高等学校教学用書

微積分学教程

第二卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

高等教育出版社

高等學校教學用書

微積分學教程

第二卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥爾茨著
北京大學高等數學教研室譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥爾茨（Г. М. Фихтенгольц）所著“微積分學教程”（Курс дефференциального и интегрального исчисления）第二卷 1951 年版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲大學數學系學生及研究生用教學參考書。

本書共分三卷，第一卷由同濟大學楊弢亮、南京大學葉彥謙合譯，第二卷由北京大學高等數學教研室集體翻譯，第三卷由武漢大學路見可等譯。

此書爲第二卷第二分册的中譯本。內容包括：常數項無窮級數，函數序列與函數級數二部分。

本書第一卷第一分册、第二卷第一分册、第三卷第一·二分册由商務印書館出版，其餘各册改由本社出版。

微積分學教程

第二卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥爾茨著

北京大學高等數學教研室譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

京華印書局印刷　新華書店總經售

書号13010·43 開本 850×1168 1/32　印張 7 5/8　字數 205,000
一九五四年五月北京第一版
一九五六年五月北京第五次印刷
印數 8,001—10,000　定價（8）¥ 0.90

第二分册目錄

第十一章　常數項無窮級數

第十二章 函數序列與函數級數

第十一章　常數項無窮級數

§1　引言

353. **基本概念**　設給定某一無窮數串

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

從這些數所作的符號

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

叫做無窮級數，而（1）中各數叫做級數的項。利用累加記號Σ，常把（2）寫作：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \tag{2a}$$

這裏指標 n 通過所有由 1 到∞的值*。

依次把級數的各項加起來，作（無窮多個）和數：

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \cdots,\ A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,\ \cdots; \tag{3}$$

這些和數就叫做級數的部分和數(或段)。以後我們將時常把這個部分和數的數串 $\{A_n\}$ 跟級數（2）相參照：因爲（2）這個符號正表示上述數串的結果。

如果級數（2）的部分和數 A_n 當 $n \to \infty$ 時具有有窮或無窮（但有確定的正號或負號的）極限 A：

$$A = \lim A_n,$$

那麽這個極限就叫做級數的和數並寫

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

* 但是，級數的項的下標，不從 1 開始，而從 0 或任何一個大於 1 的自然數開始，有時是更方便的。

這就給了符號 (2) 或 (2a) 以數値的意義：如果級數具有有窮和數，就叫它是收斂的，相反的情況（即是，如果和數等於 $\pm\infty$、或根本沒有和數），就叫它是發散的。

這樣，級數(2)收斂的問題，依定義，就與數串 (3) 的有窮極限存在的問題相同。相反地，無論事先取什麼樣的數串 $x=x_n(n=1,2,3,\cdots)$，這個數串的有窮極限存在的問題都可以化成級數

$$x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})+\cdots \tag{4}$$

收斂的問題，數串

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

的順次的每個値恰恰就是級數 (4) 的部分和數。而且級數的和數就與數串的極限一致。

換句話說，研究無窮級數及其和數不過是研究數串及其極限的一種新的形式。但是，讀者在以後的敍述中可以看到，無論在確定極限本身存在的時候，或者在計算這極限的時候，這種形式都顯示着無法估價的優越性。這種情況就使無窮級數成爲數學分析及其應用中最重要的研究工具。

354. 例題 1) 無窮級數的最簡單的例子是讀者熟知的幾何級數：

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

這個幾何級數的部分和數是(如果 $q\neq1$)

$$s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}.$$

如果級數的公比，q，其絕對値小於 1，那麼 [如我們已經知道的，25,7)] s_n 具有有窮極限

$$s=\frac{a}{1-q},$$

也就是所說級數收斂，而 s 是它的和數。

當 $|q|\geqslant1$ 時，這個級數就是發散級數的例子。如果 $q\geqslant1$，級數的和數就是無窮(有確定的正號或負號)；在其他情形下，和數根本不存在。我們指出，特別地，當 $a=1$ 及 $q=-1$

* 如果級數的某一項是負數：$a=-b$ (其中 $b>0$)，那麼可不必寫作：$\cdots+(-b)+\cdots$，而寫作：$\cdots-b+\cdots$。我們強調，這兒級數的項仍然是 $-b$，而不是 b。

時，就得到一個有趣的級數：

$$1-1+1-1+\cdots\equiv 1+(-1)+1+(-1)\cdots^*.$$

這個級數的部分和數輪流地一會兒等於1，一會兒等於0。

2）展開成無窮小數

$$C_0.c_1c_2c_3\cdots c_n\cdots$$

的實數 a [9]，顯然是下列級數的和數：

$$a=C_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\frac{c_3}{10^3}+\cdots+\frac{c_n}{10^n}+\cdots$$

3）依(4)的樣式作成的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}[\log(n+1)-\log n]$$

顯然是發散的，因為 $\log(n+1)\to\infty$。

4）在實質上同樣的觀念下也可作成級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

因為第 n 部分和數（以後簡稱第 n 和——譯者）等於 $1-\frac{1}{n+1}$，所以級數收斂並且具有和數1。

5）容易確定級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$$

的發散性。實際上，因為這個級數的項是遞降的，所以它的第 n 和

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

但這個第 n 和隨着 n 的無限增大而趨於無窮。

6）最後，我們給出一個值得一提的數串的例子：

$$y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},$$

關於這個數串，在第37目中我們已證明過它趨於數 e。這就等於斷定：e 是下面無窮級數的和數：

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

回憶一下第37目中數 e 的近似計算，從這個例子，讀者可以看出繼續引進愈來愈不緊

要的校正數的好處，這種好處就在於這些校正數是把用部分和數的形式表示出的 e 的近似值來逐步地加以改進。

355. 基本定理 如果在級數 (2) 中棄去前面的m個項，就得到級數：

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}+\cdots=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n, \tag{5}$$

即所謂級數 (2) 第m項後的餘式。

1° **如果級數 (2) 收斂，則它的任何一個餘式 (5) 也收斂；反之，從餘式 (5) 的收斂性可推出原來的級數 (2) 的收斂性。**

固定 m，並用 A'_k 表示級數 (5) 的第 k 和：

$$A'_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{m+k}.$$

於是，顯然，

$$A'_k=A_{m+k}-A_m. \tag{6}$$

如果級數 (2) 收斂，於是 $A_n\to A$，那麽——當 k 無限增大時——就存在一個有窮極限

$$A'=A-A_m \tag{7}$$

而對於和數 A'_k 來說，這就表示級數 (5) 的收斂性。

反之，如果已知級數 (5) 收斂，於是 $A'_k\to A'$，那麽在等式 (6) 中令 $k=n-m$(當 $n>m$ 時)，改寫等式(6)成爲：

$$A_n=A_m+A'_{n-m};$$

由此就可以看出，當 n 無限增大時，部分和數 A_n 具有極限

$$A=A_m+A', \tag{8}$$

即是，級數(2)收斂。

換個說法：**棄去級數前面的有限個項或在級數前面加進若干新的項，並不影響級數的性質**(在級數的收斂性或發散性的意義上的性質)。

不用 A' 而用符號 α_m 表示級數 (5) 的和數 (如果級數 (5) 收斂的話)，新符號的下標指出在什麽項以後取餘式。於是公式(8)與公式(7

可改寫成下面的形式:

$$A=A_m+\alpha_m,\quad \alpha_m=A-A_m. \tag{9}$$

如果把m增大到無窮，則 $A_m\to A$, 而 $\alpha_m\to 0$。所以:

2° 如果級數(2)收斂，則它的第m項後的餘式的和數 α_m 隨着m的增大而趨於 0。

我們提出收斂級數的如下的一些簡單性質:

3° 如果以同一因數 c 去乘收斂級數 (2) 的各項，則它的收斂性並不受到破壞(而僅僅在和數上乘以 c)。

實際上，級數

$$ca_1+ca_2+\cdots+ca_n+\cdots$$

的部分和數$\overline{A_n}$顯然等於

$$\overline{A_n}=ca_1+ca_2+\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+\cdots+a_n)=cA_n$$

並且具有極限 cA。

4° 兩個收斂級數

$$A=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

與

$$B=b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

可以逐項相加(或相減)，於是級數

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)+\cdots$$

也收斂，而它的和數相應地等於 $A\pm B$。

如果 A_n, B_n 與 C_n 分別表示上述級數的部分和數，那麼，顯然，

$$C_n=(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)=$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm(b_1+b_2+\cdots+b_n)=A_n\pm B_n.$$

取極限，得到

$$\lim C_n=\lim A_n\pm\lim B_n,$$

這就證明了我們的論斷。

我們現在來確定級數 (2) 的收斂性的一般條件。因爲這收斂性與

數串 A_n 的有窮極限的存在性相當，所以，回憶一下第 39 目中數串情形的收斂原則，就可以把這個原則翻譯成適用於級數的收斂原則：

5° 級數 (2) 收斂的充分與必要條件是：對應於每一數 $\varepsilon>0$，有如此的數 N，使得當 $n>N$ 時，不管是怎樣的 $m=1, 2, 3, \cdots$，不等式

$$|A_{n+m}-A_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+m}|<\varepsilon \tag{10}$$

成立。

可是，在實際問題中利用這個條件通常是困難的；所以在級數的理論中要建立許許多多收斂性（與發散性）的判別法。這些判別法不像收斂原則那樣有普遍性，它們只給出充分條件，但它們是簡單的而且總合起來可以解決所有實際的需要。下面兩節就是專用來講述這些判別法的。

最後，還要作一點說明：假定級數是收斂的，如果在不等式(10)中，特別地，取 $m=1$，就得到：

$$|a_{n+1}|<\varepsilon\ (\text{當 } n>N \text{ 時}),$$

於是 $a_{n+1}\to 0$ 或（同樣地）$a_n\to 0$。這樣一來：

6° 收斂級數的普遍項 a_n 趨於 0。

這也完全可用初等方法來證明：既然 A_n（A_{n-1} 也與 A_n 一樣）具有有窮極限 A，所以

$$a_n=A_n-A_{n-1}\to 0.$$

上述斷言中包含着我們時常要利用的級數收斂性的必要條件。當違反這一條件時，級數顯然是發散的。但這是很重要的，就是應該強調這個條件比收斂原則所要求的少得多，而且條件本身並不是級數收斂性的充分條件。換句話說，即使在這一條件滿足時，級數也可能發散。上面 [354, 3) 與 5)] 考察過的級數

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ 與 } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

就可作爲這種情形的例子；讀者在以後還可發現這種情形的許多別的例子。

§ 2　正項級數的收斂性

356. **正項級數收斂的條件**　關於確定每項都是非負的級數收斂(或發散)的問題，可極簡單地得到解決；爲簡短起見，我們把這種級數簡單地叫做正項級數。

設級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{A}$$

是正項級數，即 $a_n \geqslant 0$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$。於是，顯然，

$$A_{n+1} = A_n + a_{n+1} \geqslant A_n,$$

即是，數串 A_n 是遞增的。回憶單調數串的極限的定理[34]，我們就直接得到在正項級數理論中的下面的基本定理：

正項級數(A)恆有和數；如果級數的部分和數囿於上，這個和數是有窮的(因而級數是收斂的)；在相反情形下，這個和數就是無窮的(因而級數是發散的)。

正項級數收斂(或發散)的所有的判別法，歸根到底，都是根據着這條簡單的定理的。但是，只在很少的情形下才能直接應用這條定理去判斷級數的性質。下面就是這種應用的例子。

1) 考慮調和級數*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

顯然有下列不等式：

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

---

* 這個級數從第二項開始的每一項，是相隣兩項的調和中項。[數 c 叫做數 a 與 b 的調和中項，如果 $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 的話。]

如果在棄去前兩項後，把調和級數其餘的項逐次按每組 $2,4,8,\cdots,2^{k-1},\cdots$ 個項分成若干組：

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2};\ \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{2^2};\ \underbrace{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}}_{2^3};\ \cdots;\ \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}};\ \cdots;$$

那麼，這些和數中的每一個和數都大於 $\frac{1}{2}$；在 (1) 中輪流令 $n=2,4,8,\cdots,2^{k-1},\cdots$ 就容易斷定這件事實的成立。我們用 H_n 表示調和級數的第 n 部分和數，於是，顯然，

$$H_{2^k} > k\cdot\frac{1}{2}.$$

我們看出，部分和數不能囿於上，故級數有無窮和數。

我們指出，不等式 (1) 一開始就顯出違反 355, 5° 收斂性的基本條件；事實上，當 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 與 $m=n$ 時，無論對那一個 n，不等式 (10) 都不成立。

我們在這裏單提到一點，即當 n 增大時，H_n 增加得很慢。例如，歐拉曾經計算過

$$H_{1000}=7.48\cdots,\quad H_{1000000}=14.39\cdots,\text{等等。}$$

以後我們有機會來更精確地敍述和數 H_n 增加的情況 [358, 10)]。

2) 現在考慮一個更普遍的級數：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots,$$

其中 s 是一個任意實數；例題 1) 的級數正好就是這個級數的一個特殊情形（當 $s=1$ 時）。因與例題 1) 中的級數相似的緣故，這個級數也叫做調和級數。

因爲當 $s<1$ 時，所考慮級數的各項大於例題 1) 中級數的相應項，所以，在這一假定下，所考慮級數的部分和數就更加不囿於上，於是級數發散。

現在研究 $s>1$ 的情形；爲方便起見令 $s=1+\sigma$，其中 $\sigma>0$。

與 (1) 類似，這次有

$$\frac{1}{(n+1)^s}+\frac{1}{(n+2)^s}+\cdots+\frac{1}{(2n)^s}<n\cdot\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^\sigma}. \tag{2}$$

像上面一樣，逐次分所有的項成若干組：

$$\underbrace{\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}}_{2};\ \underbrace{\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}}_{2^2};\ \underbrace{\frac{1}{9^s}+\cdots+\frac{1}{16^s}}_{2^3};\ \cdots;\ \underbrace{\frac{1}{(2^{k-1}+1)^s}+\cdots+\frac{1}{(2^k)^s}}_{2^{k-1}};\ \cdots;$$

利用 (2) 容易證明：這些和數分別小於幾何級數的下列各相當項

$$\frac{1}{2^\sigma},\ \frac{1}{4^\sigma}=\frac{1}{(2^\sigma)^2},\ \frac{1}{8^\sigma}=\frac{1}{(2^\sigma)^3}\ \cdots,\ \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma}=\frac{1}{(2^\sigma)^{k-1}},\cdots$$

在這樣的情形下，顯然無論怎樣取所考慮級數的部分和數，這個部分和數總小於常數

$$L=1+\frac{1}{2^s}+\frac{\frac{1}{2^\sigma}}{1-\frac{1}{2^\sigma}},$$

因而，級數收斂。

[依 s 的值而決定的這個級數的和數，代表一個著名的黎曼函數 $\zeta(s)$，這個函數在數論中起着重要的作用。]

357. 級數的比較定理 正項級數的收斂性或發散性，常常用把它跟另一個已知爲收斂或發散的級數相比較的方法來確定。下面的簡單定理就是這種比較法的基礎。

定理 1. 設給定二正項級數

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{A}$$

與

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots \tag{B}$$

如果，至少從某處開始（比方說，對於 $n>N$），不等式 $a_n \leqslant b_n$ 成立，那麽，從級數(B)的收斂性就可推得級數(A)的收斂性；或者——同樣地——從級數(A)的發散性可推知級數(B)的發散性。

證明 根據棄去級數的前面有限多個項並不影響級數的性質這一事實[355, 1°]，不失普遍性，我們可以認爲，對於所有的值 $n=1,2,3\cdots$ 都有 $a_n \leqslant b_n$。分別用 A_n 與 B_n 表示級數 (A) 與 (B) 的部分和數，即有：

$$A_n \leqslant B_n.$$

設級數(B)收斂；於是，依基本定理[356]，和數 B_n 有界：

$$B_n \leqslant L(L=\text{常數};\ n=1,2,3,\cdots).$$

由於上面的不等式，更加有

$$A_n \leqslant L,$$

再依同樣的基本定理，就引出級數（A）的收斂性。

由定理 1 推出的下述定理，有時在實用上更爲方便：

定理 2. 如果極限

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=K^*,\ (0\leqslant K\leqslant+\infty)$$

存在，則從級數(B)的收斂性，當 $K<+\infty$ 時，可推得級數(A)的收斂性，而從級數（B）的發散性，當 $K>0$ 時，可推得級數（A）的發散性。[由此可見，當 $0<K<+\infty$ 時二級數同時收斂或同時發散。]

證明　設級數(B)收斂且 $K<+\infty$。任取一數 $\varepsilon>0$，依極限定義，對於充分大的 n，有

$$\frac{a_n}{b_n}<K+\varepsilon,\ \text{由此}\ a_n<(K+\varepsilon)b_n.$$

由於 355,3°，以常數 $K+\varepsilon$ 乘級數(B)的各項所得到的級數 $\Sigma(K+\varepsilon)b_n$ 與級數(B)同時收斂。由此，依上面的定理，推得級數（A）的收斂性。

如果級數(B)發散且 $K>0$，則在此情形下，相反的比值 $\frac{b_n}{a_n}$ 具有有窮極限；級數（A）一定發散，因爲，如果級數(A)收斂，則依上面的證明，級數（B）也收斂，這與假定相矛盾。

最後，再講一個比較定理，這也是定理 1 的推論。

定理 3. 如果，至少從某處開始（比方說，對於 $n>N$），不等式

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}{}^{**}\tag{3}$$

成立，那麽，從級數(B)的收斂性可推知級數(A)的收斂性；或者——同樣地——從級數（A）的發散性可推知級數（B）的發散性。

證明　與定理 1 的證明一樣，不失普遍性，可以認爲，不等式(3)對於所有的值 $n=1,2,3,\cdots$ 都是正確的。在這情形下，有

$$\frac{a_2}{a_1}\leqslant\frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2}\leqslant\frac{b_3}{b_2},\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

* 在此我們假定，$b_n\neq0$。

** 在此當然假定 a_n 與 b_n 都異於零。