



聚骄公司全心专业设计

考研数学 十年真题 全方位解码

世 华 潘正义
主 编

吃透真题，
考研成功一半！

2008版
(数学二)

世界图书出版公司

013-44

198

:2

2007



FOCUS
聚焦图书

聚骄公司全心专业设计

**考研
数学**

十年真题

全方位解码

世 华 潘正义 主编

2008版

(数学二)

兴界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题全方位解码. 数学二 / 世华, 潘正义
主编. — 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2006. 2
ISBN 978 - 7 - 5062 - 7922 - 2

I. 考... II. ①世... ②潘... III. 高等数学 — 研究生 — 入学考试 — 解题 IV. 013—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 007889 号

十年真题全方位解码 (数学二)

主 编: 世 华 潘正义

责任编辑: 高玉兵

封面设计: 耕者工作室

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话: 88861708 邮编: 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 14.25

字 数: 274 千字

版 次: 2007 年 2 月第 2 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 9787 - 7-5062-7922-2/O · 547

定价: 17.80 元

服务热线: 010 - 88861708

前言

本书严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写,对十年(2007-1998)来的考研数学真题的进行了详解、分析、归类和题型点对点演练。

本书分为三个部分:

第一部分为2007-1998年的十年真题。目的在于给考生形成一个完整的印象,了解考研数学命题的基本形式和题型分布。考生应充分利用这些真题,在规定时间内完成试卷,以达到模拟现场考试的目的。

第二部分为题型归类总结部分。我们将考研数学知识点分成了几十个不同的题型,将十年真题“打散”开,“融入”到各个题型中。目的在于让考生清楚、直观地看到每个知识点是通过何种题型来考查的,每种题型又有哪些变化形式,这样,可以做到知己知彼。

第三部分为真题及题型演练解析部分。通过“命题目的”、“思路点拨”、“详细解答”、“易错辨析”、“延伸拓展”几个部分,让考生不但知道题目该怎么做,而且知道题目为什么这么设计,易错的点在哪里,真正达到举一反三,触类旁通的目的。每套试卷的考点分布表统计了历年真题的考点分布情况,让考生可以直观地把握考试重点、了解考试特点。

本书使用建议:

在基础复习阶段,考生可以利用第二部分,体会各个知识点和题型的命题形势和特点。同时,对照第三部分,体会各种解题方法和技巧。

在模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼提高解题速度和准确率。然后对照第三部分的真题解析归纳出自己的问题和错误点,并针对这些错误点和薄弱环节,先在《数学复习指南》(陈文灯教授编著)上找到相应的知识点和题型详解,最后结合第二部分的真题和题型演练题进行有针对性地训练。

目 录

第一篇 真题回顾

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(1)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(5)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(9)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(13)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(17)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(21)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(24)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(28)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(32)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(36)

第二篇 题型归类与演练

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

【命题特点】	(39)
题型 1 求复合函数的表达式	(39)
题型 2 求 1^∞ 型极限	(40)
题型 3 求 $\frac{0}{0}$ 型极限	(40)
题型 4 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(40)
题型 5 函数性质(奇偶性、周期性、单调性、有界性)的判断或证明	(41)
题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数	(41)
题型 7 数列极限的判定或求解或证明	(42)
题型 8 求 n 项和的数列的极限	(42)
题型 9 函数间断点的讨论或判定	(43)
题型 10 已知函数的连续性,反求函数中的参数	(43)
题型 11 已知极限存在,反求参数	(43)
题型 12 讨论函数的连续性	(44)

题型 13	已知一极限,求另一极限	(44)
题型 14	求函数的表达式	(44)
题型 15	求函数的值域	(45)

第二章 一元函数微分学

【命题特点】	(45)
题型 1 与函数导数和微分的概念和性质相关的命题	(45)
题型 2 函数(含分段函数)在一点可导的判定或求解	(46)
题型 3 求复合函数的导数或微分	(46)
题型 4 求隐函数的导数或微分	(47)
题型 5 求参数方程的导数	(47)
题型 6 求函数在一点的高阶导数或泰勒展开式或马克劳林展开式	(47)
题型 7 函数极值、最值、拐点或凹凸区间的判定或求解	(48)
题型 8 函数与其导函数的关系或图形的判定	(49)
题型 9 函数不可导点的个数的求解	(50)
题型 10 不等式的证明或判定	(50)
题型 11 在某一区间至少存在一点或两点使某个式子成立的证明	(51)
题型 12 函数单调性的判断或增减区间的求解	(51)
题型 13 方程根的判定或唯一性证明	(52)
题型 14 求一元函数在一点的切线方程或法线方程	(52)
题型 15 求曲线的渐近线方程	(53)

第三章 一元函数积分学

【命题特点】	(53)
题型 1 求不定积分或原函数	(54)
题型 2 函数的原函数性质的判定	(54)
题型 3 求一元函数(含分段函数)的定积分	(54)
题型 4 定积分的比较	(55)
题型 5 求变上限积分的函数或定积分中含参数的导数	(55)
题型 6 求解含有积分的方程	(56)
题型 7 求解含抽象函数的积分	(56)
题型 8 求反常积分	(56)
题型 9 求曲线的弧长或曲率或曲率半径相关的问题	(56)
题型 10 求平面图形的面积	(57)
题型 11 求旋转体的体积或表面积或立体的体积	(57)
题型 12 求函数的平均值	(57)
题型 13 求变力做功或压力等定积分在几何上或物理上的应用	(58)
题型 14 定积分不等式的证明	(58)

第四章 多元函数微积分学

【命题特点】	(59)
题型 1 讨论多元函数的可微性	(59)

题型 2 求多元复合函数的偏导	(59)
题型 3 多元函数极值的判定或求解	(60)
题型 4 求二重积分	(60)
题型 5 二重积分的累次积分表示或变换	(61)

第五章 常微分方程

【命题特点】	(61)
题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解	(62)
题型 2 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解	(62)
题型 3 求可降价的微分方程的通解或特解	(62)
题型 4 已知二阶齐次线性微分方程的解,反求微分方程	(62)
题型 5 利用代换化简微分方程并求通解	(63)
题型 6 通过解微分方程求函数表达式	(63)
题型 7 微分方程的几何或物理应用题	(63)

第二部分 线性代数

第一章 行列式

【命题特点】	(65)
题型 1 行列式的计算	(65)
题型 2 求矩阵的行列式	(65)

第二章 矩 阵

【命题特点】	(66)
题型 1 判断矩阵是否可逆或求逆矩阵	(66)
题型 2 解矩阵方程或求矩阵表达式	(67)
题型 3 矩阵的伴随矩阵的求解或判定	(67)
题型 4 矩阵的初等变换与初等矩阵的关系	(68)

第三章 向 量

【命题特点】	(68)
题型 1 向量组线性相关性的判断或证明	(68)
题型 2 求向量组的秩或已知向量组的秩反求参数	(69)
题型 3 求向量组的极大线性无关组	(69)
题型 4 讨论含参变量的向量组的线性相关性	(70)
题型 5 向量的线性表出或讨论含参变量的线性表出	(70)

第四章 线性方程

【命题特点】	(71)
题型 1 齐次线性方程组的基础解系的求解或判定	(71)
题型 2 已知线性方程组的解或解的情况,求线性方程组或线性方程组中的参数	(71)
题型 3 求线性方程组的通解	(72)

题型 4 讨论含参数的线性方程组的解的情况,如果方程组有解时求出通解	(72)
题型 5 直线方程所组成的方程组的解和直线的位置关系的判定	(72)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

【命题特点】	(73)
题型 1 求矩阵的特征值或特征向量	(73)
题型 2 已知含参数矩阵的特征向量或特征方程,求参数	(74)
题型 3 矩阵是否可对角化的判定或求解或逆问题	(74)
题型演练参考答案	(75)

第三篇 答案详解

2007 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(101)
2007 年数学(二)试卷评析	(113)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(114)
2006 年数学(二)试卷评析	(124)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(125)
2005 年数学(二)试卷评析	(136)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(137)
2004 年数学(二)试卷评析	(148)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(149)
2003 年数学(二)试卷评析	(161)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(162)
2002 年数学(二)试卷评析	(173)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(174)
2001 年数学(二)试卷评析	(184)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(185)
2000 年数学(二)试卷评析	(196)
1999 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(197)
1999 年数学(二)试卷评析	(208)
1998 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(209)
1998 年数学(二)试卷评析	(220)

第一篇 真题回顾

2007 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln(1 + \sqrt{x})$ C. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

(2) 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$

- A. 0 B. 1 C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2}$

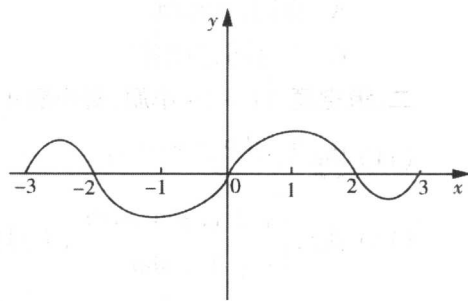
(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周,设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 则下列结论正确的是:

A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$

B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$

D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是:

A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$

C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在 D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

(5) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$,渐近线的条数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 令 $u_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$, 则下列结论正确的是:

- A. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 B. 若 $u_1 > u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散
C. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛 D. 若 $u_1 < u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散

(7) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是

- A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.
B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$.
C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.
D. $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$.

(8) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 且二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

- A. $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$. B. $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$.
C. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$. D. $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$.

(9) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

- A. $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$. B. $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.
C. $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$. D. $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$.

(10) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B

- A. 合同, 且相似. B. 合同, 但不相似.
C. 不合同, 但相似. D. 既不合同, 也不相似.

二、填空题: 11 - 16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题卡指定位置上.

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x^3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 曲线 $\begin{cases} x = \cos t + \cos^2 t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$, 上对应于 $t = \frac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$ 的通解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}.$

(15) 设 $f(u, v)$ 为二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(16) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题:17 - 24 小题,共 86 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调,可导函数,且满足

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = \int_0^x \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} dt,$$

其中 f^{-1} 是 f 的反函数,求 $f(x)$.

(18) (本题满分 11 分)

设 D 是位于曲线 $y = \sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}} (a > 1, 0 \leq x < +\infty)$ 下方、 x 轴上方的无界区域.

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$;

(II) 当 a 为何值时, $V(a)$ 最小? 并求此最小值.

(19) (本题满分 10 分)

求微分方程 $y''(x + y'^2) = y'$ 满足初始条件 $y(1) = y'(1) = 1$ 的特解.

(20) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0) = 1$, 函数 $y = y(x)$ 由方程 $y - xe^{y-1} = 1$ 所确定. 设

$$z = f(\ln y - \sin x), \text{ 求 } \left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{d^2z}{dx^2} \right|_{x=0}.$$

(21) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,在 (a, b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 证明:存在 $\xi \in (a, b)$,使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(22) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1. \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 < |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

(23) (本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0, \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad \textcircled{2}$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

(24) (本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量, 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$ 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量

(II) 求矩阵 B .

2006 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上.)

(1) 曲线 $y = \frac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$ 的水平渐近线方程为_____.

(2) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} \int_0^x \sin t^2 dt, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续,则 $a =$ _____.

(3) 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} =$ _____.

(4) 微分方程 $y' = \frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是_____.

(5) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定,则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

(6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$,则 $|B| =$ _____.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$,则

(A) $0 < dy < \Delta y$.

(B) $0 < \Delta y < dy$.

(C) $\Delta y < dy < 0$.

(D) $dy < \Delta y < 0$.

[]

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数,除 $x = 0$ 外处处连续, $x = 0$ 是其第一类间断点,则 $\int_0^x f(t) dt$ 是

(A) 连续的奇函数.

(B) 连续的偶函数.

(C) 在 $x = 0$ 间断的奇函数.

(D) 在 $x = 0$ 间断的偶函数.

[]

(9) 设函数 $g(x)$ 可微, $h(x) = e^{1+g(x)}$, $h'(1) = 1$, $g'(1) = 2$,则 $g(1)$ 等于

(A) $\ln 3 - 1$.

(B) $-\ln 3 - 1$.

(C) $-\ln 2 - 1$.

(D) $\ln 2 - 1$.

[]

(10) 函数 $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + x e^x$ 满足的一个微分方程是

(A) $y'' - y' - 2y = 3xe^x$.

(B) $y'' - y' - 2y = 3e^x$.

(C) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

(D) $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

[]

(11) 设 $f(x, y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

$$(C) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$(D) \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

【 】

(12) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

【 】

(13) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列正确的是

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关

【 】

(14) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第一列的 -1 倍加到第 2 列得 C ,

$$\text{记 } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则}$$

$$(A) C = P^{-1}AP$$

$$(B) C = PAP^{-1}$$

$$(C) C = P^TAP$$

$$(D) C = PAP^T$$

【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

试确定常数 A, B, C 的值, 使得

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

(16)(本题满分 10 分)

$$\text{求 } \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx.$$

(17)(本题满分 10 分)

设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D \frac{1 + xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$

(18)(本题满分12分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$.

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限;

(II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(19)(本题满分10分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

(20)(本题满分12分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0, \infty)$ 内具有二阶导数, 且 $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ 满足关系式 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(I) 验证 $f''(u) + \frac{f'(u)}{u} = 0$.

(II) 若 $f(1) = 0, f'(1) = 1$. 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(21)(本题满分12分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$.

(I) 讨论 L 的凹凸性;

(II) 过点 $(-1, 0)$ 引 L 的切线, 求切点 (x_0, y_0) , 并写出切线的方程;

(III) 求此切线与 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分)及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(22)(本题满分9分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1. \end{cases}$$

有3个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(II) 求 a, b 的值及方程组的通解.

(23)(本题满分9分)

设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为3, 向量 $I_1 = (-1, 2, -1)^T, I_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分,把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $dy \Big|_{x=\pi} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x} \arcsin x - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3).$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点.

【 】

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 “ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

【 】

(9) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x 轴

交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3.$

(B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3.$

(C) $-8 \ln 2 + 3.$

(D) $8 \ln 2 + 3.$

【 】

(10) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数,

则 $\iint_D \frac{a \sqrt{f(x)} + b \sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$

(A) $ab\pi.$

(B) $\frac{ab}{2}\pi.$

(C) $(a+b)\pi.$

(D) $\frac{a+b}{2}\pi.$

【 】