依据国家教育部中小学最新教材编写

平面解析几何

高中

（修订版）

主　编：北京师范大学　向佐初

北京师范大学实验中学

北京师范大学附中

北京师范大学二附中

首都师范大学附中

北京四中

高中精讲检测丛书

西苑出版社

·高中精讲检测丛书·

高中平面解析几何

（修订版）

主　　编　向佐初
副主编　巴　丹　王青悦
本卷主编　陈鸿征

西苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中平面解析几何/向佐初主编. —北京:西苑出版社,1998.9
(高中精讲检测丛书)
ISBN 7—80108—129—3

Ⅰ.高… Ⅱ.向… Ⅲ.解析几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G633.653

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第14801号

高中平面解析几何

主　　编　向佐初
出版发行　西苑出版社
通讯地址　北京市海淀区永定路7号　100039
　　　　　电话　68173419　传真　68173117
印　　刷　北京市通州次渠印刷厂
经　　销　全国新华书店
开　　本　787×1092毫米 1/32　　印张　14.875
印　　数　1—5000册　　字数　304千字
　　　　　1999年6月第一版　1999年6月第一次印刷
书　　号　ISBN 7—80108—129—3/G·27

定　价:15.00元

《高中精讲检测丛书》编委会

张绛珠	张淑琴	张　莉	魏　伟	李秀娟
尹鲜芝	杜素英	严　洁	张景富	王景山
王　颖	李　勇	薛艳梅	赵　研	王艳军
李国柱	张　滨	胡国燕	许连壁	刘玉平
朱湘君	张立新	崔君方	李　艳	陈　丽
尹欲宏	蒙　琳	栾　谦	张秀芬	马志雄
林春芳	郑秀华	周朝晖	蒋学敏	狄　燕
李金英	时振兴	葛玉红	吴建新	张书琴
张培靖	吴　峥	安宏志	薛景娣	吴　磊
张梦云	路　华	石俊华	万　妞	黄秀英
刘玉清	熊珍秀	杨玉娇	郭晓军	凌　燕
阎黛雅	邢素芬			

前　言

为了加强高中基础知识与同步强化训练，帮助学生更好地学习和掌握教学大纲规定的内容，给学生复习、考试提供一套高质量有特色的导读丛书，以利于全面提高学生素质，打好基础，顺利应试，我们编撰了这套《高中精讲检测丛书》。本《丛书》由北京师范大学有关专家学者领衔主持，并组织北京师范大学实验中学、北京师范大学附中、北京师范大学二附中、首都师范大学附中、北京四中、北京大学附中、北京二中、北京九中、北京八十中、北京理工大学附中、北京师范大学、北方工业大学、北京教育学院西城分院、北京市石景山区教师进修学校，以及其他部分省市教育系统的教授、副教授、特级教师、高级教师、博士、讲师和基础教育专家共百余人，精心笔耕而成。

《丛书》以国家教育部审定的《全日制中学语文、数学、物理、化学、英语教学大纲(修订本)》为指导，以新教材为依据，按教科书的安排逐章编写，力求少而精，特别注意教材知识点的提炼，重点难点精讲，解题技巧与思路分析，巩固提高练习，期中期

末测试，还兼顾高考的需要，收录高考指导等方面的内容，涵盖了高中全部教材知识点。

这套《丛书》与教材同步配套，知识要点精炼，释文简明确切，例证新颖翔实，论证深入浅出，内容全面丰富，重点突出，独树一帜，具有较强的实用性、指导性、权威性，是高中生最佳的辅导读物，也是高中教师、家长们备课和辅导时较好的参考材料。

我们希望广大的高中生、教师、家长会喜欢她、珍爱她，这将使您受益匪浅。

本《丛书》在编辑出版中，曾得到中共中央办公厅西苑出版社的大力支持、杨宪金社长兼总编辑的指导及编辑工作人员的热情帮助，谨在此表示衷心的感谢。由于编写时间仓促，缺点和疏漏是难免的，恳请广大读者、专家批评指正。

北京师范大学　　向佐初

巴　丹

目　　录

第一章　直线 ······ 2
第一节　有向线段、定比分点 ······ 2
一、教材精讲 ······ 2
二、思考和练习 ······ 11
第二节　直线的方程 ······ 14
一、教材精讲 ······ 14
二、思考和练习 ······ 26
第三节　两条直线的位置关系 ······ 29
一、教材精讲 ······ 29
二、思考和练习 ······ 48
综合复习 ······ 51
本章练习题、复习题答案 ······ 64
第二章　圆锥曲线 ······ 122
第一节　曲线和方程 ······ 123
一、教材精讲 ······ 123
二、思考和练习 ······ 138
第二节　圆 ······ 141
一、教材精讲 ······ 141
二、思考和练习 ······ 156
第三节　椭圆 ······ 159
一、教材精讲 ······ 159
二、思考和练习 ······ 181

第四节　双曲线……………………………………… 184
一、教材精讲 ……………………………………… 184
二、思考和练习 …………………………………… 210
第五节　抛物线……………………………………… 212
一、教材精讲 ……………………………………… 212
二、思考和练习 …………………………………… 230
第六节　坐标变换…………………………………… 233
一、教材精讲 ……………………………………… 233
二、思考和练习 …………………………………… 246
综合复习……………………………………………… 249
本章练习题、复习题答案 ………………………… 259
第三章　参数方程、极坐标 ……………………… 352
第一节　参数方程…………………………………… 353
一、教材精讲 ……………………………………… 353
二、思考和练习 …………………………………… 362
第二节　极坐标……………………………………… 365
一、教材精讲 ……………………………………… 365
二、思考和练习 …………………………………… 374
综合复习……………………………………………… 376
本章练习题、复习题答案 ………………………… 382
附录
【一】　综合水平自测试题………………………… 405
综合水平自测试题答案……………………… 414
【二】　高考试题选解及评析……………………… 427

平面解析几何

解析几何是数学的重要分支，产生于17世纪初叶。由于当时生产力水平的迅速发展，推进了自然科学和技术科学的进步，在这个过程中也必然提出了许多新的数学问题，囿于当时的数学方法还不能予以解决，从而导致解析几何的产生和发展。

解析几何的主要思想是用代数方法解决几何问题。法国数学家笛卡尔(1596—1650)是这个伟大转折的开拓者。恩格斯高度评价了笛卡尔的历史性作用说："数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就成为必要的了，……"(《自然辩证法》人民出版社236页)。从此，数学进入了一个崭新的领域。

中学《平面解析几何》研究的主要问题是在平面坐标系上：(1)根据已知条件求出表示平面曲线的方程；(2)通过方程研究平面曲线的性质并认识曲线图形。曲线和方程是本课程的两个最重要的概念和手段。解析几何开创了数和形两者结合的研究，从而解决了大量的实际问题，是进一步学习数学、物理及其他科学技术的基础。

中学《平面解析几何》包括直线、圆锥曲线、参数方程和极坐标三章。

第一章 直 线

内容及学习要求

1. 理解有向直线、有向线段概念，掌握两点距离公式、有向线段的定比分点和线段中点坐标公式，在解题中能熟练运用。

2. 理解直线的倾斜角和斜率概念，掌握过两点的直线的斜率的求法公式。

3. 熟练掌握根据已知条件确定适当的方程形式，求出直线方程，并能进行互化。

4. 熟练掌握两条直线平行、垂直的条件，并能灵活应用解决有关问题。

5. 掌握点到直线距离公式和两条直线所成角的公式。

6. 学会利用方程组讨论两条直线的位置关系。

第一节 有向线段、定比分点

一、教材精讲

(一)知识要点

1. 几个重要概念

有向直线。规定了正方向的直线叫做有向直线。

有向线段。规定了起点和终点的线段叫做有向线段。

以 A 为起点，B 为终点的有向线段就记为 AB。

有向线段的正负。如果有向线段在有向直线上或与有向直线平行且它们的指向相同，规定有向线段为正，反之为负。

有向线段的数量。由上述有向线段的正、负，连同有向线段的长度，这样所得的数，叫做有向线段的数量。有向线段的长度记为 $|AB|$，而有向线段 AB 的数量则记为 AB，显然 $AB=-BA$。

2. 两点间的距离

(1)数轴上有向线段 AB，若 A 点坐标为 x_1、B 点坐标为 x_2，则 AB 的数量公式是：

$$AB=x_2-x_1$$

(2)平面上任意两点 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ 的距离公式是：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

3. 线段的定比分点

(1)有向直线 l 上的一点 P，把 l 上的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成两条有向线段 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$，$\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$ 数量的比叫做点 P 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比。

用字母 λ 表示这个比值，即：

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$$

点 P 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 的定比分点。

(2)若有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的两个端点坐标分别为 $P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$，点 $P(x,y)$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 λ 时，点 P 的

坐标是：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\qquad(\lambda\neq-1)$$

(3)特别地，当点 P 是$\overline{P_1P_2}$中点时，$\lambda=1$。此时中点 $P(x,y)$的坐标公式成为：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

(二)重点难点提示

本章涉及的几个基本概念及计算公式，都是解析几何的基础重要概念，在以后教材展开的有关计算中常常基于这些概念及公式。如两点间距离公式，定比分点坐标计算公式，几乎无处不在，熟练掌握这两个公式的运用，无疑是本章的重点。

本章难点有两个。

一是对有向直线、有向线段概念的正确认识。由于初中平面几何讨论直线、线段时，只考虑它的位置和长度而不考虑它的方向，因而本节提出方向新概念，要认真、透彻弄清直线、线段的方向性及计算线段数量时的正负，不注意消除隐患，在后续学习中经常由于一个符号疏于考虑而造成全题皆错；

二是关于定比分点坐标公式的导出，证明过程比较繁复，但必须坚持分类清楚周到、循序渐进，再着重由 P 点是内分点($\lambda>0$)，讲到 P 点是外分点($\lambda<0$)，讲深讲透，最后统一公式。而线段中点公式只是定比分点公式的一个特例，即当 $\lambda=1$ 时，公式就得以简化。认识中点公式又可反过来加深对定比分点公式的理解，学习时正好利用这一认识过程。

（三）范例分析

例1. 已知 $P_1(-3,-6)$、$P_2(3,0)$两点，延长 P_2P_1 到 P，使$|P_1P|=\frac{2}{3}|P_1P_2|$，求点 $P(x,y)$的坐标。

解：此例求解，先应按题意作图，以助正确得解。（图1—1）

因为 P 在 P_2P_1 延长线上，

所以$|PP_2|=|PP_1|+|P_1P_2|$

$$=|PP_1|+\frac{3}{2}|PP_1|$$

$$=\frac{5}{2}|PP_1|$$

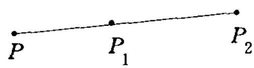

图1—1

$$\therefore\quad \frac{|PP_1|}{|PP_2|}=\frac{2}{5}$$

而 P 点是外分点，因而 $\lambda<0$

即：$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{2}{5}$

由分点坐标公式得：

$$x=\frac{-3+(-\frac{2}{5})\times 3}{1-\frac{2}{5}}=-7$$

$$y=\frac{-6+(-\frac{2}{5})\times 0}{1-\frac{2}{5}}=-10$$

于是求得 P 点坐标为$(-7,-10)$。

为了彻底搞清内外分点的情况，此例可考虑另一解法，对理解教材难点有很大好处。

另解：把 P_1 看成 PP_2 的内分点，则

$$\lambda=\frac{PP_1}{P_1P_2}=\frac{2}{3}$$

此时代入分点坐标计算公式应是：

$$-3=\frac{x+\frac{2}{3}\times 3}{1+\frac{2}{3}} \qquad 则\ x=-7$$

$$-6=\frac{y+\frac{2}{3}\times 0}{1+\frac{2}{3}} \qquad 则\ y=-10$$

即得 P 点坐标为$(-7,-10)$。

例 2. 求下列两点间的距离：

(1)$P_1(-2,3),P_2(-4,-5)$

(2)$A(ab^2,2abc),B(ac^2,0)$

解：(1)$|P_1P_2|=\sqrt{[-2-(-4)]^2+[3-(-5)]^2}$

$=\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

(2)$|AB|=\sqrt{(ab^2-ac^2)^2+(2abc)^2}$

$=\sqrt{a^2(b^4+2b^2c^2+c^4)}=|a|(b^2+c^2)$

说明：1. 由于$(x_1-x_2)^2=(x_2-x_1)^2$，所以，在计算两点距离时，已知两点中，哪一点作第一点，哪一点作第二点，是无关紧要的。如本例(1)，把点 P_2 作第一点，计算结果是$|P_2P_1|=|P_1P_2|$。

2. 本例(2)中结果 $\sqrt{a^2}=|a|$，注意 a 是 a^2 的算术根，线段距离无负值，稍有疏忽常犯错误。

例 3. 在 x 轴上求一点，与已知点 $A(5,12)$的距离为 13。

解：注意到所求点在 x 轴上，所以可以设所求点 P 坐标为 $(a,0)$，则

$$|AP|=13$$

由两点距离公式，有

$$\sqrt{(a-5)^2+12^2}=13$$

化简得：$a^2-10a=0, a(a-10)=0$

$\therefore a=0$ 或 $a=10$

因此所求点坐标为 $(0,0)$ 或 $(10,0)$。

注意，此题比较容易漏解，若解时作一草图，则比较直观地看清两解的几何位置。

例 4. 已知线段 AB，两端点坐标为 $A(3,-4)$ 和 $B(-9,2)$。

(1)在线段 AB 内求一点 P，使 $|AP|$ 是 $|AB|$ 的 $\frac{1}{3}$；

(2)在线段 AB 的延长线或反向延长线上求一点 Q，使 $|AQ|$ 是 $|AB|$ 的 $\frac{1}{3}$。

解：(1)P 是 AB 内分点，设 P 点坐标 (x_p,y_p)

$$|AP|=\frac{1}{3}|AB|，即 |AP|=\frac{1}{2}|PB|$$

$$\therefore \quad \lambda=\frac{AP}{PB}=\frac{1}{2}$$

故得：$x_p=\dfrac{3+\frac{1}{2}\times(-9)}{1+\frac{1}{2}}=-1$

$$y_P=\frac{-4+\frac{1}{2}\times 2}{1+\frac{1}{2}}=-2$$

即所求 P 点坐标是$(-1,-2)$。

(3)若 Q 在 AB 延长线上时，$|AQ|>|AB|$，不可能存在$|AQ|=\frac{1}{3}|AB|$，所以 Q 点只能在 AB 的反向延长线上，设 Q 点坐标(x_Q,y_Q)此时，$|AQ|=\frac{1}{4}|QB|$。

$$\therefore\quad \lambda=\frac{AQ}{QB}=-\frac{1}{4}$$

因此，$x_Q=\dfrac{3+(-\frac{1}{4})\times(-9)}{1-\frac{1}{4}}=7$

$$y_Q=\frac{-4+(-\frac{1}{4})\times 2}{1-\frac{1}{4}}=-6$$

故所求 Q 点坐标是$(7,-6)$。

例 5. 顶点是 $A(-1,1)$，$B(1,3)$，$C(-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$的三角形，试作出是哪一类三角形的判断。

解：我们先计算出三角形三边长，然后依此作出判断。

$$|AB|=\sqrt{[1-(-1)]^2+(3-1)^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$|AC|=\sqrt{[-1-(-\sqrt{3})]^2+[1-(2+\sqrt{3})]^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{2\sqrt{3}^2+2}$$

$$=2\sqrt{2}$$