成人药学高等学历教育(专科)系列教材

高等数学

沈阳药科大学组织编写

主编 闫心丽

中国医药科技出版社

成人药学高等学历教育（专科）系列教材

高等数学

主　编　闫心丽

编　委　（以姓氏笔画为序）

王　贺　刘艳杰　闫心丽

张晓萍　姜希伟　胡忠盛

项荣武

中国医药科技出版社

内 容 提 要

本书内容包含函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、向量与空间解析几何、多元函数的微分法、重积分与对坐标的曲线积分、无穷级数等内容。

本书在每节后配有一定数量的习题。在每章后备有小结。书末附有习题答案、初等数学常用公式和积分表。

本书是针对药学院校专科的教学要求编写的，力求对基本概念和基本方法讲解清楚，由浅入深，通俗易懂，便于自学。对定理的阐述与证明，着重于几何直观解释，而不强调冗长的数学推导。

本书也可作为理工科学校本科少学时、业余大学或函授大学的教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/闫心丽主编. —北京：中国医药科技出版社，2006.12

（成人药学高等学历教育（专科）系列教材）

ISBN 7-5067-3571-7

Ⅰ.高... Ⅱ.闫... Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 153617 号

美术编辑 陈君杞
责任校对 张学军
版式设计 郭小平

出版 中国医药科技出版社
地址 北京市海淀区文慧园北路甲 22 号
邮编 100082
电话 010-62244206
网址 www.cspyp.cn www.mpsky.com.cn
规格 787×1092mm 1/16
印张 19 3/4
字数 445 千字
印数 1—4000
版次 2006 年 12 月第 1 版
印次 2006 年 12 月第 1 次印刷
印刷 三河富华印刷包装有限公司
经销 全国各地新华书店
书号 ISBN 7-5067-3571-7/G·0540
定价 30.00 元

目录

第一章

函　数

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为主要研究对象。所谓函数就是变量之间的对应关系，本章介绍函数的基本概念，以及它们的一些性质。

第一节　函数概念

一、区间

在数轴上介于二实数 a，b 之间的全体实数的集合，称为区间。其中：满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的集合称为**开区间**，用 (a, b) 表示。满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的集合称为**闭区间**，用 $[a, b]$ 表示。满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的一切实数的 x 的集合称为**半开区间**，分别记为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$。其中实数 a、b 称为区间的端点，$b-a$ 为区间长度。

这些区间的长度 $b-a$，都是一个有限数值，所以把它们统称为**有限区间**。

类似地，全体实数 R 即满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的全体实数的集合，我们也可用区间的形式来表示，记为 $(-\infty, +\infty)$。类似有 $[a, +\infty)$ 表示集合 $\{x|a\leqslant x<+\infty\}$；区间 $(a, +\infty)$ 表示 $\{x|a<x<+\infty\}$；区间 $(-\infty, b]$ 表示 $\{x|-\infty<x\leqslant b\}$ 等等。这些区间的长度不是有限值，称为**无穷区间**。

这里，“$+\infty$”和“$-\infty$”分别读作“正无穷大”和“负无穷大”，它们只是一种记号，表示绝对值可以无限增大的变量，而不是确定的数。

今后在不需要辨明所讨论的区间是否包括区间端点时，就简称“区间”。如区间 I。

二、绝对值

对于实数 a，它的绝对值规定为

$$|a|=\begin{cases} a & 若\ a\geqslant 0 \\ -a & 若\ a<0 \end{cases}$$

例如 $|-3|=3$，$|4|=4$。

a 的绝对值即 $|a|$，在数轴上它表示点 a 与原点之间的距离。关于绝对值有下列一些论断：

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$

(2) 如果 $|x|<a$ $(a>0)$，则有 $-a<x<a$；反之，若 $-a<x<a$，则有 $|x|<a$。

(3) 如果$|x|>b$ ($b>0$)，则有 $x>b$ 或$x<-b$；反之，若 $x>b$ 或$x<-b$，则有$|x|>b$。

以上三条结论可从几何上（在数轴上）直观得出。

对于任意实数 a，b，绝对值满足下列运算规则：

(1) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

因为 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$，$-|b|\leqslant b\leqslant|b|$，这两式相加得：

$$-|a|-|b|\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|$$

即 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$

(2) $|a-b|\geqslant|a|-|b|$

因为 $|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$，移项即可得

$|a-b|\geqslant|a|-|b|$

(3) $|ab|=|a|\cdot|b|$

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ ($b\neq0$)

由绝对值的定义可得出 (3)，(4) 这两个运算公式。

三、邻域

邻域是一个经常用到的概念。设 a，δ 是两个实数，且 $\delta>0$，那么与点 a 的距离小于 δ 的所有点的集合，即满足不等式$|x-a|<\delta$ 的全体x 值所组成的集合，称为点 a 的δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$。即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta,\ x\in R\}$$

其中点 a 称为邻域的中心，δ 叫做邻域的半径。

因为$|x-a|<\delta$ 即$-\delta<x-a<\delta$，从而 $a-\delta<y<a+\delta$，所以点 a 的δ 邻域 $U(a,\delta)$也可表示为开区间 $(a-\delta,a+\delta)$。

从数轴上看，点 a 的δ 邻域表示以点a 为中心，长度为2δ 的开区间（见图 1-1)。

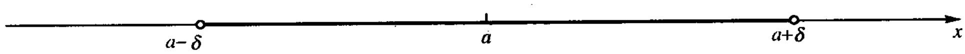

图 1-1 邻域图示

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，点 a 的δ 邻域去掉中心a 后，称为点 a 的去心δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

这里用$0<|x-a|$来表示 $x\neq a$。

四、函数的概念

(一) 常量与变量

在对问题的观察与研究中，我们会遇到各种各样的量。其中有些量在考察过程中是不变的，保持一定的数值，称为常量。而另一些量，在考察过程中是变化的，可以取不同的数值，称为变量。

例如，质点以速度 v 作匀速直线运动，则质点经过的路程 S 和时间t 之间的关系为

$S=vt$,其中 v 是常量，而 S 与 t 都是变量。

又如，圆的半径 R 变化时，圆的周长 C 也在变化，它们之间的关系为 $C=2\pi R$，R 和 C 都是变量，但周长 C 和直径 $2R$ 的比值始终是不变的，即圆周率 π 是常量。

习惯上用字母 a，b，c 等表示常量；用字母 x，y，z 等表示变量。

(二) 函数定义

在我们考察的同一变化过程中所涉及到的各个变量之间总是相互联系、相互依赖的。例如真空中自由下落的物体所经过的路程 S 随时间 t 不断变化,它们之间有如下依赖关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

其中 g 是重力加速度，是常量；时间 t 的变化范围是从开始时刻（设 $t=0$）到运动结束时刻（设 $t=T$）的一个区间 $[0, T]$，对于变量 t 的变化范围 $[0, T]$ 里的任意一个值 t_0，根据上述关系，就有相应的路程：

$$S_0=\frac{1}{2}gt_0^2$$

与其对应。

函数关系就是这种变量间的对应关系的抽象和概括。

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集。如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$。数集 D 叫这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量。

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$，或 $y|_{x=x_0}$。当 x 遍取 D 内的各个数值时，对应的函数值的全体组成的数集：

$$W=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的值域。

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如“φ”、“F”等，这时函数就记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$ 等。也可用 $y=y(x)$ 表示变量 y 是以 x 为自变量的函数。

由函数的定义可以知道，当函数的定义域以及函数的对应法则确定以后，这个函数就完全确定了。因此常称函数的定义域和函数的对应规律为函数的两个要素。

在实际问题中，函数的定义域是根据函数的实际意义来确定的。例如上述的自由落体运动，$S=\frac{1}{2}gt^2$，它的定义域为 $[0, T]$。因为并不是对任意的 t 都可以用这个关系式确定 S 的值。只有从物体开始下落（$t=0$）到运动结束（$t=T$）这段时间里，上式才有意义，即只有当 t 在区间 $[0, T]$ 上取值时，才有意义。当我们讨论仅仅由数学式子表示的函数而不考虑它的实际意义时，它的定义域就是指使数学式子有意义的自变量的取值范围，所以如不考虑 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的实际意义，那么它的定义域应为无穷区间 $(-\infty, +\infty)$。

在函数的定义中，如果对于定义域中的每一个 x 值，总只有一个 y 值与之对应，这种函数称为单值函数。如果与一个 x 值对应的 y 值不止一个，就称 y 为多值函数，例如以原点为圆心，1 为半径的圆的方程为

$$x^2+y^2=1$$

由这个方程所确定的函数就是多值函数。因为这方程在闭区间 $[-1, 1]$ 上确定一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，当 x 取 -1 或 1 时，对应的函数值都只有一个，但当 x 取开区间 $(-1, 1)$ 内的任一数值时，与之对应的 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 就有两个。

今后如无特殊的声明，我们所讲的函数都是指单值函数。

下面举几个函数的例子。

例 1-1 $y=C$。

这个函数称为常数函数。它的对应规律是：对于自变量 x 的每一个值，都用常数 C 与之对应（见图 1-2）。

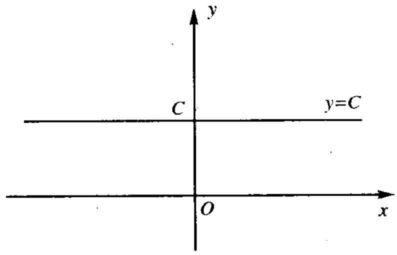

图 1-2 常数函数图形

这个例子说明单值函数定义中“总有唯一确定的数值和它对应”所指的单值的意思，即对于每个 x 的值，只有一个 y 值与之对应，而不要求对于不同的 x 有不同的 y 与之对应。

例 1-2 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}+\lg(5-2x)$ 的定义域。

解：要使得函数表达式有意义，则要求 x 满足：

$$\begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ x-1\neq 0 \\ 5-2x>0 \end{cases}$$

解此方程组，得 $\begin{cases} x\geqslant -2 \\ x\neq 1 \\ x<2.5 \end{cases}$

故函数的定义域为：

$D=\{x \mid -2\leqslant x<2.5,\ x\neq 1\}$。

或表示为 D：$[-2, 1)\cup(1, 2.5)$。

(三) 函数的表示法

函数有列表法、图像法、解析法三种常见的表示方法。

(1) 列表法 在实际应用中，常将自变量所取的值与函数的对应值列成表格，如平方表、对数表、三角函数表等。这种表示函数的方法称为列表法。列表法的优点是给定了自变量的值以后，可以从列表中直接查到对应的函数值。但其缺点是仅能查出表上列出的函数值，且不够直观，不便做理论分析。

(2) 图像法 用坐标平面上的图形（一般为曲线）来表示函数的方法称为图像法。在初等数学中学过的对数曲线、指数曲线、三角函数曲线等都是用图像法表示函数的例子。图像法的优点是直观性强。所以以后研究函数时，常结合它的图形给予直观解释。图像法缺点是不够精确，也不便于进行定量的理论分析。

(3) 解析法 就是用数学式子表示函数对应关系的方法。今后研究变量间关系，主要是用解析法表示函数。因为它便于对函数进行理论研究，且简明准确，便于计算。解析法的缺点是不够直观，而且有些实际问题中所遇到的函数关系，很难甚至不能用解析法表示出来。

应当指出，用解析法表示函数时，有时需要在自变量的不同的取值范围中，用不同的

式子来表示一个函数，即所谓分段函数。例如

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & \text{当 } x>1\end{cases}$$

是确定在区间 $[0,+\infty)$ 上的一个函数（必须注意不是两个函数而是一个函数）。当自变量 x 取闭区间 $[0,1]$ 上的数值时，对应的函数值 y 由公式 $y=2\sqrt{x}$ 确定；当 x 取区间 $(1,+\infty)$ 内的数值时，y 的值由公式 $y=1+x$ 确定。

例 1－3 已知分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

试求：$f(-3)$，$f(0)$，$f(3)$；指出 $f(x)$ 的定义域，并画出函数的图形。

解：因为当 $x<0$ 时，$f(x)=-1$，所以 $f(-3)=-1$；同样当 $x>0$ 时，$f(x)=1$，所以 $f(3)=1$，而 $f(0)=0$，函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，函数的图形如图 1－3 所示。

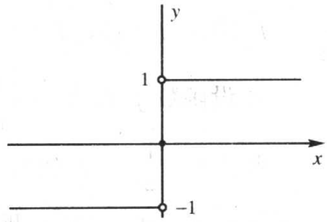

图 1－3 例 1－3 函数图形

注意：在作函数图形时，不属于图形上的点用空心圈表示。

例 1－4 画出函数 $y=|x|$ 的图形。

解：由绝对值的定义，可知

$$y=|x|=\begin{cases}x & \text{当 } x\geqslant 0\\ -x & \text{当 } x<0\end{cases}$$

它的定义域为全体实数，其图形见图 1－4。

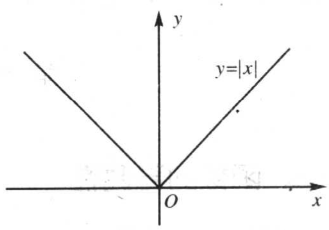

图 1－4 例 1－4 函数图形

习题 1-1

1. 用各种方法（区间、集合、图示等）表示下列点集。

(1) $|x-2|\leqslant 3$；

(2) 以 10 和 20 为端点的开区间；

(3) -5 的 3 邻域；

(4) 以 -1 为中心，长度为 4 的左开，右闭区间。

2. 求下列函数的定义域。

(1) $y=\sqrt{3-x}$　　(2) $y=\ln(1-x^2)$　　(3) $y=\dfrac{1}{x^2}-x$

(4) $y=\ln \arcsin x$　　(5) $y=\ln(1-x)+\sqrt{x+2}$

3. 下列各题中，$f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 是否表示同一个函数？说明理由，并指出在哪个区间上它们是相同的。

(1) $f(x)=x$，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$　　(2) $f(x)=\lg x^2$，$\varphi(x)=2\lg x$

4. 写出下列函数关系。

(1) 已知圆柱体的体积为 V，试将 V 表示为底圆半径 r 及高 h 的函数；

(2) 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费每千克 0.15 元计算，当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费，试求上海到某地的行李费 y（元）与行李重量 x（千克）之间的函数关系。

5. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值。

$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{a})$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2 & -1<x\leqslant 0 \\ 1 & 0<x<1 \end{cases}$

求 $f(-\frac{1}{2})$，$f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(a)$ $(|a|<1)$。

7. 设 $F(x)=e^x$，证明

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$ (2) $\dfrac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$

第二节 函数的几种特性

一、函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域内为关于原点对称的区间，且对于定义域内任意一点 x，都满足：$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数；如果满足：$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数。

显然奇函数的图形关于原点呈中心对称，偶函数的图形关于 y 轴呈轴对称。

例如：$y=1+x^2$ （偶） $y=x-x^3$ （奇）

$y=x\cos x$ （奇） $y=x\sin x$ （偶）

注意：并不是任何函数都有奇偶性。

例如，$y=x+x^2$，$y=2\sin x+3\cos x$ 等函数，既不是奇函数也不是偶函数。

二、函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 对定义区间 (a, b) 内的任意两点 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$时，都有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad 或 \quad f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增加或单调减少。

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。

其中定义区间是指包含在定义域内的区间。

例如函数 $y=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的，但在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的。

又如函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的。

三、函数的有界性

对函数 $f(x)$ 的定义域 D 内的一切 x，若存在正数 M，使对应的函数值都有

$$|f(x)| \leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界；如果这样的 M 不存在，就叫做函数 $f(x)$ 在 D 内无界。

例如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为取 $M=1$，对任一实数 x，有 $|\sin x| \leqslant 1$。而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$，对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 都成立。

四、函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 l，使得对于定义域内的任何 x 值，$x \pm l$ 仍在定义域内，且关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 叫做函数 $f(x)$ 的周期。通常，我们说周期函数的周期是指其最小正周期。

例如函数 $\sin x$、$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数。因为 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，$\cos(x+2\pi)=\cos x$。

函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数，因为 $\tan(x+\pi)=\tan x$。

对于周期为 l 的一个周期函数，如果把 $(-\infty, +\infty)$ 分成长度为 l 的许多个区间，那么在每个区间上，函数图形有相同的形状。

习题 1-2

1．指出下列函数在指定区间的单调性。

(1) $y=x^2$ $(-1, 0)$； (2) $y=\lg x$ $(0, +\infty)$；

(3) $y=\sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$。

2．下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数？哪些是既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$ (2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $y=x\cos x$

(4) $y=|\sin x|$ (5) $y=\sin x+\cos x+1$

3．下列函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期。

(1) $y=\cos(x-2)$； (2) $y=\sin 4x$；

(3) $y=x\sin x$； (4) $y=1+\sin \pi x$

第三节 反 函 数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，因为 W 是函数值组成的数集，所以在 W 内任取一个数值 $y=y_0$，D 内必定有数值 $x=x_0$，使 $f(x_0)=y_0$ 成立。这样的 x_0 可能不止一个。一般地，对于每一数值 $y \in W$，D 内至少可以确定一个数值 x 与 y 对应，这