UMSS

大学数学科学丛书—19

几何与代数导引

胡国权 编著

科学出版社
www.sciencep.com

几何与代数导引

—19

大学数学科学丛书　19

几何与代数导引

胡国权　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书覆盖了“高等代数”与“解析几何”这两门课程的教学内容. 全书共分8章, 分别讨论: 向量、平面与直线, 二次曲面与坐标变换, 线性空间与线性映射, 矩阵、线性方程组与行列式, 多项式, 线性变换, 双线性型与欧氏空间, 仿射空间与射影空间. 本书力求体现几何与代数的内在联系, 强调线性空间与线性映射的观点, 突出向量、坐标、标准形的线索, 注重学生的抽象思维能力和空间想象能力的培养.

本书可作为高等院校数学及相关专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

几何与代数导引/胡国权 编著. —北京: 科学出版社, 2006.9
(大学数学科学丛书; 19/李大潜主编)
ISBN 7-03-018041-0

I. 几… II. 胡… III. ①解析几何②高等代数 IV. ①O182②O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 108316 号

责任编辑: 吕 虹 / 责任校对: 纪振红
责任印制: 安春生 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年9月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2006年9月第一次印刷 印张: 23
印数: 1—4 000 字数: 431 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈双青〉)

作者简介

胡国权，男，1964年生于湖南省双峰县. 1984年在湖南师范大学数学系本科毕业，毕业后留校历任助教、讲师、副教授. 1996年在复旦大学数学研究所博士毕业. 1998年在中山大学数学研究所博士后出站后留校工作至今. 2002年在美国Cincinnati大学数学系作访问学者. 近10年主要担任中山大学数学系“几何与代数 ”课程的教学.

主要研究方向是代数学及其应用，特别是Hopf代数、量子群、编码理论. 发表了10多篇学术论文，指导了多名研究生.

通讯地址：中山大学数学系(510275)，e-mail:mcshgq@mail.sysu.edu.cn

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

解析几何与高等代数是大学数学的两门基础课. 它们分属几何与代数两大学科, 各有独立的教学体系, 彼此之间又有着密切的联系. 近年来, 国内外很多学者都在尝试将这两门课合并为一门课的教学改革. 中山大学数学与计算科学学院从 1999 年开始把这两门课合并成“几何与代数”. 过去单独讲代数课时, 主要着眼于代数知识内在的联系, 几何只是作为例子对代数理论作直观说明; 而讲几何课时, 代数只是作为方法或工具直接加以引用. 通过两门课的结合, 我们进一步认识到, 代数理论来源于几何问题, 从几何的角度思考代数可以深化我们对代数的理解. 该课程课时被缩短为一年 ($16\times6+20\times5=196$). 由于解析几何与高等代数在数学学习中的基础地位, 我们不愿减少教学内容或降低要求和难度. 因此我们试图对这两门课的内容作统一安排. 本书的初稿是作为“几何与代数”课程的教材编写的, 几经试用及修改后整理成书.

本书的基本内容涵盖了原解析几何与高等代数课程的教学内容. 全书共分八章和一个附录. 第 1、2 章在 3 维空间中引入向量与坐标, 研究平面、直线、二次曲面的方程及其几何性质, 并且初步讨论点变换的简单性质. 这里强调向量与坐标变换的方法. 第 3、4 章以 3 维空间为背景引入线性空间的概念, 研究在有限维向量空间中引入坐标的可能性, 即基的存在性和维数不变性, 初步讨论线性映射的基本性质, 具体讨论由 F^n 到 F^m 的线性映射, 即矩阵运算、线性方程组和行列式等内容. 这里强调线性空间的一般性以及一般理论在 F^n 情形的具体化. 第 5、6 章介绍多项式的根与整除性的基本知识, 并且按照坐标化的思想引入线性映射的矩阵表示, 研究基变换下线性映射的矩阵变化规律以及矩阵的等价与相似标准形. 第 7、8 章介绍双线性函数与二次型、欧氏空间与酉空间的基本理论, 导出矩阵的合同与正交相似标准形, 并且引入仿射与射影空间的基本概念, 将线性代数还原为几何. 附录中简单介绍算术与代数基本定理, 并引入群、环、域等代数基本概念.

本书前四章足够第一学期之用, 后四章足够第二学期之用. 具体教学中可以根据课时和学生的程度灵活处理教学内容. 例如, 可以将 3.4 节放到 6.1 节的后面来讲, 第八章可作选讲内容. 本书也可以作为线性代数或高等代数课程的教材使用, 内容包括第 3 章至第 7 章, 第 1、2、8 章供学生参考.

本书力求揭示知识间的内在联系. 线性代数各知识点之间的关联错综复杂, 逻辑上, 我们可以从任一点出发推出全部理论, 这就是为什么各教材之间逻辑体系不一致的原因. 线性代数用多种不同的语言说着同一件事情, 这正是初学者感到困难的主要原因之一. 实际上, 线性代数的本质在于线性二字, 抽象地说, 它是关于线性

空间与线性映射的理论，具体地说，它研究向量、矩阵、坐标和坐标变换，它用最简单的方法研究最简单的现象. 但是，简单的道理无处不在，有时会变得难以捉摸. 例如，相容线性方程组的主变量数加上自由变量数等于总的变量数，这一明显的事实常以不同面目出现，如线性映射的像与核的维数定理、线性方程组解的结构定理、同态基本定理、子空间与其零化子的维数关系等. Gauss 消去法既是求线性映射的原像问题的具体化，又是仿射坐标变换的形式化. 为了看清楚几个平面的相交情况，几何上，是作仿射坐标变换，使各平面处于容易被观察的位置，代数上，就是作初等变换，将矩阵化为简单形式. 例如，要了解一个图形，如二次曲面，当然最好是把它摆在标准位置，此时它的方程就有简单形式. 这个浅显的道理表现为对称矩阵的合同对角化、二次型或相应的对称双线性函数在仿射坐标变换下的标准形问题；在直角坐标系下，则表现为对称矩阵的正交相似标准形、二次型或相应的对称双线性函数在直角坐标变换下的规范形式问题，由此引出特征值与特征向量的理论. 类似地，矩阵的等价、相似、合同标准形及各种矩阵分解也都是坐标变换的问题. 几何问题向量化、向量问题坐标化、坐标问题标准化，这应该就是本书所涉及的主要思想. 表面上，解析几何的大部分内容被线性代数所覆盖. 实际上，后者也可以看成是前者的形式化，它的大部分思想都来源于前者. 从历史发展角度看，解析几何先于线性代数，这当然反映了人类思维发展的规律，即几何直观先于抽象概念. 本书在内容上偏重代数，在思想上偏重几何，在教学上主张从几何到代数再回到几何.

在过去的教学中，经常与同行老师讨论数学教学问题、和各届学生讨论数学学习问题，留下了许多愉快的回忆. 借此机会，向他们表示感谢. 本书的编写和出版得到了学院领导的关心、理解和支持，以及国家自然科学基金 (60575004) 和中山大学教务处的部分资助. 在此一并表示感谢. 本书花费了作者大量精力和心思，但在许多方面还有待今后进一步改进. 书中错误和不当之处，望同行和读者批评指正.

胡国权

2006 年 8 月

目　录

第 1 章　向量、平面与直线

本章主要介绍几何向量及其运算性质, 并结合坐标方法讨论关于空间中平面和直线的几何问题, 为向量空间理论提供直观的背景. 本章内容既是解析几何的重要组成部分, 也是学习线性代数的基础.

1.1　向量的线性运算

1.1.1　加法和数乘

向量是描述空间中两个位置之间的差别或位移的基本几何量. 它的物理背景是那些既有大小又有方向的物理量, 如位移、力、速度等.

我们用有向线段来直观地表示向量. 所谓有向线段就是确定了端点顺序的线段. 如图 1.1, 设 p 和 q 是空间中两个点. 以 p 为始点, q 为终点的有向线段用线段 pq 和由 p 指向 q 的箭头表示, 记为 $\overrightarrow{pq}$. 但是作为向量, $\overrightarrow{pq}$ 的本质是 $\overrightarrow{pq}$ 的长度和方向, 即线段 pq 的长度和由 p 指向 q 的方向. 换句话说, 长度相等且方向相同的两个有向线段表示同一个向量, 或称这两个向量相等. 如图 1.1, 设 $pqrs$ 是平行四边形, 则向量 $\overrightarrow{pq}$ 与 $\overrightarrow{sr}$ 相等, 记为 $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{sr}$. 在这个意义下, 向量也叫自由向量.

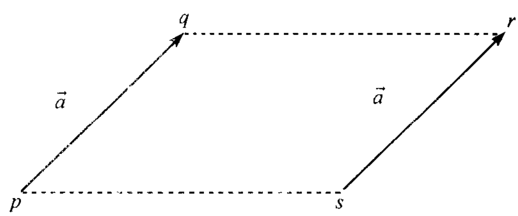

图　1.1

在一般的讨论中, 按通常习惯, 我们用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 等表示向量. 向量 $\vec{a}$ 的长度记为 $|\vec{a}|$.

接连两次位移的结果仍是一个位移, 点 p 经过位移 $\vec{a}$ 到点 q, 点 q 又经过位移 $\vec{b}$ 到点 r, 合起来的效果就是从 p 到 r 的位移.

定义 1.1　设 $\vec{a}, \vec{b}$ 是向量, 在空间任取一点 p, 作 $\overrightarrow{pq} = \vec{a}$, $\overrightarrow{qr} = \vec{b}$, 称以 p 为始点, r 为终点的有向线段 $\overrightarrow{pr}$ 所表示的向量 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和, 记为 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, 称此运算为向量的加法, 参见图 1.2.

以上定义的求和方法叫三角形法则．定义是合理的, 即与点 p 的选取无关. 事实上, 若取另一点 p', 作 $\overrightarrow{p'q'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{q'r'}=\vec{b}$, 则由向量的定义和平行四边形定理知, 四边形 $pp'q'q$ 和 $qq'r'r$ 都是平行四边形, 因而 $pp'r'r$ 也是平行四边形, 所以 $\overrightarrow{pr}=\overrightarrow{p'r'}$. 参见图 1.3. 我们也可以从一点 p 同时作 $\overrightarrow{pq}=\vec{a}$ 和 $\overrightarrow{ps}=\vec{b}$, 以 pq, ps 为边得一平行四边形 $pqrs$, 则 $\overrightarrow{pr}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和, 这称为向量加法的平行四边形法则, 参见图 1.4.

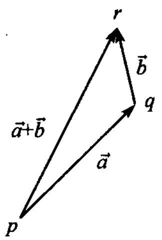

图 1.2

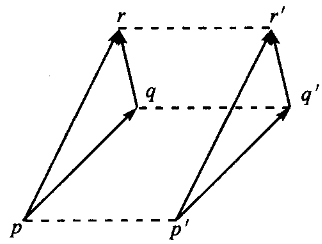

图 1.3

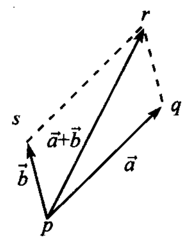

图 1.4

为了计算方便, 我们引进零向量与负向量的概念.

长度为零的向量叫零向量, 记作 0. 零向量的始点和终点重合, 没有确定的方向, 规定可根据需要取任意方向.

与向量 $\vec{b}$ 等长而反向的向量称为 $\vec{b}$ 的负向量, 记作 $-\vec{b}$. 把一个向量的始点和终点互换就得到原向量的负向量, 即 $\overrightarrow{pq}=-\overrightarrow{qp}$. 显然,

$$-(-\vec{b})=\vec{b}. \tag{1.1}$$

利用负向量的概念, 定义向量的减法如下:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}). \tag{1.2}$$

向量的加法具有和实数加法同样的运算性质.

定理1.1 向量的加法满足下列基本性质: 对任意向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, 有

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, 2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,

3) $\vec{a}+0=\vec{a}$, 4) $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

证 1) 如图 1.5, 作 $\overrightarrow{op}=\vec{a}$, $\overrightarrow{pq}=\overrightarrow{or}=\vec{b}$, 则 $\overrightarrow{rq}=\vec{a}$, 由定义,

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{op}+\overrightarrow{pq}=\overrightarrow{oq}=\overrightarrow{or}+\overrightarrow{rq}=\vec{b}+\vec{a}.$$

2) 如图 1.6, 作 $\overrightarrow{op}=\vec{a}$, $\overrightarrow{pq}=\vec{b}$, $\overrightarrow{qr}=\vec{c}$, 根据定义,

$$\overrightarrow{oq}=\overrightarrow{op}+\overrightarrow{pq}=\vec{a}+\vec{b},\ \ \overrightarrow{pr}=\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qr}=\vec{b}+\vec{c},$$

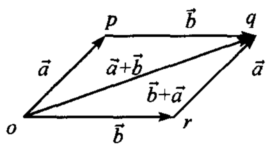

图 1.5

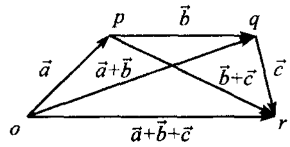

图 1.6

因此, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{oq}+\overrightarrow{qr}=\overrightarrow{or}=\overrightarrow{op}+\overrightarrow{pr}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3) 作 $\overrightarrow{op}=\vec{a}$, $\overrightarrow{oo}=0$, 则 $0+\vec{a}=\overrightarrow{oo}+\overrightarrow{op}=\overrightarrow{op}=\vec{a}$.

4) 作 $\overrightarrow{pq}=\vec{a}$, 则 $\overrightarrow{qp}=-\vec{a}$, 于是 $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{pq}+\overrightarrow{qp}=\overrightarrow{pp}=0$. □

对于方向相同或相反的两个向量, 它们的方向关系可以用正负号来表示, 长度之间的关系可以用倍数来表示. 因此, 两个方向相同或相反的向量之间的关系可以用一个实数表示出来. 这是两个向量间一种基本的关系. 我们定义实数与向量的乘法运算如下.

定义 1.2 设 k 为实数, $\vec{a}$ 为向量, 定义 k 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个向量, 记为 $k\vec{a}$, 其长度为 $|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$, 其方向当 $k>0$ 时与 $\vec{a}$ 相同, 当 $k<0$ 时与 $\vec{a}$ 相反. 称此运算为向量的数量乘法, 简称数乘.

数乘的定义蕴涵任意实数乘零向量或数零乘任意向量都是零向量, 即

$$0\vec{a}=0=k0. \tag{1.3}$$

又由实数性质知, 反过来也对, 即对任意向量 $\vec{a}$ 及任意实数 k,

$$k\vec{a}=0 \text{ 当且仅当 } k=0 \text{ 或 } \vec{a}=0. \tag{1.4}$$

定理 1.2 对任意实数 k, l 和任意向量 $\vec{a}$, 有

1) $1\vec{a}=\vec{a}$,

2) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$.

证 1) 是显然的, 由数乘定义即得.

2) 当 $\vec{a}=0$ 或 $kl=0$ 时, 等式两边都是零向量, 因而相等. 一般情况, 按数乘的定义, $|k(l\vec{a})|=|k||l\vec{a}|=|k|(|l||\vec{a}|)=|kl||\vec{a}|=|(kl)\vec{a}|$, 即 $(kl)\vec{a}$ 与 $k(l\vec{a})$ 有相同的长度. 再看它们的方向. 当 $kl>0$ 时, 等号两边向量都与 $\vec{a}$ 同向, 当 $kl<0$ 时, 等号两边向量都与 $\vec{a}$ 反向. □

由定义易知, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$. 由定理 1.2, 对任意向量 $\vec{a}$ 及实数 k, 有

$$(-k)\vec{a}=-(k\vec{a}). \tag{1.5}$$

长度为 1 的向量叫做单位向量. 若向量 $\vec{a}$ 非零, 则 $|\vec{a}|^{-1}\vec{a}$ 是和 $\vec{a}$ 同向的单位向量, 记为 $\vec{a}^0$, 称 $\vec{a}^0$ 为 $\vec{a}$ 的单位化, 即

$$\vec{a}^0=(|\vec{a}|^{-1})\vec{a}, \tag{1.6}$$