx 4.210$(末位即千分位的 0 是偶数,不变)

$6.743\,5 \approx 6.744$(末位的 3 是奇数,进 1)

$5.918\,501 \approx 5.919$($\because 0.000\,501 > 0.000\,5$)

$2.387\,499 \approx 2.387$($\because 0.000\,499 < 0.000\,5$)

【例题 0-2-1】用有效数字运算法则计算下列各式,并将结果用科学标记法表示:

(1)$19.03 - 1.26 - 0.2 \approx 17.6 = 1.76 \times 10^1$

(2)$100.74 + 28.2 + 1.3 \approx 130.2 = 1.302 \times 10^2$

(3)$232.1 \times 11 \approx 2.6 \times 10^3$(不能得 2 553.1)

(4)$0.038\,70 \div 1.20 \approx 3.22 \times 10^{-2}$(不能得 0.032 25)

(5)$\sqrt{14\,400.0} = 1.200\,00 \times 10^2$

(6)$\dfrac{200.0 \times (6.6 + 3.412)}{(88.00 - 87.0) \times 10.000} + 210.0$

$\approx \dfrac{200.0 \times 10.0}{1.0 \times 10.000} + 210.0$

$= 2.0 \times 10^2 + 2.100 \times 10^2 = 4.1 \times 10^2$

需要说明的是,以上的运算是仅根据有效数字运算规则进行,实际处理数据时,为了防止多次去舍而造成的累积效应,运算的中间过程可多取几位有效数字,这是合理的. 最后表达结果时,最佳测得值的有效数字位数由不确定度所在位决定,参见下节.

§3 测量误差 不确定度的初步估算

(一)随机误差的估算

1. 随机误差的统计规律

为了简化,在下面讨论随机误差的问题时,假定系统误差是可以忽略的. 个体的(每一次测量的)随机误差是不确定的,因此不可能修正,但其总体(大量个体的总和)服从一定的统计规律. 在这些统计规律中,随机误差的正态分布(又称高斯分布)是其中一种极其重要的分布规律. 设在相同条件下对物理量 X 进行了无限多次测量,测得值为 x_1、x_2、x_3、$\cdots x_i$、$\cdots x_n$,(即测

量次数 $n\to\infty$），以每一次的测得值与真值 a 的差 $\varepsilon_i = x_i - a$（随机误差）为横坐标，以随机误差 ε_i 出现的概率密度 $f(\varepsilon_i)$ 为纵坐标（**概率密度**定义为在横坐标的单位区间内 ε_i 出现的可能性），正态分布的 $f(\varepsilon_i)$—ε_i 关系曲线如图 0－3－1 所示．由数理统计理论，正态分布的概率密度

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}}$$

式中

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}$$

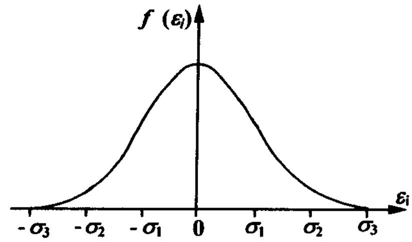


图 0－3－1　正态分布曲线

是测量次数 $n\to\infty$ 时，误差平方的平均值（称为方差，即 σ^2）求出后再开方．由数理统计理论可证明，测得值 x_i 处在 $[a-\sigma, a+\sigma]$ 区间内的可能性（即概率）为 68.27%，处在 $[a-2\sigma, a+2\sigma]$ 区间内的概率为 95.45%，处在 $[a-3\sigma, a+3\sigma]$ 区间内的概率为 99.73%．上述 3 个区间称为**置信区间**（confidence interval），置信区间宽度的一半，称为置信区间的半宽．与上述 3 个区间对应的概率定义为**置信概率**（confidence level），表示与置信区间有关的概率值，用符号 p 表示，置信概率又称**置信水平**、**置信系数**、**置信水准**．

2. 实验标准[偏]差

既然通过测量不可能获得真值，而且相同条件下的测量也不可能进行无限多次，因此方差 σ^2 也只有理论上的意义．在实际实验中，通常是在相同条件下对物理量 X 进行了有限的 n 次测量，测得值为 x_1、x_2、x_3、$\cdots x_n$，估算实验随机误差的重要方法是：先按（0－1－6）式计算出算术平均值 $\bar{x}$，再算出第 i 次测量值 x_i 与算术平均值 $\bar{x}$ 的差

$$v_i = x_i - \bar{x} \tag{0-3-1}$$

v_i 称为**残余误差**（简称**残差**），方差的估计值、即表征测量结果分散性的**实验标准[偏]差**（experimental standard deviation）可按下式算出

$$s(x) = \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}v_i^2\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{0-3-2}$$

这就是误差理论中可证明的**贝塞尔公式**（Bessel formula）．实验标准偏差 $s(x)$ 表征了任何一次测量结果的分散性，故又称为**单次测量的标准偏差**．其含义是，如果随机误差按正态分布，任何一次测得值 x_i 与平均值的残差 v_i 处在 $[-s(x), s(x)]$ 区间内的置信概率 $p\approx 68.3\%$，处在 $[-2s(x), 2s(x)]$ 区间内的置信概率 $p\approx 95.4\%$，处在 $[-3s(x), 3s(x)]$ 区间内的置信概率 $p\approx 99.7\%$．

3. 平均值的实验标准差

在相同条件下，多次进行重复测量，每次得到的算术平均值也不尽相同，因此，算术平均值