弹性及塑性理論

下　册

应用力学教研組
蔣　詠　秋　編

西安交通大學

1962. 5

彈性及塑性理論

(下 册)

編輯者：西安交通大学应用力学教研組
蔣 詠 秋

發行者：西安交通大学教材供应科

印刷者：西安交通大学印刷厂

一九六二年五月第一版

印数：500册

彈性理論及塑性理

下册 目录

第十三章 彈性理論問題的复变函数解法……257

§13－1 复变函数……257

§13－2 平面应力及平面应变問題……258

§13－3 边界条件……263

§13－4 用极坐标解平面应力及平面应变問題……265

§13－5 对于带有圓孔的无限平板的解……266

§13－6 在无限平面的一点作用有集中力和力偶……270

§13－7 圓板周边受有部分均匀径向压力……272

§13－8 圓环的解……275

§13－9 用保角映象法解有椭圓孔的~~无限平板~~……278

§13－10 用保角映象法解扭轉問題……282

第十四章 彈性理論問題的变分解法……287

§14－1 最小能原理——位移形式（~~最小势能原理~~）……287

§14－2 最小能原理——应力形式（最小余能原理）……291

§14－3 平面問題的变分法……294

§14－4 杆件横向弯曲及扭轉的变分法……298

§14－5 端利——李滋法……301

§14－6 用端利——李滋法解扭轉問題……302

§14－7 用端利——李滋法解平面問題……306

§14－8 伽辽金法……308

§14－9 互換定理及卡氏定理……310

第十五章 用有限差分法解彈性理論問題……315

§15－1 有限差分……315

§15－2 有限差分方程……317

§15－3 用有限差分法解扭轉問題……319

§15－4　松弛法……………………………………………… 322
§15－5　块状松弛法…………………………………………… 325
§15－6　用有限差分法解截面为复連通的柱体扭轉問題…… 327
§15－7　曲綫边界……………………………………………… 328
§15－8　有限差分法解平面問題……………………………… 331

第十六章　固体中彈性波的傳播……………………………… 336

§16－1　运动微分方程………………………………………… 336
§16－2　无限彈性介質中的集散波和畸变波………………… 336
§16－3　无限彈性介質中的平面波…………………………… 339
§16－4　无限彈性介質中的球面波…………………………… 343
§16－5　表层波（端利波）…………………………………… 344

第十七章　薄板問題…………………………………………… 349

§17－1　基本概念及假設……………………………………… 349
§17－2　薄板弯曲的基本方程………………………………… 350
§17－3　薄板的边界条件……………………………………… 353
§17－4　簡支矩形薄板的弯曲………………………………… 355
§17－5　四边固定支承矩形板的弯曲．瑞利－李磁法……… 358
§17－6　用有限差分法計算薄板……………………………… 362
§17－7　圓形薄板的弯曲……………………………………… 366
§17－8　矩形板的伸縮与弯曲的联合作用…………………… 370
§17－9　薄板的大撓度問題…………………………………… 374

第十八章　薄壳問題…………………………………………… 379

§18－1、基本概念及假設……………………………………… 379
§18－2　薄壳的平衡方程式…………………………………… 380
§18－3　薄壳的应变分量和位移分量………………………… 385
§18－4　薄壳的应力与应变的关系…………………………… 389
§18－5　圓柱薄壳的一般理論………………………………… 391
§18－6　承受对称載荷的圓柱壳……………………………… 393
§18－7　承受非对称載荷的柱形壳体………………………… 397

§18－8　任意形状的旋轉壳的无矩理論……………………………… 399
§18－9　圓柱壳体的无矩理論……………………………………………… 404

第二部分　塑性理論

第十九章　引論………………………………………………………… 407

§19－1　基本物理概念………………………………………………………… 407
§19－2　塑性变形的机构……………………………………………………… 409
§19－3　塑性理論的一些基本实驗資料…………………………………… 411
§19－4　应力状态的进一步研究…………………………………………… 413
§19－5　莫尔应力圓和罗代参数…………………………………………… 418

第十二章　初始屈伏条件和应用………………………………………… 422

§20－1　屈雷斯加屈伏准則………………………………………………… 422
§20－2　屈伏准則的几何表示法…………………………………………… 424
§20－3　密悉斯屈伏准則…………………………………………………… 427
§20－4　屈伏准則的实驗驗証……………………………………………… 429
§20－5　屈伏准則的一般性的理論分析…………………………………… 432
§20－6　薄圓环……………………………………………………………… 433
§20－7　轉盘………………………………………………………………… 438
§20－8　梁的弯曲…………………………………………………………… 442

第二十一章　塑性应力与应变关系……………………………………… 447

§21－1　一般概念…………………………………………………………… 447
§21－2　加載和卸載………………………………………………………… 447
§21－3　形变塑性理論（小彈－塑性变形理論）………………………… 449
§21－4　小彈－塑性变形理論的基本方程………………………………… 460
§21－5　塑性变形功和加載准則…………………………………………… 460
§21－6　增量理論（流动理論）…………………………………………… 464
§21－7　普朗脫——劳埃斯理論…………………………………………… 467
§21－8　汉盖——納載理論………………………………………………… 469
§21－9　滑移理論…………………………………………………………… 473

§ 21－10　几个塑性理論的比較……………………………………… 474

第二十二章　柱体的扭轉……………………………………………… 477

§ 22－1　彈性变形下柱体的扭轉……………………………………… 477
§ 22－2　全部塑性的柱体扭轉——沙堆比拟…………………………… 478
§ 22－3　部分塑性的柱体扭轉——薄膜屋頂比拟……………………… 480
§ 22－4　圓柱体的部分塑性扭轉問題………………………………… 481

第二十三章　硬化材料的平面問題…………………………………… 483

§ 23－1　硬化材料的平面問題………………………………………… 483
§ 23－2　受有內压的厚壁筒…………………………………………… 483
§ 23－3　轉盘…………………………………………………………… 487

第二十四章　理想剛塑性的平面应变問題…………………………… 495

§ 24－1　基本概念……………………………………………………… 495
§ 24－2　平面应变方程………………………………………………… 496
§ 24－3　特征綫（滑移綫）…………………………………………… 499
§ 24－4　滑移綫的几何性质…………………………………………… 504
§ 24－5　边界条件……………………………………………………… 509
§ 24－6　滑移綫的几种基本解及数值积分法………………………… 513
§ 24－7　半无限平面体的剛性冲模…………………………………… 516

第二十五章　結构的塑性分析和极限設計…………………………… 520

§ 25－1　基本概念……………………………………………………… 520
§ 25－2　超靜定桁架的塑性分析及极限破損載荷…………………… 520
§ 25－3　靜定梁的塑性分析及极限破損載荷………………………… 522
§ 25－4　連續梁的塑性分析及极限破損載荷………………………… 525
§ 25－5　用虛功原理求极限破損載荷………………………………… 527
§ 25－6　剛架的极限破損載荷………………………………………… 527
§ 25－7　超靜定結构的內力重分布及其在鋼筋混凝土結构
　　　　設計中的实踐意义…………………………………………… 529
人名对照表…………………………………………………………………… 531

第十三章　彈性理論問題的复变函数解法

§13－1　复变函数

許多彈性理論問題用复变函数来解，在数学上会得到很大的方便。在这一章中，我們將討論平面問題和柱体扭轉的复变函数解法。在第六章中，我們曾經用共軛函数来解柱体的扭轉，現在我們着重討論用保角映象法在柱体扭轉問題中的应用。

复变数 z 是由二个实变数 x 及 y 組成，它可以写成

$$z=x+iy$$

因此，复变数 z 可用 XY 平面內的 $A(x, y)$ 点来表示，图 13－1。x 軸称为实軸，y 軸称为虛軸。为了方便，我們往往用极坐标表示复变数：

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

从图 13－1 显然可以看出，复变数 z 可用矢量 OA 来表示。用矢量 OA' 表示的复变数为

$$\overline{z}=x-iy=r(\cos\theta-i\sin\theta)=re^{-i\theta}$$

式中 $\overline{z}$ 称为 z 的共軛复变数。因此

$$z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=r^2 \tag{13-1}$$

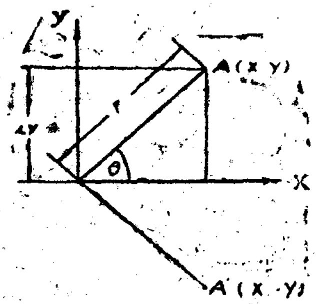

图 13－1

以复变数为自变数的函数称为复变函数，和复变数一样，也可以分为实部和虛部，即

$$f(z)=f(x+iy)=P(x, y)+iQ(x, y)$$

式中 P 及 Q 均为 x 和 y 的函数。

如果在域內所有点都是可导的，这样的函数 $f(z)$ 就称为解析函数。由 §6－5 我們知道解析函数 $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$ 在 $z=x+iy$ 的可导的必要条件为在这个点偏导数 $\frac{\partial P}{\partial x}$、$\frac{\partial P}{\partial y}$、$\frac{\partial Q}{\partial x}$、$\frac{\partial Q}{\partial y}$ 存在和滿足哥西—黎曼条件：

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{13-2}$$

为了消去(13－2)式中的Q，把第一式对x求导，第二式对y求导，然后相加，就得

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0$$

同样，由(13－2)消去P，得

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0 \tag{13-3}$$

由此可见，解析函数$f(z)$的实部$P(x, y)$及虚部$Q(x, y)$都是拉普拉斯方程的解。因为拉普拉斯方程又称調和方程，所以$P(x, y)$称为調和函数，$Q(x, y)$称为共軛調和函数，或者簡称共軛函数。

把复变函数$f(z)$中的i均用$-i$代替，就得到共軛复函数$\overline{f}(\overline{z})$，即

$$\overline{f}(\overline{z})=P(x, y)-iQ(x, y)$$

如果

$$f(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots\cdots \tag{13-4}$$

式中A_0、A_1、A_2……为复常数，则

$$\overline{f}(\overline{z})=\overline{A_0}+\overline{A_1}\overline{z}+\overline{A_2}\overline{z}^2+\cdots\cdots \tag{13-5}$$

式中$\overline{A_0}$、$\overline{A_1}$、$\overline{A_2}$……为A_0、A_1、A_2……的共軛复系数。

至于$\overline{f}(z)$和$f(\overline{z})$是用来代表另外二个函数：

$$\overline{f}(z)=\overline{A_0}+\overline{A_1}z+\overline{A_2}z^2+\cdots\cdots \tag{13-6}$$

$$f(\overline{z})=A_0+A_1\overline{z}+A_2\overline{z}^2+\cdots\cdots \tag{13-7}$$

§13－2 平面应力及平面应变問題

从第八章中我們知道，平面应力和平面应变問題的解可归納为应力函数$\varphi(x, y)$的决定，当体力不考虑时，$\varphi(x, y)$必須滿足双調和方程

$$\nabla^4\varphi=0 \tag{13-8}$$

或写成 $$\nabla^2\nabla^2\varphi=0$$

令 $$p=\nabla^2\varphi \tag{13-9}$$

则 $$\nabla^2 p=0 \tag{13-10}$$

如果q是p的共軛函数，则

$$f_1(z)=p+iq \tag{13-11}$$

是一个解析函数，这个函数对 z 的积分就成为另一个解析函数。

令
$$F(z)=P+iQ=\frac{1}{4}\int f_1(z)dz \tag{13-12}$$

则

$$F'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{4}f_1(z)=\frac{1}{4}(p+iq)$$

因此，

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{4}P \tag{13-13}$$

应用(13-3)及(13-13)，不难証明

$$\nabla^2(xP+yQ)=2\frac{\partial P}{\partial x}+2\frac{\partial Q}{\partial y}=P \tag{13-14}$$

以(13-9)代入上式，我們有

$$\nabla^2(\varphi-xP-yQ)=0$$

因此函数$(\varphi-xP-yQ)$是一个調和函数，我們用 P_1 来代表它，这样，应力函数 φ 可表达为

$$\varphi=xP+yQ+P_1 \tag{13-15}$$

(13-15)式中的应力函数 φ 可以写成几种不同的形式。我們引进一个新函数

$$\chi(z)=P_1+iQ_1 \tag{13-15}$$

式中 Q_1 是 P_1 的共軛函数。注意到

$$\bar{z}F(z)=(x-iy)(P+iQ)=(xP+yQ)+i(xQ-yP)$$

因此我們可写成

$$\varphi=Re[\bar{z}F(z)+\chi(z)] \tag{13-16}$$

式中記号 Re 代表有关函数的实部。如果我們把 $F(z)$ 及 $\chi(z)$ 的共軛复变函数依次用 $\overline{F}(\bar{z})$ 和 $\overline{\chi}(\bar{z})$代表，則

$$\overline{F}(\bar{z})=P-iQ,\quad \overline{\chi}(\bar{z})=P_1-iQ_1$$

因此(13-16)式可以写成

$$\varphi=\frac{1}{2}\left[\bar{z}F(z)+z\overline{F}(\bar{z})+\chi(z)+\overline{\chi}(\bar{z})\right] \tag{13-17}$$

从(13-16)及(13-17)可見，应力函数可用二个适当选擇的解析函数来表示。

現在我們来把位移和应力分量变成这些解析函数的表达式，首先研究

不考虑体力的平面应力問題。以(8－49)代入(8－29)式，我們有

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)=\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)\\
\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}=-\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}
\end{aligned}\right\}\tag{13-18}
$$

注意到

$$p=\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\text{ 及 }\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{4}p$$

从(13－18)的前二式我們得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E}\left[\left(p-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]=\frac{1}{E}\left[4\frac{\partial P}{\partial x}-(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right]$$

及

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{E}\left[4\frac{\partial Q}{\partial y}-(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right]$$

积分后得到

$$
\left.\begin{aligned}
u&=\frac{1}{E}\left[4P-(1+\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g_1(y)\right]\\
v&=\frac{1}{E}\left[4Q-(1+\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+g_2(x)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{13-19}
$$

式中 $g_1(y)$ 及 $g_2(x)$ 依次是 y 及 x 的任意函数。把(13－19)代入(13－18)的第三式，我們得

$$4\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-2(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{dg_1}{dy}+\frac{dg_2}{dx}$$

$$=-2(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

以(13－2)的第二式代入上式，我們得

$$\frac{dg_1(y)}{dy}+\frac{dg_2(x)}{dx}=0$$

因此，

$$\frac{dg_1(y)}{dy}=-\frac{dg_2(x)}{dx}=C$$

式中 C 为常数。

积分后得

$$g_1=cy+c_1, \qquad g_2=-cx+c_2 \tag{13-20}$$

式中 c, c_1, c_2 为常数。从(13-19)及(13-20)二式可以看出，g_1 及 g_2 只表示物体的刚性位移，不产生任何应变，因此可以从(13-19)式中略去。这样，我們得到位移分量的表达式为

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{E}\left[4P-(1+\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\\ v&=\frac{1}{E}\left[4Q-(1+\nu)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\end{aligned}\right\} \tag{13-21}$$

从(13-21)式可得

$$u+iv=\frac{1}{E}\left[4(P+iQ)-(1+\nu)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] \tag{13-22}$$

注意到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial \bar{z}}{\partial x}=1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=i, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}=-i$$

从(13-17)式，我們有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{2}[\bar{z}F'(z)+F(z)+z\overline{F'}(\bar{z})+\overline{F}(\bar{z})+\chi'(z)+\overline{\chi'}(\bar{z})]$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{i}{2}[\bar{z}F'(z)-F(z)-z\overline{F'}(\bar{z})+\overline{F}(\bar{z})+\chi'(z)-\overline{\chi'}(\bar{z})]$$

因此得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=F(z)+z\overline{F'}(\bar{z})+\overline{\chi'}(\bar{z}) \tag{13-23}$$

以(13-12)及(13-23)代入(13-22)，我們有

$$u+iv=\frac{3-\nu}{E}F(z)-\frac{1+\nu}{E}(z\overline{F'}(\bar{z})+\overline{\chi'}(\bar{z})] \tag{13-24}$$

如果函数 $F(z)$ 和 $\chi(z)$ 已知，就可根据(13-24)式求出位移分量。对于平面应变問題，只要把(13-21)和(13-24)式中的 E 换成 $\frac{E}{1-\nu^2}$，ν 换成 $\frac{\nu}{1-\nu}$，就可得相应的公式。它們是

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1-\nu^2}{E}\left[4P-\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\\ v&=\frac{1-\nu^2}{E}\left[4Q-\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\end{aligned}\right\} \tag{13-25}$$

$$u+iv=\frac{(1+\nu)(3-4\nu)}{E}F(z)-\frac{1+\nu}{E}[z\overline{F'}(\bar{z})+\overline{\chi'}(\bar{z})] \quad (13-26)$$

現在考察应力分量。以(13－17)代入(8－49)，并注意到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}$$

及
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial y}=i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right)$$

我們得

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=i^2\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^2\varphi=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^2}\\
&=\frac{1}{2}\Big\{-\bar{z}F''(z)-z\overline{F''}(\bar{z})+2[(F'(z)+\overline{F'}(\bar{z})]\\
&\qquad-\chi''(z)-\overline{\chi''}(\bar{z})\Big\}\\
\sigma_y&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^2}\\
&=\frac{1}{2}\Big\{\bar{z}F''(z)+z\overline{F''}(\bar{z})+2[F'(z)+\overline{F'}(\bar{z})]+\\
&\qquad+\chi''(z)+\overline{\chi''}(\bar{z})\Big\}\\
\tau_{xy}&=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=-i\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{z}^2}\right]\\
&=-\frac{1}{2}i\Big\{\bar{z}F''(z)+\chi''(z)-z\overline{F''}(\bar{z})-\overline{\chi''}(\bar{z})\Big\}
\end{aligned}\right\} \quad (13-27)$$

把(3－27)的第一及第二式相加，我們有

$$\sigma_x+\sigma_y=2F'(z)+2\overline{F'}(\bar{z})=4R_eF'(z) \quad (13-28)$$

显然，从(3－27)式，我們可得

$$\sigma_y-\sigma_x-2i\tau_{xy}=2[z\overline{F''}(\bar{z})+\overline{\chi''}(\bar{z})] \quad (13-29)$$

如果把(3－29)式兩端的 $-i$ 換成 i，我們就得

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}F''(z)+\chi''(z)] \quad (13-30)$$

如果函数 $F(z)$ 及 $\chi(z)$ 已知，根据 (13－28) 及 (13－30) 就可算出应力分量。

公式(13－24)、(13－28)、(13－30)是穆士海利什維利在柯罗索夫的研究基础上得出来的。

§13-3 边界条件

現在討論如何用复变函数来表示边界条件，进一步解决彈性理論平面問題。

假設在XY平面上有一曲綫AB，它的法綫方向是N，如图13-2所

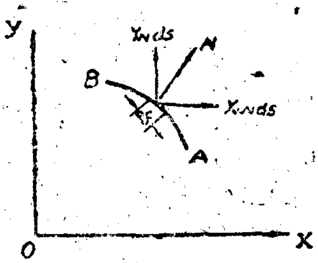

图 13-2

示。在曲綫AB上有一小段ds，上面作用力$X_N ds$和$Y_N ds$，它們作用在法綫正向的一側。我們有

$$\left.\begin{aligned}X_N &= \sigma_x \cos(N,x) + \tau_{xy}\cos(N,y)\\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cos(N,x) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cos(N,y)\\ Y_N &= \tau_{xy}\cos(N,x) + \sigma_y\cos(N,y)\\ &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cos(N,x) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos(N,y)\end{aligned}\right\} \qquad (13-31)$$

但是，

$$\left.\begin{aligned}\cos(N,x) &= \frac{dy}{ds}\\ \cos(N,y) &= -\frac{dx}{ds}\end{aligned}\right\} \qquad (13-32)$$

把(13-32)代入(13-31)，我們得

$$\left.\begin{aligned}Y_N &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\\ Y_N &= -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (13-33)$$

因此，作用在曲綫AB上合力的分量为

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \int_A^B X_N ds = \int_A^B \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) ds = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_A^B \\ F_y &= \int_A^B Y_N ds = -\int_A^B \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) ds = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_A^B \end{aligned}\right\} \quad (13-34)$$

式中$[\quad]_A^B$表示括弧中函数的数值在B和A之差。

把(13－33)写成复变函数的形式，我們有

$$(X_N + iY_N)ds = -id\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \quad (13-35)$$

应用(13－23)式的結果，得

$$(X_N + iY_N)ds = -id[F(z) + z\overline{F'}(\bar{z}) + \overline{\chi'}(\bar{z})] \quad (13-36)$$

积分后，得作用在AB綫段上的合力

$$\int_A^B (X_N + iY_N)ds = F_x + iF_y = -i[F(z) + z\overline{F'}(\bar{z}) + \overline{\chi'}(\bar{z})]_A^B \quad (13-37)$$

在AB綫段上，对于座标原点的合力矩为

$$M = \int_A^B (xY_N ds - yX_N ds) = -\int_A^B \left[xd\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + yd\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] \quad (13-38)$$

部分积分后，得

$$M = -\left[x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]_A^B + [\varphi]_A^B \quad (13-39)$$

但是，

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Re\left[z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]$$

$$= Re\{z[\overline{F}(\bar{z}) + \bar{z}F'(z) + \chi'(z)]\}$$

同时由(33－16)式可知

$$\varphi = Re[\bar{z}F(z) + \chi(z)]$$

所以 $$M = Re[-z\bar{z}F'(z) + \chi(z) - z\chi'(z)]_A^B \quad (13-40)$$

(13－37)至(13－40)是首先由穆士海利什維利証明的。有了这些結果，我們便可得到用复变函数表示的边界条件。对于一个单連通区域而言，在边界上繞了一周后，A，B两点重合。因此，周界上作用的合力和合力矩应恒等于零，即

$$M = F_x = F_y = 0$$

这就是外力与外力矩静力平衡的表示。

§13－4　用极坐标解平面应力和平面应变問題

現在研究用极坐标解平面应力及平面应变問題。設 P 点在极坐标 r 及 θ 方向的位移分量依次为 v_r 及 v_θ，如图 13－3 所示。不难証明

$$\left.\begin{aligned} u &= v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta \\ v &= v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{13-41}$$

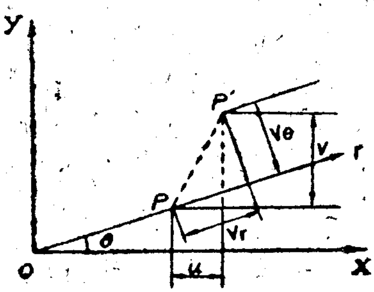

图 13－3

写成复变函数的形式，我們有

$$u+iv=v_r(\cos\theta+i\sin\theta)+iv_\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=(v_r+iv_\theta)e^{i\theta}$$

因此

$$v_r+iv_\theta=e^{-i\theta}(u+iv) \tag{13-42}$$

以(13－24)代入(13－42)，我們得平面应力問題位移分量关系式

$$v_r+iv_\theta=e^{-i\theta}(u+iv)=e^{-i\theta}\left\{\frac{3-\nu}{E}F(z)-\frac{1+\nu}{E}[z\overline{F}'(\bar{z})+\bar{\chi}'(\bar{z})]\right\} \tag{13-43}$$

如果以 $z=re^{i\theta}$ 和 $\bar{z}=re^{-i\theta}$ 代入(13－43)式的右端，并把实部和虚部分开，我們就得到极坐标表示的位移分量 v_r 和 v_θ。

为了得到用极坐标表示的应力分量的表达式，我們暂时把坐标軸 r 和 θ 依次作为 X' 和 Y' 軸。这样，

$$\sigma_r=\sigma'_x,\quad \sigma_\theta=\sigma'_y,\quad \tau_{r\theta}=\tau_{x'y'}$$

注意到

$$l_1=\cos\theta,\quad m_1=\sin\theta,\quad l_2=-\sin\theta,\quad m_2=\cos\theta,$$

从(2－23)式我們得到

$$\sigma_r=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta+2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$
$$\sigma_\theta=\sigma_x\sin^2\theta+\sigma_y\cos^2\theta-2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta$$
$$\tau_{r\theta}=(-\sigma_x+\sigma_y)\sin\theta\cos\theta+\tau_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

因此得

$$\sigma_r+\sigma_\theta=\sigma_x+\sigma_y$$
$$\sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta}=(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})e^{2i\theta}$$

以(13－28)及(13－30)代入上列二式，我們有

$$\sigma_r+\sigma_\theta=4ReF'(z)=2[F'(z)+\overline{F'}(\overline{z})] \qquad (13-44)$$
$$\sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta}=2[\overline{z}F''(z)+\chi''(z)]e^{2i\theta} \qquad (13-45)$$

从(13－44)中減去(13－45)，我們有

$$\sigma_\theta-i\tau_{r\theta}=F'(z)+\overline{F'}(\overline{z})-[\overline{z}F''(z)+\chi''(z)]e^{2i\theta} \qquad (13-46)$$

§13－5　对于带有圓孔的无限平板的解

我們把园孔中心选作坐标原点。根据园孔的边界条件，在 $z=ae^{i\theta}$，σ_r 及 $\tau_{r\theta}$ 一般是已知的，a 为园孔半徑。

解析函数 $F'(z)$ 及 $\chi''(z)$ 可展开成冪級数。因为当 $r\to\infty$，应力分量必須为有限值，从(13－44)及(13－46)可以看出当 $r=\infty$，这些函数也必須保持有限值。所以，这些函数必須有下列形式：

$$F'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^{-n}, \qquad \chi''(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^{-n} \qquad (13-47)$$

式中 A_n 及 B_n 为复常数。并且从(13－44)及(13－46)式还可以看出在无穷远处的应力取决于复常数 A_0 的实部及复常数 B_0。

把(13－47)式对 z 积分，我們得

$$\left.\begin{aligned}F(z)&=A_0z+A_1\log z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_nz^{-n+1}}{n-1}+C_1\\ \chi'(z)&=B_0z+B_1\log z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_nz^{-n+1}}{n-1}+C_2\end{aligned}\right\} \qquad (13-48)$$

式中 C_1 及 C_2 为复常数。注意到

$$\left.\begin{aligned}\overline{F'}(\overline{z})&=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{A_n}\,\overline{z}^{-n}\\ \overline{\chi'}(\overline{z})&=\overline{B_0}\,\overline{z}+\overline{B_1}\log\overline{z}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\overline{B_n}\,\overline{z}^{-n+1}}{n-1}+\overline{C_2}\end{aligned}\right\} \qquad (13-49)$$

以(13－48)第一式及(13－49)代入(13－43)，我們有

$$v_r+iv_\theta=e^{-i\theta}\Big[\frac{3-\nu}{E}\Big(A_0z+A_1\log z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_nz^{-n+1}}{n-1}+C_1\Big)-$$

$$-\frac{1+\nu}{E}\Big(\overline{A}_0z+r^2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\overline{z}^{-(n+1)}\Big)-$$

$$-\frac{1+\nu}{E}\Big(\overline{B}_0\overline{z}+\overline{B}_1\log\overline{z}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\overline{B}_n\overline{z}^{-n+1}}{n-1}+\overline{C}_2\Big)\Big] \qquad (13-50)$$

因为

$$z=re^{i\theta}$$

所以

$$\log z=\log r+i\theta$$

因此我們可以看出函数 $\log z$ 不是单值，因为圍繞园孔一周，θ 的值将从 θ_1 增为 $\theta_1+2\pi$。所以从(13－50)式知道圍繞园孔一周，v_r+iv_θ 将增加

$$2\pi ie^{-i\theta}\Big(\frac{3-\nu}{E}A_1+\frac{1+\nu}{E}\overline{B}_1\Big)$$

为了要使 v_r+iv_θ 单值，下列关系式必須成立：

$$(3-\nu)A_1+(1+\nu)\overline{B}_1=0$$

或

$$A_1=-\frac{1+\nu}{3-\nu}\overline{B}_1 \qquad (13-51)$$

因为在 $r=a$ 处应力分量 σ_r 和 $\tau_{r\theta}$ 是已知的，因此我們可以把 $(\sigma_r-i\tau_{r\theta})_{r=a}$ 展开成复数形式的富氏級数：

$$(\sigma_r-i\tau_{r\theta})_{r=a}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\theta} \qquad (13-52)$$

式中系数 C_n 可按下式决定

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sigma_r(\theta)-i\tau_{r\theta}(\theta)]_{r=a}e^{-in\theta}d\theta$$

$$n=0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \cdots\cdots \qquad (13-53)$$

以(13－47)及(13－52)代入(13－46)式，并注意到园孔圍界上 $r=a$，我們得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{a^n}e^{-in\theta}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{A}_n}{a^n}e^{in\theta}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nA_n}{a^n}e^{-in\theta}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{a^n}e^{-i(n-2)\theta}$$