福建名校系列

高中新教材同步导学丛书

共享名校资源
齐奏高考凯歌

把名校搬回家
把名师请进家

名校学案

读“名校学案”
上北大、清华

缔造高考传奇
奔向美好前程

主　　编：任　勇
执行主编：陈建国

数学

高中三年级（选修Ⅱ）（全一册）

福建教育出版社

《名校学案》编委会

高中新教材同步导学丛书

福建名校系列

名校学案

高中三年级（选修Ⅱ）(全一册)

数学

主　编：任　勇

执行主编：陈建国

《名校学案》编委会编

福建教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

名校学案.数学.高中三年级(选修Ⅱ)(全一册)/《名校学案》编委会编.—福州:福建教育出版社,2005.4(2006.8重印)
(高中新教材同步导学丛书)
ISBN 7-5334-4131-1

Ⅰ.名… Ⅱ.名… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第035075号

责任编辑:黄旭凌
封面设计:谢从荣 季凯闻

福建名校系列
高中新教材同步导学丛书
名校学案·数学
高中三年级(选修Ⅱ)(全一册)
《名校学案》编委会
主 编:任 勇

出 版	福建教育出版社 (福州梦山路27号 邮编:350001 电话:0591-83726971 83725592 传真:83726980 网址:www.fep.com.cn)
经 销	福建闽教图书有限公司
印 刷	福建省金盾彩色印刷有限公司 (福州鼓楼区湖前江厝路5号 邮编:350013)
开 本	889毫米×1194毫米 1/16
印 张	6.75
字 数	254千
版 次	2005年6月第1版 2006年8月第2次印刷
书 号	ISBN 7-5334-4131-1/G·3301
定 价	8.50元

如发现本书印装质量问题,影响阅读,
请向本社出版科(电话:0591-83726019)调换。

本册执行主编简介

郭圣光： 福建师大附中高级教师。1989年经省教委考核选派赴澳大利亚参加AFS项目交流。先后担任过九届高三毕业班英语备课组组长，高考成绩显著。曾参加省普教室组织的各类教辅书以及人教社出版的新教材《教师教学用书》的编写工作。1998年论文代表作《素质教育与高中英语课文教学》获福建省第六届教育教学科学研究优秀论文评选二等奖。

黄灯添： 厦门双十中学高级教师，曾长期担任英语教研组长。在高中从教25年，担任备课组组长20多年，带过十届高三毕业班，高考成绩突出。指导多名学生在全国、省、市竞赛中获奖。多次参加省、市教辅及模拟试题的编写。

泉州第一中学

敦 品 力 学

校长：杨东升

泉州第五中学

严谨　勤奋　求实　进取

校长：洪文强

龙岩第一中学

弘毅守志，任重道远

校长：林原

南平第一中学

诚　毅　勤　实

校长：吴永源

三明第二中学

团结　严谨　求实　创新

校长：邓伟

出版说明

名校就是品牌，名校就是旗帜，名校代表了某种方向。名校的精髓是名师。为此，福建教育出版社组织了一批名校的名师合力编写了《名校学案——高中新教材同步导学》丛书。丛书以培养能力为导向，以新课改理念为指针，以高考获胜为目标，以期让优秀学生潜能得到最大限度发挥，让比较好的学生更上一个台阶，让一般学生进入良好的行列。

饱孕新一代教改理念的新教材将逐步进入校园。在这场“课程改革”中，考试内容和模式也将逐渐变化，新的学习策略正在生成。新陈代谢之际，各大名校的教学优势、学习策略将成为“杀手锏”。编写这套教辅读物，就是为了使这种学习策略能够成为众多学生容易共享的资源。同时，精心打造一套优质的高中同步导学的教辅品牌也是我们多年的夙愿。

市场上教辅读物林立。而在我省高考实行自主命题形势下，由省内各学科名师主理的直接备战高考的辅导用书却是凤毛麟角。众所周知，省内一线名师是我省高考自主命题人才库的重要组成部分，因此，我们这套丛书具有不言而喻的实战性和权威性。

本丛书与教材同步配套，从高一到高三全程贯通，涵盖各科，丛书结合随堂教学并注重导学，着力于基础知识基本能力的全面掌握，并结合渗透学生分析问题和解决问题能力的培养，主要面向一、二级达标校的学生。同时以点带面，全面提升其他各级中学教学水平和学业成绩，力求为提高我省高中教学质量和高考成绩作出贡献。

丛书力求体现教改新理念，又避免花哨，从栏目设置到内容编写，做到简明实用，返璞归真，从而真正体现了学生的主体地位。

丛书以章或单元、节或课为单位编写；结构上分为“学法导航”（含重点难点提示和典型例题剖析），“同步训练”（分为A、B类，A类题是巩固基础，适当提高；B类题是能力题或综合性题；注★号题供学有余力的学生练习），“单元小结”，“单元检测”，“综合测试”，以及“参考答案”。在行文上，使用学生乐于接受的平易晓畅的语言。选题上体现时代感，突出人文性。

本书由陈建国执笔编写。

我们将密切跟踪教改动态，了解高考新情况，对丛书加以修改完善，同时欢迎读者及时指出书中的疏误，便于我们改正，为广大师生提供更优质的服务。

福建教育出版社

2005年4月

《福建名校系列》丛书编委名单

主　　任：李　迅、陈江汉

执行主任：黄　旭

编　　委：(以姓氏笔画为序)

任　勇（厦门第一中学　校长）
李　迅（福州第一中学　校长）
吴永源（南平第一中学　校长）
邱　伟（三明第二中学　校长）
陈江汉（厦门双十中学　校长）
林　群（龙岩第一中学　校长）
郑　勇（福州第三中学　校长）
洪立强（泉州第五中学　校长）
翁乾明（福建师大附中　校长）
黄　旭（福建教育出版社　副社长、副总编辑）
赖东升（泉州第一中学　校长）

学习笔记

第一章 概率与统计

一 随机变量

1.1 离散型随机变量的分布列

第一课时 离散型随机变量

学法导航

重点难点提示

1. 随机试验必须满足的条件：

(1)试验可以在相同的情形下重复进行；

(2)试验的所有可能的结果是明确可知的，并且不止一个；

(3)每次试验总是恰好出现这些结果中的一个，但在一次试验之前，却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.

2. 随机变量：每一个随机试验的结果都可用对应的一个实数来表示，这个实数就是随机变量. 如果随机变量的所有可能值，可以按一定的次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量.

3. 离散型随机变量的分布列：

设离散型随机变量 ξ 可能取的值有 $x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$ ξ 取每一个值 $x_i(i=1,2,\cdots)$ 的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$ 则下表

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

称为随机变量 ξ 的概率分布，简称 ξ 的分布列.

离散型随机变量的分布列具有性质：

(1) $p_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots$

(2) $p_1+p_2+\cdots=1$.

4. 离散型随机变量分布列的解题步骤：

(1)明确随机变量的所有可能取值，以及取每个值所表示的意义；

(2)利用概率的有关知识，求出随机变量每个取值的概率；

(3)按规范形式写出分布列，并用分布列的性质验证.

典型例题剖析

例1 一袋中装有6个同样大小的白球，编号为1，2，…，6，现从中随机取出3个球，以 ξ 表示取出球的最大号码，求 ξ 的分布列.

分析 随机取出3个球的最大号码 ξ 所有可能的值为3，4，5，6.

“$\xi=3$”对应事件“取出的3个球，编号为1，2，3”；

“$\xi=4$”对应事件“取出的3个球中，恰好取到4号球及1，2，3号球中的2个”；

“$\xi=5$”对应事件“取出的3个球中，恰好取到5号球及1，2，3，4号球中的2个”；

“$\xi=6$”对应事件“取出的3个球中，恰好取到6号球及1，2，3，4，5号球中的2个”.

要求其概率，则要利用等可能事件的概率公式和排列组合知识来求解，从而获得 ξ 的分布列.

解 随机变量 ξ 的取值为3，4，5，6

$P(\xi=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$；

$P(\xi=4)=\frac{C_1^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{3}{20}$；

$P(\xi=5)=\frac{C_1^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{10}$；

$P(\xi=6)=\frac{C_1^1C_5^2}{C_6^3}=\frac{1}{2}$.

∴随机变量 ξ 的分布列为

ξ	3	4	5	6
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$

评析 确定离散型随机变量的分布列的关键是要搞清随机变量每个值对应的随机事件，进一步利用排列组合知识求出随机变量取每一个值的概率.

例2 设 ξ 是一个离散型随机变量，其分布列为

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$1-2a$	a^2

求 a 的值.

分析 一个随机变量 ξ 的分布 $P(\xi=x_i)=p_i(i=1,2,\cdots)$，必须满足条件：

$p_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots$

$p_1+p_2+\cdots=1$.

解 根据随机变量的概率分布列的性质得

$$\begin{cases}\frac{1}{2}+(1-2a)+a^2=1, & ①\\ 0\leqslant 1-2a\leqslant 1, & ②\\ a^2\leqslant 1; & ③\end{cases}$$

由方程①得 $a^2-2a+\frac{1}{2}=0$，

$a=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由 ②知 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，$\therefore a=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 3 某厂生产电子元件，其产品的次品率为 5%，现从一批产品中任意地连续取出 2 件，求其中次品数 ξ 的概率分布列.

分析 本例中每个元件被抽到是等可能的，其中抽到次品的概率都是 0.05，抽到正品的概率都是 0.95. 可用独立重复试验的概率求法解题.

解 ξ 的可能值是 0、1、2，

$P(\xi=0)=C_2^0\cdot 0.95^2\cdot 0.05^0=0.9025$，

$P(\xi=1)=C_2^1\cdot 0.95\cdot 0.05=0.095$，

$P(\xi=2)=C_2^2\cdot 0.95^0\cdot 0.05^2=0.0025$.

$\therefore\xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	0.9025	0.095	0.0025

评析 *注意本例与下面例子的对比.*

在 100 件产品中有 5 件次品，从中任意地连续取出 2 件，求其中次品数 ξ 的概率分布列.

前者应认为元件个数足够多，前后所取元件的概率互不影响，或影响较小，忽略不计，而后者是有影响，如 $P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_{95}^1C_5^1}{C_{100}^2}=0.1919\neq 0.095$. 可见，在求概率分布列时，要注意概率求法的选择，同时要利用分布列的性质，对分布列的计算结果进行验证.

例 4 设随机变量的分布列 $P(\xi=\frac{k}{5})=ak(k=1,2,\cdots,5)$.

(1)求常数 a 的值；

(2)求 $P(\frac{1}{10}<\xi<\frac{7}{10})$.

分析 对已知含参数的随机变量的分布列，可用随机变量分布列的性质，求出参数；求随机变量在某个区间内取值的概率. 可先确定随机变量在给定区间内相应的值，由于随机变量分别取这些值对应的事件是互斥的，可直接对这些互斥事件的概率求和.

解 (1)$\because\sum\limits_{k=1}^{5}P(\xi=\frac{k}{5})=1$，

$\therefore a(1+2+3+4+5)=1$， $\therefore a=\frac{1}{15}$.

(2)在区间 $(\frac{1}{10},\frac{7}{10})$ 内，ξ 的取值集合为 $\{\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5}\}$.

$$\therefore P(\frac{1}{10}<\xi<\frac{7}{10})=P(\xi=\frac{1}{5})+P(\xi=\frac{2}{5})+P(\xi=\frac{3}{5})$$
$$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}$$
$$=\frac{2}{5}.$$

同步训练 1.1

A

1. 将一颗骰子掷两次，随机变量为(　　).
   A. 第一次出现的点数
   B. 第二次出现的点数
   C. 两次出现的点数之和
   D. 两次出现相同点的种数

2. 袋中有大小相同的 5 个钢球，分别标有 1、2、3、4、5，现在在有放回抽取的条件下依次取了两个球，设两球的号之和为随机变量 ξ，则 ξ 的所有可能取值的个数是(　　).
   A. 5　　B. 9　　C. 10　　D. 25

3. 给出下列四个命题：
   ①15 秒内，通过十字路口的汽车辆数是随机变量；
   ②在一段时间内，某候车室内候车的旅客人数是随机变量；
   ③一条河流每年最大流量是随机变量；
   ④一个剧场共有 3 个出口，散场后从某一出口退场的人数是随机变量.
   其中正确的命题是(　　).
   A. ②③④　　B. ①②④
   C. ①③④　　D. ①②③④

4. 某批量较大的产品次品率为 10%，从中任意连续取出 4 件，则其中恰好含有 3 件次品的概率是(　　).
   A. 0.0001　　B. 0.0036
   C. 0.0486　　D. 0.2916

5. 已知随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=i)=\frac{i}{2a}(i=1,2,3)$，则 $P(\xi=2)=$(　　).
   A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

6. 抛掷两次骰子，两个点的和不等于 8 的概率为(　　).
   A. $\frac{11}{12}$　　B. $\frac{31}{36}$　　C. $\frac{5}{36}$　　D. $\frac{1}{12}$

7. 已知随机变量 ξ 的分布列如下表，则实数 x 的值等于________.

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	x

8. 已知随机变量 ξ 所有可能取的值是 $1,2,3,\cdots,n$，且取这些值的概率依次是 $k,2k,\cdots,nk$，则常数 k 的值为________.

9. 在 n 次独立重复试验中这个事件发生的次数 ξ 是一个随机变量，如果在一次试验中某事发生的概率为 p，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是________.

10. 已知集合 $A=\{2,4,6,8,10\}$，从集合 A 中任取一个大于 5 的数，这个数的可能取值记作 ξ，写出 ξ 的分布列.

11. 口袋中有 6 个大小相同的小球，其中一个球标号为 1，两个球标号为 2，三个球标号为 3，从中任取一个球，标号为 ξ，求 ξ 的分布列.

12. 若篮球运动员投篮球，投中的概率为 0.7，求这名运动员投两个球，投中球数 ξ 的分布列.

13. 盒子内装有大小相同的球 10 个，编号分别为 $0,1,2,\cdots,9$. 从中任取一个，其号码分成三类："小于 5"，"等于 5"，"大于 5"，设随机变量 ξ 为取出的球的号码类别，求 ξ 的分布列.

14. 将 A、B 两颗骰子各掷一次，求下列随机变量的分布列：
(1)掷出的最大点数；
(2)掷出的最小点数；
(3)A 掷的点数减去 B 掷的点数之差.

B

1. 下列可以作为随机变量 ξ 的概率分布列的是(　　).

A.

ξ	-1	0	1
P	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$

B.

ξ	2	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

C.

ξ	2	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$

D.

ξ	-1	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2. 随机变量 ξ 的分布列由 $P(\xi=k)=\frac{a}{N}$，$(k=1,2,3,\cdots,N)$ 给出，则常数 a 等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 0　　D. 2

3. 已知随机变量 η 的分布列为

η	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

则 $P(\eta\geqslant\frac{3}{2})$ 的值等于(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{5}{6}$

4. 某次试验的成功率是失败率的 2 倍，用随机变量 ξ 表示一次试验成功的次数，则 $P(\xi=0)$ 的值等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 0

5. 设离散型随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	p_i

则 p_i 的值为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

6. 在一个口袋中装有黑球、白球各一个，从中任取一个球，记下它的颜色，然后放回再取一球，又记下它的颜色，写出两次取球中白球数的分布列.

7. 写出下列各随机变量 ξ 的分布列：

(1)某次产品检查，在包含有 3 件次品的 10 件产品中任取 2 件，其中次品的件数为 ξ；

(2)从 1,2,3,6 中任取两个数，所得两个数的积为 ξ.

8. 一批零件中有 9 个合格品，3 个不合格品. 从这批零件中任取一个，如果取到的不是合格品，就不再放回，求在取得合格品之前，已取出的不合格品数 ξ 的分布列.

9. 把 4 个球随机投入 4 个盒子中，投掷后空盒的个数记作 ξ，求 ξ 的分布列.

10. 如果在一次试验中某事件发生的概率为 p，求在 n 次独立重复试验中，此事件发生奇数次的概率.

11. 一名学生每天骑自行车上学，从家到学校的途中有 6 个路口设有红绿灯，设在各路口遇到红灯的事件是相互独立的，且概率都是 a，

(1)求下列随机变量 ξ 的分布列：

①设 ξ 为这名学生在途中遇到红灯的次数；

②设 ξ 为这名学生遇到红灯之前经过的路口数；

(2)求这名学生在途中至少遇到一次红灯的概率.

第二课时　几种常用的概率分布列

学法导航

重点难点提示

1. 单点分布：随机变量 ξ 只取一个值，它的分布列为 $P(\xi=a)=1$.

2. 两点分布：随机变量 ξ 只取两个值，它的分布列为：

ξ	x_1	x_2
P	p	$1-p$

3. 二项分布：如果在一次试验中某事件发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中，这个事件恰好发生 k 次的概率是：

$P(\xi=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$.

其中 $k=0,1,2,\cdots,n$，于是得到随机变量 ξ 的分布列为

ξ	0	1	$\cdots$	k	$\cdots$	n
P	$C_n^0p^0q^n$	$C_n^1p^1q^{n-1}$	$\cdots$	$C_n^kp^kq^{n-k}$	$\cdots$	$C_n^np^nq^0$

其中 $q=1-p$.

称这样的随机变量 ξ 服从二项分布，记作 $\xi\sim B(n,p)$，n、p 为参数，并记

$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}=b(k;n,p)$.

4. 几何分布：在独立重复试验中，某事件第一次发生时所作的试验次数 ξ 是一个取值为正整数的离散型随机变量，“$\xi=k$”表示在第 k 次独立重复试验时，事件第一次发生. 如果把 k 次试验时事件 A 发生记作 A_k，事件 A 不发生记作 $\overline{A}_k$，$P(A_k)=p$，$P(\overline{A}_k)=q$，那么

$$\begin{aligned}P(\xi=k)&=P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}\cdot A_k)\\&=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})\cdot P(A_k)\\&=q^{k-1}\cdot p\quad(k=1,2,\cdots).\end{aligned}$$

于是得到随机变量 ξ 的分布列

ξ	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$
P	p	qp	q^2p	$\cdots$	$q^{k-1}p$	$\cdots$

其中 $q=1-p$.

称这样的随机变量 ξ 服从几何分布，并记

$g(k,p)=(1-p)^{k-1}\cdot p$.

5. 超几何分布：一批产品共有 N 件，其中有 $M(M<N)$ 件次品，任取 $n(1\leqslant n\leqslant N)$ 件，则其中的次品件数 ξ 是一离散型随机变量，分布列为 $P(\xi=k)=\dfrac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，$0\leqslant k\leqslant M$，$0\leqslant n-k\leqslant N-M$.

这样的分布称为超几何分布，常用于产品抽样问题中.

6. 随机变量分布列类型的判断及其关系.

(1)二项分布,实际是对 n 次独立重复试验从概率分布的角度作出阐述. 判断二项分布,关键是看某一事件是否是进行 n 次独立重复试验,且每次试验只有两种结果,如果不满足以上两个条件,随机变量就不服从二项分布.

(2)二项分布与超几何分布的关系.

设一批产品有 m 件,其中有 r 件次品($1\leqslant r<m$). 不放回地取 $n(1\leqslant n\leqslant m)$件,其中次品数 ξ 服从超几何分布. 若放回式抽取,则其中次品数 η 的分布列为

$P(\eta=k)=C_n^k(\frac{r}{m})^k(1-\frac{r}{m})^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$,即 η 服从二项分布 $B(n,\frac{r}{m})$.

对于超几何分布的事物总体数 m 足够大,而抽取个数 n 比较小,此时的超几何分布可近似看作是二项分布.

典型例题剖析

例 1　某射手射击时击中目标的概率为 0.8,记 5 次射击中击中目标的次数为随机变量 ξ,求 $p(\xi\geqslant1)$.

分析　5 次射击可视为 5 次独立重复试验,故 ξ 服从二项分布.

解　由题意知 $\xi\sim B(5,0.8)$.

$$\begin{aligned}\therefore P(\xi\geqslant1)&=P(\xi=1)+P(\xi=2)+\cdots+P(\xi=5)\\&=1-P(\xi=0)\\&=1-0.2^5=0.99968.\end{aligned}$$

评析　*解题中应用了分布列的性质 $\sum\limits_{k=0}^{5}P(\xi=k)=1$,事实上,本例也可直接利用对立事件求解.*

事件"$\xi\geqslant1$"的对立事件是"$\xi=0$",

$\therefore P(\xi\geqslant1)=1-P(\xi=0)$.

例 2　已知 $\xi\sim B(11,\frac{1}{3})$,求 $P(\xi=k)$的最大值及相应的 k 的值.

分析　可设 $P(\xi=k)$为最大值,那么 $P(\xi=k)\geqslant P(\xi=k+1)$, $P(\xi=k)\geqslant P(\xi=k-1)$. 通过解不等式就可求得相应的 k 值及 $P(\xi=k)$的最大值.

解　$\because \xi\sim B(11,\frac{1}{3})$.

$\therefore P(\xi=k)=C_{11}^k(\frac{1}{3})^k(1-\frac{1}{3})^{11-k}=C_{11}^k(\frac{1}{3})^k\cdot(\frac{2}{3})^{11-k}$.

令$\begin{cases}P(\xi=k)\geqslant P(\xi=k+1),\\P(\xi=k)\geqslant P(\xi=k-1);\end{cases}$

即$\begin{cases}C_{11}^k(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{11-k}\geqslant C_{11}^{k+1}(\frac{1}{3})^{k+1}\cdot(\frac{2}{3})^{10-k},\\C_{11}^k(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{11-k}\geqslant C_{11}^{k-1}(\frac{1}{3})^{k-1}\cdot(\frac{2}{3})^{12-k}.\end{cases}$

化简得$\begin{cases}k\geqslant3,\\k\leqslant4,\end{cases}$又 $P(\xi=3)=P(\xi=4)$, $\therefore k=3$ 或 $k=4$ 时,$P(\xi=k)$最大.

$P(\xi=k)_{\max}=P(\xi=3)=P(\xi=4)=\frac{14\ 080}{59\ 049}$.

例 3　已知两个随机变量 ξ,η,若 $\xi\sim B(2,p)$, $\eta\sim B(4,p)$,且 $P(\xi\geqslant1)=\frac{5}{9}$,求 $P(\eta\geqslant1)$的值.

分析　可根据条件 $P(\xi\geqslant1)=\frac{5}{9}$ 及分布列的性质求出 p 的值. 并注意"$\xi\geqslant1$"的对立事件是"$\xi=0$","$\eta\geqslant1$"的对立事件是"$\eta=0$".

解　$\because P(\xi\geqslant1)=1-P(\xi=0)$,又 $\xi\sim B(2,p)$,

$\therefore 1-C_2^0p^0(1-p)^2=\frac{5}{9}$,又 $0<p<1$, $\therefore p=\frac{1}{3}$.

$\therefore \eta\sim B(4,\frac{1}{3})$,

$$\begin{aligned}\therefore P(\eta\geqslant1)&=1-P(\eta=0)\\&=1-C_4^0(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^4=\frac{65}{81}.\end{aligned}$$

例 4　设随机变量 ξ 的分布列为

$P(\xi=i)=\frac{i}{10},(i=1,2,3,4)$

求:(1)$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)$;

(2)$P(\frac{1}{2}<\xi<\frac{7}{2})$;

(3)函数 $F(x)=P(\xi<x)$.

分析　对已知分布列,求随机变量概率的问题,可利用概率分布列的性质,并将相应事件化为若干个互斥事件的和,再利用互斥事件概率求法解题.

解　(1)$P(\xi=1$ 或 $\xi=2)=P(\xi=1)+P(\xi=2)$

$=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{3}{10}$.

(2)$P(\frac{1}{2}<\xi<\frac{2}{7})$

$=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3)$

$=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}$

$=\frac{3}{5}$.

(3)事件"$\xi<x$"根据 x 的取值范围,分别分解为若干个互斥事件:

当 $x\leqslant1$ 时,事件是不可能事件;

当 $1<x\leqslant2$ 时,事件化为:"$\xi=1$";

当 $2<x\leqslant3$ 时,事件化为:"$\xi=1$"与"$\xi=2$"的和;

当 $3<x\leqslant4$ 时,事件化为:"$\xi=1$"、"$\xi=2$"与"$\xi=3$"的和;

当 $x>4$ 时,事件"$\xi<x$"为必然事件.

$$\therefore F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant1\\P(\xi=1), & 1<x\leqslant2\\P(\xi=1)+P(\xi=2), & 2<x\leqslant3\\P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=3), & 3<x\leqslant4\\1; & x>4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\\ \frac{1}{10}, & 1<x\leqslant 2\\ \frac{3}{10}, & 2<x\leqslant 3\\ \frac{3}{5}, & 3<x\leqslant 4\\ 1. & x>4\end{cases}$$

同步训练 1.2

A

1. 已知随机变量 $\xi\sim B(6,\frac{1}{3})$，则 $P(\xi=2)=($　　$)$.

A. $\frac{3}{16}$　　B. $\frac{4}{243}$　　C. $\frac{13}{243}$　　D. $\frac{80}{243}$

2. 某批量较大的产品次品率为 10%，从中任意连续取出 4 件，则其中恰好含有 3 件次品的概率是(　　).

A. 0.0001　　B. 0.0036　　C. 0.0486　　D. 0.2916

3. 某射手射击 1 次，击中目标的概率是 0.9. 他连续射击 4 次，且各次射击是否击中目标相互之间没有影响. 有下列结论：

①他第 3 次击中目标的概率为 0.9；

②他恰好击中目标 3 次的概率是 $0.9^3\times 0.1$；

③他至少击中目标 1 次的概率是 $1-0.1^4$.

其中正确结论的序号是(　　).

A. ②③　　B. ①②

C. ①③　　D. ①②③

4. 已知盒中有 10 个灯泡，其中 8 个正品，2 个次品. 现需要从中取出 2 个正品，每次取出 1 个，取出后不放回，直到取出 2 个正品为止，设 ξ 为取出的次品数，求 ξ 的概率分布.

5. 盒子中有大小相同的球 10 个，其中标号为 1 的球 3 个，标号为 2 的球 4 个，标号为 5 的球 3 个. 第一次从盒子中任取 1 个球，放回后第二次再任取 1 个球(假设取到每个球的可能性都相同)，记第一次与第二次取到球的标号之和为 ξ. 求随机变量 ξ 的分布列.

6. 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛. 设随机变量 ξ 表示所选 3 人中女生的人数.

(1)求 ξ 的分布列；

(2)求“所选 3 人中女生人数 $\xi\leqslant 1$”的概率.

7. 袋中装有 1 个白球和 4 个黑球，每次从其中任取一个球，直到取到白球为止，求用下列取法取球次数 ξ 的分布列：

(1)每次取出的黑球不放回；

(2)每次取出的黑球仍放回.

8. 盒中装有 12 个乒乓球，其中 9 个新的，3 个旧的，从盒中任取 3 个，用完后装回盒中，此时盒中的旧球个数 ξ 是一个随机变量，求 ξ 的分布列.

9. 某单位 6 个员工借助互联网开展工作，设同一时间上网人数 $\xi\sim B(6,\frac{1}{2})$，

(1)求至少 3 人同时上网的概率；

(2)至少几人同时上网的概率小于 0.3?

学习笔记

B

1. 有 n 个相同的电子元件并联在电路中，正常工作的元件个数 $\xi \sim B(n, \frac{1}{2})$，要使整个线路正常工作的概率不小于 0.95，$n$ 至少为(　　).

A. 5　　B. 7　　C. 6　　D. 8

2. 一射手对同一目标独立地进行 4 次射击，已知该射手命中目标的次数 $\xi \sim B(4, P)$，若 $P(\xi \geqslant 1) = \frac{80}{81}$，则此射手的命中率 P 等于(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{5}$

3. 已知随机变量 ξ 的概率分布如下：

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$
ξ	6	7	8	9	10
P	$\frac{2}{3^6}$	$\frac{2}{3^7}$	$\frac{2}{3^8}$	$\frac{2}{3^9}$	m

则 $P(\xi=10)=$(　　).

A. $\frac{2}{3^9}$　　B. $\frac{2}{3^{10}}$　　C. $\frac{1}{3^9}$　　D. $\frac{1}{3^{10}}$

4. 设有 n 门火炮，同时向一目标射击，命中飞机的概率都是 0.6，今有一架敌机来犯，每门火炮同时各击一发，要使击中目标的概率不小于 0.99，火炮至少需要(　　).

A. 6 门　　B. 7 门　　C. 5 门　　D. 8 门

5. 设一汽车在前进途中要经过 4 个路口，汽车在每个路口遇到绿灯的概率为 $\frac{3}{4}$，遇到红灯(禁止通过)的概率为 $\frac{1}{4}$. 假定汽车只在遇到红灯或到达目的地才停止前时，ξ 表示停车时已经通过的路口数，求：

(1) ξ 的概率的分布列；

(2) 停车时最多已通过 3 个路口的概率.

6. 某同学参加科普知识竞赛，需回答 3 个问题. 竞赛规则规定：每题回答正确得 100 分. 回答不正确得 -100 分. 假设这名同学每题回答正确的概率均为 0.8，且各题回答正确与否相互之间没有影响.

(1) 求这名同学回答这 3 个问题的总得分 ξ 的概率分布；

(2) 求这名同学总得分不为负分(即 $\xi \geqslant 0$)的概率.

7. 有甲、乙两个篮球运动员，每人各投篮 3 次，甲投篮命中的次数 $\xi \sim B(3, 0.7)$，乙投篮命中的次数 $\eta \sim B(3, 0.6)$，求：

(1) $P(\xi=2)$；

(2) $P(\eta \geqslant 1)$；

(3) $P(\xi=\eta)$.

8. A、B 两个代表队进行乒乓球对抗赛，每队三名队员，A 队队员是 A_1, A_2, A_3，B 队队员是 B_1, B_2, B_3，按以往多次比赛的统计，对阵队员之间胜负概率如下：

对阵队员	A 队队员胜的概率	A 队队员负的概率
A_1 对 B_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
A_2 对 B_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
A_3 对 B_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

现按表中对阵方式出场，每场胜队得 1 分，负队得 0 分，设 A 队、B 队最后所得总分分别为 ξ、η，求 ξ、η 的概率分布.

9.从一批有5个合格品与3个次品的产品中,一件一件地抽取产品,设各个产品被抽到的可能性相同.记ξ为直到取出的是合格品为止时所需抽取的次数,求:

(1)每次抽取的产品都不放回到这批产品中的ξ的分布列;

(2)每次抽取的产品都立即放回到这批产品中,然后再抽取一件产品的ξ的分布列;

(3)每次抽取一件产品后,总将一件合格品放入这批产品中的ξ的分布列.

1.2 离散型随机变量的期望与方差

第三课时　离散型随机变量的期望

学法导航

重点难点提示

1.期望的含义:设离散型随机变量ξ的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

则称$E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$为$\xi$的数学期望或平均数、均值.数学期望又简称期望.数学期望反映了离散型随机变量取值的平均水平.

2.期望与分布列的关系:

期望这一概念是建立在分布列的基础之上.离散型随机变量的分布列与期望虽然都是从整体和全局上刻画随机变量,但二者大有不同.分布列只给出了随机变量取所有可能值的概率,而期望却反映了随机变量取值的平均水平.

期望是通过概率来描述随机变量的均值水平,是变量算术平均数概念的推广.n个数$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$的算术平均数$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2\cdots+x_n)$.

可视作一个随机变量取这n个值$x_1,x_2,\cdots x_n$的概率都是$\frac{1}{n}$的期望值.

3.期望的性质:

随机变量ξ的线性函数的数学期望等于这个随机变量期望$E\xi$的同一线性函数.

即当a、b为常数时

$$E(a\xi+b)=aE\xi+b.$$

4.常见离散型随机变量的期望:

(1)单点分布:随机变量ξ服从单点分布,$P(\xi=a)=1$,则$E\xi=a$.

(2)两点分布:随机变量ξ的分布列为

ξ	0	1
P	q	p

其中$p+q=1$,则$E\xi=p$.

(3)二项分布:若$\xi\sim B(n,p)$,则$E\xi=np$.

(4)几何分布:若$\xi\sim q(k,p)$,则$E\xi=\frac{1}{p}$.

典型例题剖析

例1　已知随机变量ξ的分布列为

ξ	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	a

且$\eta=2\xi+3$,求η的期望值.

分析　根据分布列的性质,求得a的值,再根据期望的性质,求$E\eta$.

解　$\because\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+a=1,\therefore a=\frac{1}{6}$.

$\eta=2\xi+3,\therefore E\eta=2E\xi+3$.

$E\xi=-1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}$,

$\therefore E\eta=-\frac{2}{3}+3=\frac{7}{3}$.

例2　某运动员投篮命中率为$p=0.6$.

求:(1)一次投篮命中次数ξ的期望;

(2)5次投篮,命中次数η的期望.

分析　求随机变量的期望值,关键要求出随机变量的概率分布,再根据期望的定义求期望值.

解　(1)投篮一次可能投中,或可能不中,投中次数ξ服从两点分布,分布列为

ξ	0	1
P	0.4	0.6

$\therefore E\xi=0\times0.4+1\times0.6=0.6$.

(2)5次投篮,投中次数η服从二项分布,分布列为$P(\eta=k)=C_5^k0.6^k\cdot0.4^{5-k}(k=0,1,\cdots,5)$,

即$\eta\sim B(5,0.6)$.

$\therefore E\eta=5\times0.6=3$.

例3　一个袋子中装有大小相同的3个红球和2个黄球,从中同时取出2个,求其中含红球个数的数学期望.

分析　由期望的定义,应先求出随机变量的分布列.从5个球中任取2个球,共有C_5^2种取法,所取的2个球含红球个数的可能值分别是0,1,2,由此即可求得红球个数的期望值.

解　设所取的 2 个球中含红球个数为 ξ，则 ξ 的可能取值为 0，1，2.

$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，

$P(\xi=1)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，

$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$\therefore\xi$ 的数学期望是

$E\xi=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=1.2.$

评析　本例中的随机变量 ξ 是服从超几何分布.容易被误认为是 $\xi\sim B(2,\frac{3}{5})$ 而造成错解.因此，解题时弄清随机变量的概率分布类型，是解题的关键所在.在本例中条件“同时取 2 个球”改为“有放回地连续取 2 个球”那么相应的随机变量就服从二项分布，期望值就可以套用公式.

例 4　一批产品共 100 件，其中有 10 件次品．为了检验其质量，从中随机抽取 5 件，求：

(1)抽取的 5 件产品中次品数 ξ 的期望值；

(2)抽取的 5 件中，至少有 3 件次品的概率.(精确到 0.001)

解　(1)抽取的 5 件产品中，次品数 ξ 的取值为 0，1，2，…，5.

$\therefore P(\xi=k)=\frac{C_{10}^kC_{90}^{5-k}}{C_{100}^5}(k=0,1,\cdots,5).$

按这个计算式，并精确到 0.001，得到 ξ 的分布列：

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.583	0.340	0.070	0.007	0	0

$\therefore E\xi=1\times0.340+2\times0.070+3\times0.007=0.501.$

(2)由分布列知 $P(\xi\geqslant3)=0.007.$

例 5　甲、乙、丙、丁独立地破译一个密码，其中甲成功率为 $\frac{1}{2}$，乙、丙、丁成功率都是 $\frac{1}{3}$．求破译成功的平均人数.

分析　破译成功的平均人数，就是指求破译成功的期望.由破译成功的人数及相应的概率，即可求得破译成功的期望值.

解　设破译密码成功的人数为 ξ，则 ξ 的可能值为 0，1，2，3，4.

$P(\xi=0)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{54}$；

$P(\xi=1)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^3+\frac{1}{2}\cdot[C_3^1\cdot\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2]=\frac{20}{54}$；

$P(\xi=2)=\frac{1}{2}C_3^1\cdot\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2+\frac{1}{2}\cdot C_3^2\cdot(\frac{1}{3})^2\ \frac{2}{3}$

$=\frac{18}{54}$；

$P(\xi=3)=\frac{1}{2}C_3^2\cdot(\frac{1}{3})^2\ \frac{2}{3}+\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^3=\frac{7}{54}$；

$P(\xi=4)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{54}$，

$\therefore E\xi=0\times\frac{8}{54}+1\times\frac{20}{54}+2\times\frac{18}{54}+3\times\frac{7}{54}+4\times\frac{1}{54}$

$=\frac{81}{54}=1.5.$

$\therefore$破译密码成功的平均人数为 1.5.

同步训练　1.3

A

1. 随机抛掷一个骰子，所得骰子的点数 ξ 的期望是(　　).

A. 6　　B. 3　　C. 3.5　　D. 4

2. 随机变量 ξ 满足 $P(\xi=1)=p$，$P(\xi=0)=1-p$，则 $E\xi=$(　　).

A. p　　B. $p(1-p)$

C. $1-p$　　D. p^2

3. 已知随机变量 $\xi\sim B(6,p)$，$E\xi=2$ 则 $P(\xi=2)=$(　　).

A. $\frac{3}{16}$　　B. $\frac{4}{243}$

C. $\frac{13}{243}$　　D. $\frac{80}{243}$

4. 已知随机变量 ξ 满足 $P(\xi=1)=0.3$，$P(\xi=2)=0.7$，则 $E\xi$ 的值等于(　　).

A. 0.6　　B. 0.7　　C. 0.3　　D. 1.7

5. 已知随机变量 ξ 的概率分布列如下表：

ξ	0	1	2	3
P	0.1	a	b	0.1

且 $E\xi=1.5$，则 a、b 的值分别是(　　).

A. 0.4、0.4　　B. 0.3、0.5

C. 0.5、0.3　　D. 0.2、0.6

6. 若随机变量 $\xi\sim B(4,\frac{1}{3})$，则 $E(6\xi+3)$ 的值等于(　　).

A. 9　　B. 11　　C. 10　　D. 12

7. 某灯泡厂生产大批灯泡，其次品率为 1.5%，从中任意地陆续地取出 100 个，则其中正品数 ξ 的数学期望是________.

8. 1 盒中有 9 个正品 3 个废品，每次取出一个产品，取出后又放回，在取得正品前已取出的废品个数 ξ 的期望为________.

9. 一个袋子里装有大小相同的 3 个红球与 2 个黄球，从中同时取出 2 个，则其中含红球个数的数学期望________.

10. 一个碗中放有10筹码，其中8个标有2，2个标有5，某人从此碗中随机无放回地取出3个筹码，若他获得的奖金等于所取3个筹码的数字之和，求他获得奖金金额的期望值.（精确到0.1）

11. 有12个零件，其中9个正品，3个次品，每次从中任取5个，其中至少含有4个正品就算符合要求，有放回地取11次，问符合要求的平均次数为多少？

12. 袋子中装有5个大小相同的球，其中2个白球，3个黑球. 如果每次从中任取一个球（不放回），直到把2个白球都取出为止，设ξ为取到2个白球时取球的次数，求$E\xi$的值.

13. 某部机器一天内发生故障的概率为0.2，机器发生故障则全天停止工作. 如果一周5个工作日里均无故障，可获利润10万元；发生一次故障可获利润5万元；发生两次故障可获利润0万元，发生三次或三次以上故障，则要亏损2万元，求工厂每周的期望利润.（精确到0.001）

B

1. 同时抛掷两枚相同的均匀硬币，随机变量$\xi=1$表示结果中有正面向上，$\xi=0$表示结果中没有正面向上，则$E\xi=$(　　).

A. 0.75　　B. 0.5　　C. 0.64　　D. 0.25

2. 将一颗均匀的骰子掷3次，3次中“5点”出现的次数为随机变量ξ，则ξ的期望等于(　　).

A. 1　　B. 1.5　　C. 0.5　　D. 2

3. 一个盒子中有$n-1$个白球，一个红球. 一个个随意地从中抽取，若抽到白球则抛弃，抽到红球停止，则抛弃次数ξ的期望值等于(　　).

A. $\frac{n}{2}$　　B. $\frac{n-1}{2}$

C. $\frac{n+1}{2}$　　D. $\frac{n+2}{2}$

4. 袋中有1个白球和4个黑球，每次从中任取一个球，每次取出的黑球不再放回去，直到取出白球为止，则取球次数ξ的数学期望值是(　　).

A. 2　　B. 2.5　　C. 2.4　　D. 3

5. 一盒中有9个正品和3个废品零件，每次取出一个零件，如果取出的废品不再放回，在取得正品前取出废品数ξ的期望等于(　　).

A. 0.3　　B. 0.4　　C. 0.25　　D. 0.45

6. 有6节电池，其中2节没电，4节有电，每次随机取一个测试（不放回）直至分清有电没电为止，测试次数ξ为随机变量，则ξ的期望值等于________.

7. 盒中装有12个乒乓球，其中9个新的，3个旧的，从盒中任取3个球，用后放回，此时盒中旧球个数ξ是一个随机变量，则ξ的期望值等于________.

8. 盒子中有大小相同的球10个，其中标号为1的球3个，标号为2的球4个，标号为5的球3个，第一次从盒子中任取1个球，放回后第二次再任取1个球（假设取到每个球的可能性都相同）. 记第一次与第二次取到球的标号之和为ξ，求随机变量ξ的期望$E\xi$的值.