

初中代数教学讲话

崔東伯編著

浙江人民出版社

初中代数教学讲话

崔东伯編著

浙江人民出版社

初中代数教学講話

崔东伯編著

✱

浙江人民出版社出版

杭州武林路万石里1号

浙江省書刊出版業營業許可證出字第001号

地方國營杭州印刷厂印刷·新華書店浙江分店發行

✱

開本787×1092 1/32 印張6 字數147,000

1957年5月第一版

1957年5月第一次印刷

印數：1—23,072

統一書号：13103·11

定 价：(7)五角五分

序

1956年4月，我國中小學教師訪蘇代表團，到杭州來進行傳達報告。報告中，肯定了蘇聯中學生的學習質量是很高的。代表團是從兩個方面作出這個結論的：一方面是訪蘇的時候，在實地參觀課堂教學中，親眼看到了蘇聯的中學生，回答教師的提問回答得很有系統又很全面，這說明蘇聯中學生對科學基本知識，是理解得很透徹的；另一方面，是從我國留蘇學生反映中，知道在蘇聯大學里，當應用到中學里所學過的知識的時候，蘇聯學生就能很快的回憶，很自然的应用，這說明蘇聯中學生所獲得的知識是很鞏固的。而我國留蘇學生，就需要看看中學的課本，然後才能應用。

訪蘇代表團，分析了蘇聯中學生學習質量很高的主要原因，是蘇聯中學教師的教學質量很高，而蘇聯中學教師教學質量很高的主要原因，是蘇聯中學教師的備課備得好；備課備得好的主要關鍵，又在於能夠理解教材，掌握教材和運用教材。

教材是課堂教學的物質基礎，要提高學生的學習質量，應先幫助教師提高教學質量，使他們能夠全面地掌握初中代數的教材內容，運用適當的教學方法來教好學生。這也就是編著這書的目的。

這本書是依據初中代數新教材體系的要求，加上我自己學習中學數學教學大綱（修訂草案）的體會及三十餘年的教學經驗編著成的。寫的時候盡量做到全面、透徹，有系統又有重點。主觀願望雖如此，但限於自己的水平，還可能有很多不夠妥當的地方，希望讀者多多指正。

在編著過程中，蒙沈保康、呂敏寅、沈儒全三位先生提供了很多寶貴的意見，我是十分感謝的；全書寫完后，又承毛路真教授詳細審閱，特此致謝。

崔東伯 1957年2月於杭州一中



第一章 緒言	(1)
第一節 初中代数教学的目的.....	(1)
第二節 实现初中代数教学目的的重要关键.....	(2)
第二章 初中代数教学中的两个基本性問題	(5)
第一節 含文字的算式.....	(5)
第二節 正負数.....	(10)
第三章 整式	(20)
第一節 單項式与多項式.....	(20)
第二節 單項式与多項式的四則运算.....	(21)
第四章 多項式的因式分解	(36)
第一節 多項式因式分解的各种基本情况.....	(36)
第二節 最高公因式.....	(42)
第三節 最低公倍式.....	(45)
第五章 代数分式	(49)
第一節 代数分式的基本性質.....	(49)
第二節 代数分式的四則运算.....	(57)
第六章 比例与比例关系	(67)
第一節 比例的主要性質.....	(67)
第二節 比例关系.....	(72)
第三節 比例与坐标軸.....	(73)
第七章 一元一次方程	(79)
第一節 恆等式与方程的概念.....	(79)
第二節 方程的性質与解法.....	(87)

第三節 應用問題	(101)
第四節 不等式	(112)
第八章 一次联立方程	(122)
第一節 二元一次联立方式	(122)
第二節 三元一次联立方程	(134)
第三節 應用問題	(141)
第九章 开方与二次方程	(149)
第一節 开方	(149)
第二節 二次方程	(166)

第一章 緒言

第一節 初中代數教學的目的

一、中學數學教學的目的

中學數學教學大綱（修訂草案）中指出：“中學數學教學的目的，是教給學生以數學的基礎知識，並且培養他們應用這種知識來解決各種實際問題所必需的技能和熟練技巧。

教師在講授數學的過程中，要以社會主義思想教育學生，要充分聯繫我國社會主義建設中各方面的成就與情況，以培養他們成為積極參加社會主義建設和保衛祖國的全面發展的新人。注意培養學生的辯證唯物主義的世界觀、愛國主義思想和民族自尊心以及愛科學、愛勞動、愛集體、守紀律的美德，並且鍛煉學生的堅強意志和性格”。

從中學數學教學大綱的指示中，我們体会到：中學數學教學中最主要的目的，是教給學生一系列的數學概念和知識，而這些數學概念和知識，應當具有正確的嚴格的體系，使學生所獲得的知識和他們所建立的概念能正確的聯繫起來，以發展學生的邏輯思維。

從中學數學教學大綱的指示中，我們又体会到：學生應該將所獲得的知識和熟練技巧，去解決各種實際問題，達到理論密切聯繫實際的目的。

從中學數學教學大綱中的指示我們更体会到：學校中的教學應具有教養的目的，培養學生尊重真理，熱愛真理，培養學生辯證唯物主義的世界觀，發展學生的想像力和注意力，發展學生在學習中和工作中的精確性和堅強的意志。

二、初中代数教学的目的

中学数学教学大纲(修订草案)中指出：“代数教学的目的，在于扩大学生关于数的概念，教会学生自觉地、迅速而又最合理地作出代数式的恒等变形，发展学生关于函数相依关系和它的图象的概念，教会学生列出方程和解方程，并且教会学生应用代数知识解答有关物理、化学、技术方面、农业方面的简单问题”。

从中学数学教学大纲中关于代数教学目的的指示，我们体会到，研究初中代数学有一个中心对象，就是代数方程，和由代数方程理论发展而来的一系列问题。

我们知道，数的概念在代数学中是比算术中扩大了。在代数学中，我们开始引用了负数。从数的发展史上来看，负数的产生，有时为了解方程的便利，例如： $-3x=6$ ，则 $x=\frac{6}{-3}=-2$ ，又如： $x+b=a$ ，如果 $a<b$ ，那末 $x=a-b$ ，就产生了负数。

代数式的恒等变形是解代数方程的必要知识。教会学生彻底理解代数式的恒等变形的理论，并在这理论的基础上，使学生具有正确的、熟练的代数式恒等变形的技能和技巧，不仅为解方程打下了良好的基础，同时也培养了学生运算正确的优良习惯。

由代数方程的理论发展，明确函数相依关系和函数的图象的概念，使学生理解数与形的相互联系。

应用代数知识解答有关物理、化学、技术方面，农业方面的简单问题，使学生能将所学到的代数知识，正确的应用到实际生活中去。

第二節 实现初中代数教学 目的的重要关键

1954年，浙江省中等学校初次试行了统一招生的办法。考试以后，教育厅召集了一个会议，专门研究统一招生的试题和试卷，

从学生的試卷中，我們歸納出学生所犯的錯誤有以下三方面：一是基本概念模糊不清；二是运算的錯誤很多；三是独立思考的能力很薄弱。同時我們也研究和分析了学生所以發生这三方面的錯誤，最基本和最主要的原因，是教师沒有起到应有的主導作用。的确，要教好学生，教师的主導作用是占着首要的地位的。

課堂教学是学校教育中最重要最基本的一环。所以要教好学生，教师必須上好每一堂課。要上好每一堂課，教师必須用最大的努力去備課，体会教学大綱的精神，鑽研教材，理解教材，熟悉教材，掌握教材，組織教材，再适当运用正确的教学方法，使学生能当堂理解。

中等学校自 1955 年度第一学期起，遵照中央教育部的指示，改变了学生成績考查和記分的办法，即采取着重平时考查和五級分制的苏联先進教学經驗。这是我國教育上的重大改革。因此教师就更應該重視提高課堂教学的質量，使学生能够当堂理解，减少他們在課外复習和課外作業时的困难和時間，減輕学生課業过重的負擔。今就備課問題和課堂教学問題提出几点意見，以供参考。

一、備課問題：

(一)教师对每堂課的教材應該深入的鑽研，徹底的理解。因为教材是課堂教学的物質基礎，教师必須掌握它的思想性、科学性和系統性。

(二)教师應該根据教学大綱的精神和指示，明确每堂課的教学目的和要求。

(三)教师在熟悉教材，掌握教材，明确目的要求之后，應該研究如何組織教材，运用适当的教学方法。要注意重点突出，要注意新旧教材的联系，并考慮在可能範圍中，如何从旧課引到新課，如何上好新課为下一堂課做好准备。

(四)如果要集体備課，應該在个人充分備課的基礎上進行，以便提出各人的意見，取人之長，补己之短，最后得出比較完善的結

論，訂出完整的課時計劃。

二、課堂教學問題：

(一)課堂教學如同一場戰鬥，決不能上無準備的課。在課堂教學中，應該抓緊每一秒的時間。講解時，要清楚、透徹、有條理、有重點，使學生完全听懂，達到當堂理解的目的。

(二)課堂教學如果進行得很好，就可使學生透徹理解所學的科学知識，減少課外復習和課外作業的困難，可使學生有更多的時間去鍛煉身體和參加各種活動，而收到全面發展的教育效果。

第二章 初中代数教学中的 两个基本性问题

第一節 含文字的算式

初中一年級，学过了算術，初中二年級，开始学习代数。从数学史上，我們知道代数学是在算術的基础上經過很長的时期發展而成的。不过代数学有一个特点，就是用文字代表数來研究数的运算的一般性質（这也是代数学中的一个优点）。所以研究含文字的算式，是初中代数学中的第一个基本性问题。因为使用文字代表数來表示数量的普遍关系，既能使学生从一羣日常生活事例中找出它們具有的共同性質，又能够培养学生的概括能力和抽象思維。所以在初中二年級开始講授代数学时，首先應該使学生明确：代数学是在算術的基础上發展而成的一种科学；用文字代表数的目的，是为了由数量間的特殊关系，引導出数量間的一般关系（物理学、化学上的許多公式，就是这样引導出來的）。这样，代数学就把数量間关系的应用，大大地推廣了。在講授含文字的算式时，应使学生明确两个問題：第一是含文字的算式的目的、意义和效用；第二是怎样計算含文字的算式。

一、含文字的算式的目的、意义和效用

例 1. 甲每小时行 2 里，6 小时行 $2 \times 6 = 12$ (里)

乙每小时行 8 里， $\frac{1}{2}$ 小时行 $8 \times \frac{1}{2} = 4$ (里)

在上面两个算術运算的基础上，关于匀速运动中的距离 (S)、速度 (V)、時間 (T) 三个数量間的关系式，我們在代数学中用下式表示：

$$S = V \cdot T \quad (1)$$

(1)式可以应用到任何匀速运动問題中間去。这样,从学生現有的算術知識出發,由数字的例子自然地引入用文字代替数字,得出含文字的算式。学生对这个問題的概念,就容易理解,也明确含文字的算式的重要性。同时,这类实际的問題,可以培养学生辯証唯物主义的观点,我們在教学过程中,应该十分注意。

例 2. 乘数的位置互换、其積不变

$$2 \times 3 = 3 \times 2;$$

$$\frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{7};$$

$$6 \times 0.4 = 0.4 \times 6.$$

若以文字 a 代表一个乘数, b 代表另一个乘数,就可以寫成下面的等式:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad (2)$$

推廣

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba.$$

例 3. 求 520 的 3% 是多少?

$$520 \text{ 的 } 1\% \text{ 是 } \frac{520}{100},$$

$$520 \text{ 的 } 3\% \text{ 是 } \frac{520}{100} \times 3 = 5.2 \times 3 = 15.6.$$

如果 a 代表任何数, $p\%$ 代表百分率,求 a 的 $p\%$ 是多少?

我們用 x 代表算得的百分数值,就得到下面含文字的算式:

$$x = a \cdot p\% \quad (3)$$

由(1)式 $S = V \cdot T$, 我們解决了匀速运动中的距离、速度、時間三个数量間的一般关系問題。在这三个数量中,已知任何二个数量,就能求得其余的一个数量。

由(2)式 $a \cdot b = b \cdot a$, 我們明确了乘数的位置互换其積不变的共同性質,以后在运算中,就可以应用这一个共同性質。

由(3)式 $x = a \cdot p\%$, 我們由已知的百分率,就能求任何数的百分数。

二、怎样計算含文字的算式

代数式是將文字（或数字与文字）用計算符号連接起來的式子。研究数的运算的一般規律，是代数的重要目的之一。代数学中，經常要应用算術里的加、减、乘、除的主要性質；并且从算術中的加、减、乘、除的主要性質，引導出代数学中运算的一般規律。代数式的变形法則，就是根据这些一般規律規定的。所以要計算含文字的算式，应使学生具备下列的数学知識。

（一）明确运算的基本性質：复習算術中有关数的运算的基本性質，使学生能用文字來表示这些性質，这种基礎知識很重要。在教学过程中，应使学生徹底理解，并能正确掌握，运用这些性質來化簡代数式，求出它們的值。

1. 加法：

（a）加法交換律：

$$3+5=5+3$$

公式

$$a+b=b+a$$

推廣 $a+b+c+\cdots+k=b+a+c+\cdots+k=c+a+b+\cdots+k$.

（b）加法結合律：

$$3+7+8=3+(7+8)=3+15=18$$

公式

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c).$$

$$(c) \quad 5+(8+7)=(5+8)+7=13+7=20.$$

公式

$$a+(b+c+d+\cdots+k)=a+b+c+d+\cdots+k$$

从这里知道：括弧前面是（+）号，去消括弧时，括弧里各項的符号不改变。

2. 减法：

$$(a) \quad 20-(5+8)=20-5-8=15-8=7$$

公式

$$a-(b+c+d+\cdots+k)=a-b-c-d-\cdots-k$$

从这里知道：括弧前面是（-）号，去消括弧时，括弧里各項的（+）号变为（-）号。

$$(b) \quad 8+(11-5)=8+11-5=14$$

公式 $a+(b-c)=a+b-c.$

从这里知道：括弧前面是(+)号，去消括弧时，括弧里的正项仍为正项，负项仍为负项。

$$(c) \quad 18-(9-5)=18+5-9=14$$

公式 $a-(b-c)=a+c-b$

从这里知道：括弧前面是(-)号，去消括弧时，括弧里的正项变为负项，负项变为正项。

3. 乘法：

(a) 乘法交换律：

$$4 \times 5 = 5 \times 4$$

公式 $a \times b = b \times a$

推廣 $a \cdot b \cdot c \cdots k = b \cdot a \cdot c \cdots k = c \cdot b \cdot a \cdots k.$

(b) 乘法結合律：

$$7 \times 3 \times 5 = 5 \times (3 \times 7) = 5 \times 21 = 105$$

公式 $a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c).$

$$(c) \quad 3 \times (5 \times 4) = (3 \times 5) \times 4 = 15 \times 4 = 60$$

公式 $a(b \cdot c \cdot d \cdots k) = \{[(ab)c]d\} \cdots k.$

$$(d) \quad (4 \times 2 \times 5) \times 3 = (4 \times 3) \times 2 \times 5 = 4 \times (2 \times 3) \times 5 \\ = 4 \times 2 \times (5 \times 3)$$

公式 $(a \cdot b \cdot c \cdots k)m = (a \cdot m)b \cdot c \cdots k = a \cdot (b \cdot m) \cdot c \cdots k.$

$$(e) \quad (5+3) \times 7 = 5 \times 7 + 3 \times 7$$

公式 $(a+b+c+\cdots+k)m = a \cdot m + b \cdot m + c \cdot m + \cdots + k \cdot m.$

$$(f) \quad (8-5) \times 4 = 8 \times 4 - 5 \times 4$$

公式 $(a-b)c = a \cdot c - b \cdot c.$

4. 除法：

$$(a) \quad \frac{30+12+5}{3} = \frac{30}{3} + \frac{12}{3} + \frac{5}{3} = 10+4+1\frac{2}{3}$$

公式 $\frac{a+b+c+\cdots+k}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \cdots + \frac{k}{m}.$

(b) $\frac{20-8}{5} = \frac{20}{5} - \frac{8}{5} = 4 - 1\frac{3}{5}$

公式 $\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$

(c) $(40 \times 12 \times 8) \div 4 = 10 \times 12 \times 8 = 40 \times 3 \times 8 = 40 \times 12 \times 2$

公式 $(a \cdot b \cdot c \cdots k) \div m = (a \div m)bc \cdots k$
 $= a \cdot (b \div m)c \cdots k.$

(d) $120 \div (2 \times 5 \times 3) = [(120 \div 2) \div 5] \div 3 = [60 \div 5] \div 3$
 $= 12 \div 3 = 4$

公式 $a \div (b \cdot c \cdot d \cdots k) = \{[(a \div b) \div c] \div d\} \div \cdots \div k$

(e) 若被除数与除数同时乘以(或除以)相同的数(除零外), 其商不变。如在 $8 \div 3 = \frac{8}{3}$ 中, 設用 5 乘被除数与除数, 則

$$(8 \times 5) \div (3 \times 5) = \frac{8 \times 5}{3 \times 5} = \frac{8}{3}.$$

如在 $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3 \times 6}{4 \times 5}$ 中, 設用 $\frac{2}{7}$ 乘被除数与除数, 則

$$\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}\right) \div \left(\frac{5}{6} \times \frac{2}{7}\right) = \frac{3 \times 2}{4 \times 7} \div \frac{5 \times 2}{6 \times 7} = \frac{3 \times 2 \times 6 \times 7}{4 \times 7 \times 5 \times 2} = \frac{3 \times 6}{4 \times 5}.$$

所以, 不論 a, b 与 m 代表任何数(b 与 m 不能为零), 則

$$am \div bm = a \div b \text{ 或 } \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

(二) 要掌握計算的順序:

在代数学中, 進行計算的順序規定是: 首先乘方与开方, 然后再乘除, 最后是加減。这一个規定, 在教学过程中, 一定要使学生很好的掌握, 才能达到运算正确的要求。如果根据問題的条件, 需要將計算順序加以特殊的規定, 則可使用小括弧()、中括弧[] 或大括弧{ }。加括弧后的計算順序, 一般是先求小括弧里的数,

次求中括弧里的数,最后求大括弧里的数。

(三)理解符号的意义:

1. 运算符号表示数量間是如何关联的。

如: $1+2$ 表示 1 与 2 相加。 $a+b$ 表示 a 与 b 相加。

2. 关系符号(等式或不等式)表示数量間的一定关系。

如: $3>2$ 表示 3 比 2 大; $a-b=1$, 表示 a 比 b 大 1。

在講授計算含文字的算式时,我們應該使学生很好的掌握运算的基本性質、計算的順序与符号的意义。

如此在理解和掌握基本概念的基础上,才可以达到运算的正确,运算技巧的熟練,和学生邏輯思維的發展。

第二節 正負数

一、負数的起源和引用:

在算術运算中,我們不可能从較小的数减去較大的数,例如 2 减 3。从較小的数减去較大的数之所以不可能,是因为我們把数的自然序列,僅向一边是無窮的,例如 1, 2, 3, 4, 5……;如果从 8 开始依次减 1, 則得下列各数:

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,

再减下去,就得到“什么也沒有”,我們把这“什么也沒有”也当作一个数,称之为零,用符号“0”來表示。如果我們繼續的这样减下去,就得到一些新的数,用 -1 , -2 , -3 , -4 , -5 , 等等來表示。这些数叫做負整数,前面的負号表示依次减 1 而產生負数的。所以 -1 , -2 , -3 , -4 , -5 等等前面的符号,称为“量的符号”,以区别于减法符号。减法符号称为“运算符号”。

負整数的引用,產生了負分数的引用。例如: $0-5=-5$, 則

$$0-\frac{2}{7}=-\frac{2}{7}(\text{負分数}).$$

在算術中所討論的数和負数的意义恰恰相反,叫做正数。

在我們实际生活中，具有相对意义的数量，例如：

零上的温度与零下的温度

东 向 与 西 向

收 入 与 支 出

胜 利 与 失 败

盈 余 与 亏 损

財 产 与 負 債

0(零)不算正数也不算負数， $+0$ ， -0 ，和不加符号的 0，都是同等的。

正数本身称做正数的绝对值，0 也在內。例如：

$$|+5|=5, \quad |0|=0.$$

負数的绝对值，是将負数的符号(−)变换为相反的符号(+)所得到的正数。 -5 的绝对值是 $+5$ ，也就是 5。例如：

$$|-5|=5.$$

二、正負数的运算規則：

在講授正負数的运算規則之前，要使学生能够利用数軸，認識形与数的一致性，加強对正負数的理解。

正負数可在同一直綫上，用点表示出來。确定原点为 0，并規定原点右方的点表示正数，原点左方的点表示負数，这样的直綫叫做“数軸”。

正負数和分数与零，統称为有理数，凡有理数可以寫成有限小数或無限循环小数的形式。反过來講，有限小数和無限循环小数都可化成有理数。故有限小数和無限循环小数都屬於有理数，無限不循环小数是無理数。任何有理数和無理数都可为正数或負数。有理数和無理数統称为实数。

今將正負数的运算規則，分述如下：

(一)加法：

1. 具有同样符号的兩数相加时，用它們的绝对值相加，并在