交通运输职工六年一貫制业余学校教材

三角

陕西省交通厅 编

人民交通出版社

交通运輸职工六年一貫制业余学校教材

三　角

陕西省交通厅　編

*

人 民 交 通 出 版 社 出 版

（北京安定門外和平里）

北京市書刊出版業营業許可証出字第〇〇六号

新　华　書　店　发　行

人民交通出版社印刷厂印刷

*

1959年9月北京第一版　　1959年12月北京第2次印刷

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$　　印張：2$\frac{13}{16}$張

全書：51000字　　印数：4301—10300册

統一書号：K7044-3021

定价（5）：0.17元

前　言

[illegible]教材是根据党的教育方針和我厅政治、文化、技[illegible]合的六年一貫制“职工教育教学計划”編輯的。在內容安排上以結合生产突出本产业特点为主，并注意保持各門科学知識的系統性和適用性。全套教材共十七册，計：語文七册，算术一册，代数二册，几何二册，三角一册，物理二册，化学二册。要求脫盲职工学完这套課程后，在文化基础課方面达到相当高中或中等技术学校毕业水平，以适应当前生产及工作的需要，并为往后继續提高奠定基础。

編写教材是一項細致、复杂的工作。在党的領导下，我們虽然做了些調查研究以及到基层生产单位了解生产情况的工作，但由于我們的工作不够深入，未能把更多职工同志的要求反映到教材中来；再加上我們政治、文化水平的限制，其中缺点和錯誤定所难免，希大家提出批評和指正。

这套教材在編輯过程中得到不少单位的帮助，并承西安公路学院和陕西省交通学校审閱，又蒙人民交通出版社协助出版，特此表示謝意。

陕西省交通厅

1959年7月

几点説明

1.本書系参照工業中專、普通中学的三角課本和北京师范大学所編几何与三角教材編写的。全書共分六章，以密切結合交通运輸生产，重点突出的解三角形法为綱，同时講述了任意角三角函数，三角函数圖象，反三角函数及三角函数的恒等变換等成一系統的內容；將反三角函数排列在三角函数圖象之后，以加强系統性和便于理解；三角方程等与生产連系不大的章节，都不編入；同时，簡化了一些理論推导过程，以适合業余学校和成年人的特点，有助于理論結合实际，迅速提高。

2.本書的学習时間为60課时，具体安排如下：

第一章	銳角三角函数　直角三角形解法	16課时
第二章	弧与角的弧度制	4課时
第三章	任意角的三角函数　三角函数的圖象	14課时
第四章	反三角函数	2課时
第五章	加法定理，倍角及半角的三角函数	12課时
第六章	斜三角形的解法	12課时

上述时間安排包括作業时間在內，仅供教师参考。

目　录

第一章

銳角三角函数　直角三角形解法

§1　銳角三角函数的定义

如果鉗工同志要鏜一个边長为 a 的正多边形另件时，必需先求出用多大直徑的圓形材料；要知道一座山的高，就得測量山下基点对山頂的仰角；在我們的生活和工作中，許多这类問題，都要通过研究三角形边与角的关系，才能得到解决；現在我們就从研究直角三角形来着手解决这些問題。

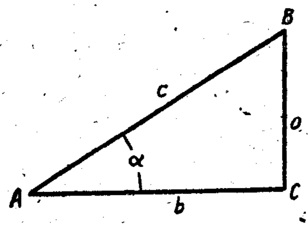

圖 1

在直角三角形 ABC 中（圖 1），$\angle C=90°$，分别用 a，b 和 c 表示 $\angle A$、$\angle B$ 和 $\angle C$ 的对边 BC、AC 和 AB 的長；对于已知銳角 α，我們給定下列定义。

1. 銳角 α 所对的直角边 a 与斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的正弦， 用記号 $\sin\alpha$ 来表示；即

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}.$$

2. 与銳角 α 相鄰的直角边 b 和斜边 c 的比值，叫做銳角 α 的余弦， 用記号 $\cos\alpha$ 来表示；即

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}.$$

3.锐角 α 所对的直角边 a 和与此角相鄰的直角边 b 的比值，叫做锐角 α 的正切，用記号 tgα 来表示；即

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}.$$

4.与锐角 α 相鄰的直角边 b 和此角所对的直角 a 的比值，叫做锐角 α 的余切，用記号 ctgα 来表示；即

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}.$$

5.斜边 c 和与锐角 α 相鄰的直角边 b 的比值，叫做锐角 α 的正割，用記号 secα 来表示；即

$$\sec\alpha=\frac{c}{b}.$$

6.斜边 c 和锐角 α 所对的直角边 a 的比值，叫做锐角 α 的余割，用記号 cosecα 来表示；即

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{c}{a}.$$

如果以 A 为圆心，AB 为半徑，作一个 $\frac{1}{4}$ 的圓(圖 2)。在这 $\frac{1}{4}$ 圓上，順次取 B、B'、B''……一些个点，并作 $B'C'\perp AC$ $B''C''\perp AC$……，那末 $CB<C'B'<C''B''<\cdots\cdots$；

又 $$AB=AB'=AB''=\cdots\cdots,$$

所以 $$\frac{CB}{AB}<\frac{C'B'}{AB'}<\frac{C''B''}{AB''}<\cdots\cdots。$$

即 $$\sin CAB<\sin C'AB'<\sin C''AB''<\cdots\cdots。$$

这就是說当 $\angle CAB(=\alpha)$ 增加时 $\sin\alpha$ 之值也随着增加，而且当 $\angle CAB$ 由 0° 增加到 90° 时，$\sin\alpha$ 之值由 0 增加到 1。

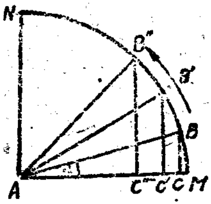

圖 2

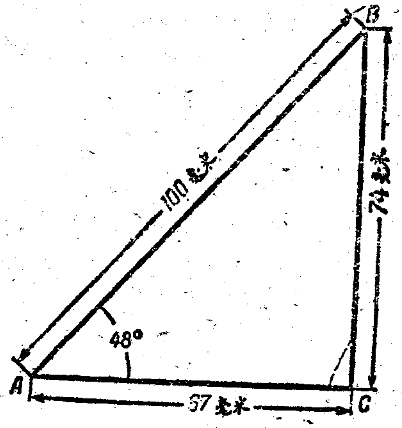

圖 3

同理可以看出当$\angle\alpha$由0°增加到90°时，$\cos\alpha$由1减少到0，$tg\alpha$由0起無止境地增加，$ctg\,\alpha$由無穷大减少到0，$\sec\alpha$由0增加到1，$cosec\alpha$由1减少到0。

因此可知：当$\angle\alpha$变化时，$\angle\alpha$的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割也随着变动，所以$\angle\alpha$的正弦，余弦、正切、余切、正割、余割都是$\angle\alpha$的函数，統称为三角函数。

由于$\sec\alpha$和$cosec\alpha$应用較少，所以以后我們只主要地研究$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$tg\alpha$和$ctg\alpha$四个函数。

例 1 用直接度量法求角$\alpha=48^\circ$的正弦、余弦，正切和余切的近似値。

解： 用直尺、圆規和量角器，作出直角三角形ABC，使$\angle A=48^\circ$，为了計算上的方便，取$AB=100$毫米（圖3的比例是2:1），由圖3上可以直接量得：

$BC\approx74$毫米，

$AC\approx67$毫米，

所以 $\sin 48^\circ \approx \frac{74}{100} = 0.74;$

$$\cos 48^\circ \approx \frac{67}{100} = 0.67;$$

$$\mathrm{tg}\,48^\circ \approx \frac{74}{67} = 1.1;$$

$$\mathrm{ctg}48^\circ \approx \frac{67}{74} = 0.90.$$

例 2 已知$\sin\alpha = \frac{3}{4}$，求作銳角 α。

解: 在任意直綫上取綫段 $DE = 3$(圖 4）。

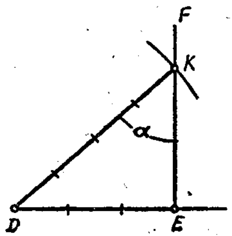

圖 4

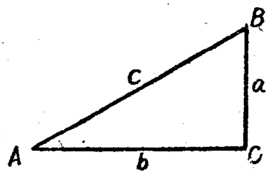

圖 5

过 E 点作直綫 $EF \perp DE$。

以 D 点为中心 用等于 4 的半徑 画弧交 EF 于 K。 連接 DK。

因为 $\sin\angle EKD = \frac{DE}{DK} = \frac{3}{4}$，所以$\angle EKD$就是所求的銳角 α。

例 3 直角三角形 ABC 的斜边長 $AB = 15$ 毫米， 一直角边長 $AC = 12$ 毫米，求另一直角边 CB 所对銳角的三角函数。

解: 如圖 5， $c = 15$，$b = 12$，

由勾股定理: $a^2 = c^2 - b^2$，

所以 $a=9$.

于是得 $\sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$;

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}A=\frac{b}{a}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}.$$

§ 2 同一銳角三角函数間的关系

取任意銳角 α。作出直角三角形 ABC，使 $\angle A=\alpha$(圖 6)。設 $BC=a$，$CA=b$ 和 $AB=c$。

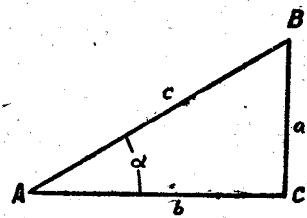

圖 6

1. 根据勾股定理：

$a^2+b^2=c^2$.

用 c^2 除上式兩端：$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$.

但 $\dfrac{a}{c}=\sin\alpha$，$\dfrac{b}{c}=\cos\alpha$;

所以 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

即 **一銳角的正弦和余弦的平方和等于 1。**

2. 由 $\dfrac{a}{c}:\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b}$ 和 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{b}$,

可得：$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

即 **一銳角的正切等于它的正弦和余弦之比。**

3.由 $\frac{b}{c}:\frac{a}{c}=\frac{b}{a}$ 和 $\text{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$,

可得: $$\text{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

即 **一銳角的余切等于它的余弦和正弦之比。**

4.由 $$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1,$$

可得: $$\text{tg}\alpha\cdot\text{ctg}\alpha=1;$$

即 **一銳角的正切和余切互为倒数。**

依据上面所述的同一銳角三角函数間的基本关系,可以証明三角恒等式;化簡三角函数的式子和根据銳角的一个三角函数計算此角的其余三角函数。

例 1 証明恒等式 $$\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\text{tg}\alpha-\text{ctg}\alpha.$$

証明: 左端 $=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\text{tg}\alpha-\text{ctg}\alpha=\text{右端}.$$

例 2 化簡: $$\frac{(1+\text{ctg}^2\alpha)\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha(1+\text{tg}^2\alpha)}.$$

解: 原式 $=\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\cos^2\alpha:\sin^2\alpha\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}:\frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

$$=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^4=\text{tg}^4\alpha.$$

例 3 已知 $\sin\alpha=\frac{20}{29}$,計算銳角 α 的其他函数值。

解： 从公式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

可得：$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{20}{29}\right)^2}$

$$=\sqrt{\frac{49\times9}{29^2}}=\frac{21}{29}；$$

又从公式 $$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}，$$

可得 $$\mathrm{tg}\alpha=\frac{20}{29}:\frac{21}{29}=\frac{20}{21}；$$

再从公式 $$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1，$$

可得 $$\mathrm{ctg}\alpha=1:\mathrm{tg}\alpha=1:\frac{20}{21}=\frac{21}{20}.$$

習 題 一

1. 用直接度量法求角 35° 的正弦、余弦、正切和余切的近似值（准确到 0.005）。

2. 用直接度量法求角 25° 和 65° 的正弦、余弦、正切和余切的近似值（准确到 0.005）。

3. 已知 $\cos\alpha=3/5$，求作銳角 α。

4. 已知 $\mathrm{tg}\alpha=3/2$，求作銳角 α。

5. 已知，$\mathrm{ctg}\alpha=1/6$，求作銳角 α。

6. 已知直角三角形的斜边为 205 毫米，銳角 α 的鄰边为 135 毫米，求銳角 α 的三角函数。

7. 已知直角三角形的一个直角边之長为 165 公厘，求另一直角边之長为 144 公厘所对之銳角 α 的三角函数。

8. 証明下列恒等式：

（1）$(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)\sin^2\alpha=1$。

（2）$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$。

(3) $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$。

(4) $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$。

9. 化簡 $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$。

10. 化簡 $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}$。$\left(\text{提示：}\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\right)$

11. 化簡 $(1+\sin\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin\alpha)$。

12. 由下列銳角 α 的已知函数值，計算其余各函数的值：

(1) a. $\sin\alpha=\frac{15}{17}$, b. $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, c. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{24}$, d. $\operatorname{ctg}\alpha=7$。

(2) a. $\sin\alpha=\frac{40}{41}$, b. $\cos\alpha=\frac{221}{229}$, c. $\operatorname{tg}\alpha=3$, d. $\operatorname{ctg}\alpha=K$。

§ 3　30°、45°和60°各角的三角函数値

1. 30°和60°的三角函数値　作直角三角形 ABC 使 $\angle A=30°$(圖 7)；那末另一角 B 一定等于 60°。根据几何定理知道：AB 的長等于 BC 長的二倍。設 $a=1$，則 $c=2$，$b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$。

于是得　　$\sin 30°=\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$；

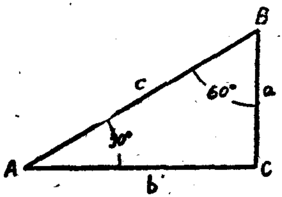

圖 7

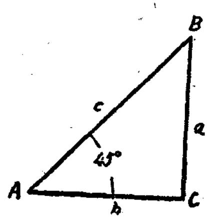

圖 8

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866;$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577;$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ=\sqrt{3}\approx 1.732\ .$$

同时也得 $$\sin 60^\circ=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866;$$

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}\approx 1.732;$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.577.$$

2. 45°角的三角函数值　作直角三角形ABC，使$\angle A=45^\circ$（圖8）。这样的三角形是等腰的，所以 $a=b$。設 $a=b=1$，則

$$c=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\ .$$

于是得 $$\sin 45^\circ=\frac{a}{c}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.707;$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707;$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ=\operatorname{ctg} 45^\circ=1.$$

上述30°、45°和60°角的三角函数值，常被称为特别角三角函数值，在实际工作中，經常要被用到；現在將它們的数值列入下表中，以便記忆。

函数 \ 角	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.577$	1	$\sqrt{3}\approx 0.732$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}\approx 1.732$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.577$

从上表中，我們可以看出銳角三角函数的以下变化规律：

$$\sin 30° < \sin 45° < \sin 60°;$$
$$\cos 30° > \cos 45° > \cos 60°;$$
$$\mathrm{tg}\, 30° < \mathrm{tg}\, 45° < \mathrm{tg}\, 60°;$$
$$\mathrm{ctg}\, 30° > \mathrm{ctg}\, 45° > \mathrm{ctg}\, 60°.$$

在这里我們再一次証明：**在銳角中，角越大，它的正弦与正切越大，但余弦与余切反愈小；也就是如果銳角增大时，它的正弦与正切也随着增大，但它的余弦与余切却反随着减小。**

§ 4 互余兩角的三角函数

如果直角三角形 ABC 中，一个銳角 $BAC=\alpha$，則另一个銳角是它的余角；因而 $\angle ABC=90°-\alpha$（圖 9）。

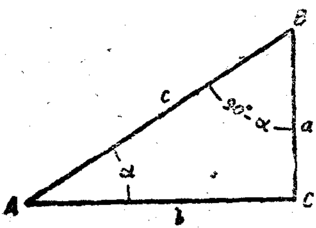

圖 9

从圖上可以明显看出：

$$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha;$$
$$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha;$$
$$\mathrm{tg}(90°-\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha;$$
$$\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=\mathrm{tg}\alpha.$$

这就是說：在互余的兩角中任一角的正弦，等于另一角的余弦；任一角的正切，等于另一角的余切。

例如：$\sin 30^\circ=\sin(90^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ$；

$$\cos(45^\circ+\alpha)=\sin(45^\circ-\alpha)；$$

$$\mathrm{tg}30^\circ=\mathrm{tg}(90^\circ-60^\circ)=\mathrm{ctg}60^\circ.$$

§5 三角函数表

在布拉基斯編的“四位数学用表”中的第Ⅷ、Ⅸ、Ⅹ三个表，都是三角函数表；我們可以从表里查得每相差1′的各銳角的正弦、余弦、正切和余切的近似值(含有四位有效数字)。

表的排列方法，是利用互为余角的三角函数間的关系的；因此在查一角的正弦和正切时，应当从左边的直行內和上端的横行中分别查出这个角的度数和分数；而在查余弦和余切时，則应从右边的直行內和下端的横行內分别查出这个角的度数和分数。

在利用Ⅷ、Ⅸ兩表各頁的最右边的三行查出函数的修正值的时候，应当依据銳角三角函数的变化規律来处理；例如 $\sin 22^\circ37'$ 的值，当在 $\sin 22^\circ36'$ 的值 0.3843 上加上修正值 0.0003 而得 0.3846；$\mathrm{tg}36^\circ52'$ 的值，应当从 $\mathrm{tg}36^\circ54'$ 的值 0.7508 里减去修正值 0.0009 而得 0.7499；但反过来 $\cos 11^\circ14'$ 的值，应当从 $\cos 11^\circ12'$ 的值 0.9810 里减去修正值 0.0001 而得 0.9809；$\mathrm{ctg}35^\circ47'$ 的值，应在 $\mathrm{ctg}35^\circ48'$ 的值 1.3865 上加上修正值 0.0009 而得 1.3874。

下面是查表求已知銳角的三角函数值的一些例子：

$\sin 56^\circ42'=0.8358$；$\sin 25^\circ8'=0.4247$；$\sin 72^\circ59'=0.9562$；

$\cos 67^\circ20'=0.3854$；$\cos 19^\circ46'=0.9411$；$\cos 43^\circ27'=0.7260$；

$\mathrm{tg}52^\circ19'=1.2946$；$\mathrm{tg}74^\circ52'=3.698$；$\mathrm{tg}86^\circ28'=16.20$；