公安高等院校基础数学教材

下册

高等数学

Gaodeng Shuxue

李洪成 主编　蒋南宁 主审

广东人民出版社

公安高等院校基础数学教材

高等数学

下册

李洪成　主编
蒋南宁　主审

广东人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/李洪成主编．蒋南宁主审．—广州：广东人民出版社，2006.4

公安高等院校基础数学教材

ISBN7－218－05168－5

Ⅰ．高… Ⅱ．①李…②蒋… Ⅲ．高等数学－高等院校－教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第160518号

责任编辑	柏　峰
封面设计	刘晓菁
责任技编	黎碧霞
出版发行	广东人民出版社
印　　刷	韶关二九〇研究所地图彩印厂
开　　本	850毫米×1168毫米　1/32
印　　张	21.75
字　　数	500千
版　　次	2006年4月第1版　2006年4月第1次印刷
印　　数	4000册
书　　号	ISBN 7－218－05168－5/O·6
定　　价	50.00元（上、下册）

（内部使用）

如果发现印装质量问题，影响阅读，请与出版社（020—83795749）**联系调换。**

【**出版社网址：**http://www.gdpph.com　**电子邮箱：**sales@gdpph.com

图书营销中心：020—83799710（**直销**）　83790667　83780104（**分销**）】

目　　录

下　册

第九章 向量代数与空间解析几何

在学习平面解析几何时，我们通过平面坐标法使点与一对有序实数建立对应关系，进而将平面上的图形与方程建立对应关系，这样就可以利用代数的方法来研究几何问题.

空间解析几何与平面解析几何类似，它是通过空间坐标系，使点与三个有序实数建立对应关系，进而将空间的曲面和曲线与方程建立对应关系，从而就可以用代数方法研究空间几何问题.

本章通过建立空间直角坐标系，引进有广泛应用的向量及其运算法则，并以此为工具研究空间的平面、直线、二次曲面及空间曲线，为解决公安司法工作中的数学问题打下基础.

§1 空间直角坐标系

象平面解析几何知识对学习一元函数微积分，是不可缺少的基础一样，空间解析几何知识对学习多元函数微积分也是必不可少的，我们先从空间直角坐标系谈起.

一、空间点的直角坐标

平面上的点的坐标需要有两个有序实数(x, y)，而空间的点，则需要有三个有序的实数(x, y, z)，为此引出空间直角坐标系的概念.

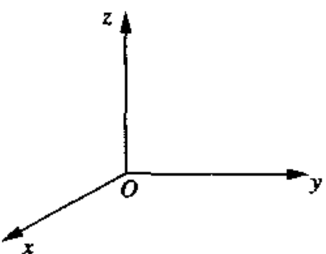
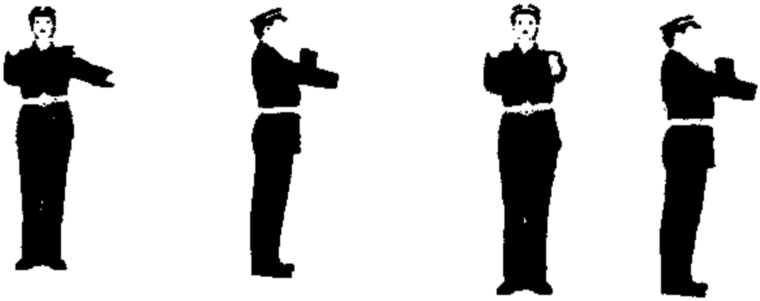


图 9－1

过空间一点 O，作三条互相垂直的数轴，这三条轴分别叫做 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 通常把 x 轴和 y 轴配置在

水平面上，而 z 轴则是铅垂线(如图 9--1)，点 O 为坐标原点.

坐标轴方向按前车避后车交通指挥手势，规则:即:左臂向左摇动(水平)90 度时，为 y 轴指向，右臂向前平伸方向为 x 轴方向，而屈臂 90 度手指方向为 z 轴方向，如图 9—2(a).



前车避后车信号:左臂向前平伸，手掌向左，向左摆动；右臂向前屈臂下掌向后，向后摆动. 前方车辆应当向右避让后方车辆通行.

图 9—2(a)

坐标轴的方向传统上称右手规则:即以右手握住 z 轴，当右手四指从正向 x 轴以 90 度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 9—2(b).

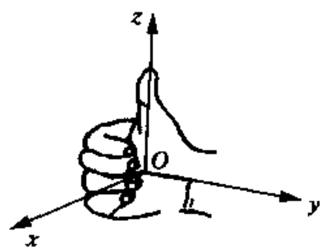


图 9—2(b)

在三个坐标轴上一般取相同的单位长，这样就构成了空间直角坐标系 $Oxyz$ 任意两个坐标轴可以确定一个平面，叫坐标面，如 xOy、yOz 及 zOx 坐标面. 三个坐标而把空间分成八个部分，每一个部分叫做卦限. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫第一卦限，其它第二、三、四卦限在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定. 第一卦限之下的是第五卦限(即含有 x 轴、y 轴的正半

轴和 z 轴的负半轴构成)，按逆时针方向，(在 xOy 面下方)依次为第六、七、八卦限(如图 9—3).

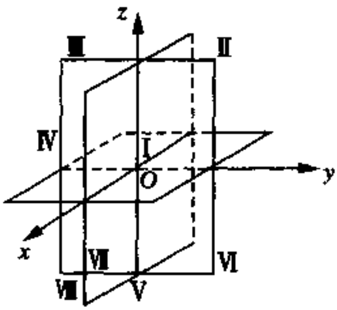


图 9—3

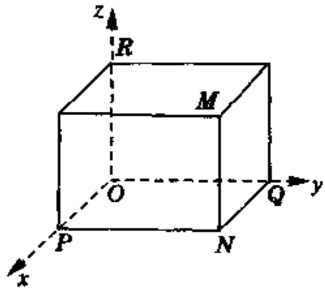


图 9—4

建立了空间直角坐标系后，就可建立空间点与数组之间的对应关系.

设 M 为空间内任一点，过 M 点作三个平面分别垂直 x 轴、y 轴和 z 轴，依次相交于 P、Q、R(图 9—4)这三点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x，y，z，这样空间内任一点 M 和一组有序实数 x，y，z 对应. 反之，设 x，y，z 为一组有序实数,则在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P、Q 和 R 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面相交一点 M，便是由有序实数 x，y，z 所确定的唯一的点. 这样，就建立了空间点 M 和有序数组 x，y，z 之间的一一对应关系. 这组数 x，y，z 就叫做点 M 的坐标，并依次称 x，y，z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标. 坐标为 x，y，z 的点 M，记为 $M(x, y, z)$.

二、空间两点间的距离

设空间有两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，求这两点

间的距离 d. 过 M_1、M_2 两点各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面. 这六个平面围成一个 M_1、M_2 为对角线的长方体(图 9—5).

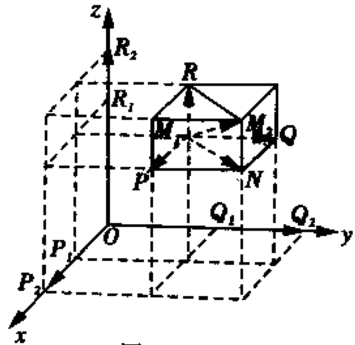


图 9—5

由于 $\angle M_1NM_2$ 为直角, $\triangle M_1NM_2$ 为直角三角形, 所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2.$$

又 $\triangle M_1PN$ 也是直角三角形, 且 $|M_1N|^2=|M_1P|^2+|PN|^2$, 所以

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2.$$

由于 $|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|$,

$|PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|$,

$|NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|$,

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地, 点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 求证以 $M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$、$M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为 $|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$,

$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6$,

$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6$,

由于 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$, 所以 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 2 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距

离的点.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$ 依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}.$$

两边去根号，解得 $z=\frac{14}{9}$.

所以所求点为 $M(0,0,\frac{14}{9})$.

习题9－1

1. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限

$A(1,-2,3)$；$B(2,3,-4)$；$C(2,-3,-4)$；$D(-2,-3,1)$.

2. 求点 (a,b,c) 关于(1)各坐标面；(2)各坐标轴；(3)坐标原点的对称点的坐标.

3. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

4. 试证明以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

§2 向量及其加减法、向量与数的乘法

一、向量概念

在实际问题中，常会遇到既有大小，又有方向的量. 例如：力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫做向量.

在数学上，往往用有向线段来表示向量. 有向线段的方向表示向量的方向，其长度表示向量的大小，也叫向量的模. 有向线

段的起点和终点，表示向量的起点和终点．如起点为 O，终点为 M 的有向线段所表示的向量用符号 $\overrightarrow{OM}$ 表示，它的模记为 $|\overrightarrow{OM}|$，它的方向是由 O 到 M 的方向．如果没有必要表示向量的起点和终点，也可用带箭头的字母或黑体字母来表示向量，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，…**A**，**B**，…．**a**，**b**，…$\vec{a}$ 或 **A** 的模也用 $|\vec{a}|$、$|\mathbf{A}|$ 来表示，如图 9－6．

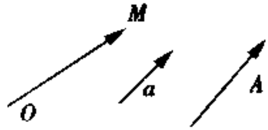


图 9－6

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的(注意，向量不能比较大小)．

模等于 1 的向量叫单位向量．模等于零的向量叫零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$．零向量是起点和终点重合，它的方向是任意的．

两个非零向量如果它们方向相同或相反，就称这两个向量平行．向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$．与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的逆向量，记为 $-\boldsymbol{a}$．

只考虑向量的大小和方向，而不考虑其起点和终点的向量，称这类向量是自由向量．在实际问题中，这类向量可以平行移动(不改变大小)后得到的向量是相同的向量．

二、向量的加减法

1. 平行四边形法则

求向量的加法，有类似求力学中的合力的平行四边形法则．即，两向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的和是以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线 $\overrightarrow{OC}$，记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} \qquad (图\ 9-7)$$

2. 三角形法则

从图 9－7 看出，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，所以用向量 $\overrightarrow{OA}$ 的终点为起点，作向量 $\overrightarrow{AC}$ 等于向量 $\overrightarrow{OB}$，连接 O，C，则向量 $\overrightarrow{OC}$ 等于

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}. \qquad (图\ 9-8)$$

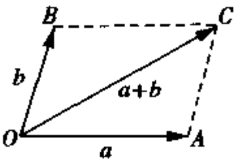


图 9—7

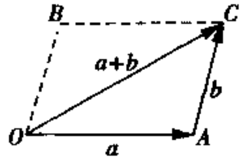


图 9—8

3. 运算规律

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　　(交换律)

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(3)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$

(4)$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

关于结合律，如图 9—9，可以看出，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再加上 $\boldsymbol{c}$，即得到和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，如以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果.

若 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$……$\boldsymbol{a}_n$($n\geqslant3$)相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.

按三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：

以前一个向量的终点作为次一个向量的起点，依次下推，最后以第一个向量的起点为起点，最后一个向量的终点为终点的向量，即为所求的和(如图 9—10).

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$$

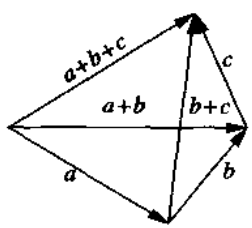


图 9—9

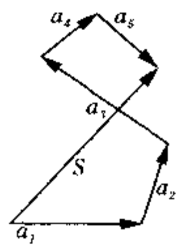


图 9—10

由运算规律(4)知，任意向量$\overrightarrow{AB}$及点O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量$\overrightarrow{AB}$便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(图 9－11).

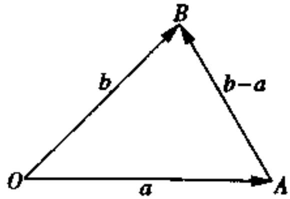


图 9－11

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立 .

三、向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数λ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向，当 $\lambda>0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，与 $\boldsymbol{a}$ 反方向，当 $\lambda=0$ 时，它是零向量，其方向是任意的.

数与向量的乘积符合如下运算规律：

(1)$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$　　(结合律)

(2)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　(对数量的分配律)

(3)$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　(对向量的分配律)

其中，λ、μ 为实数 .

把与 $\boldsymbol{a}$ 同向、模为 1 的单位向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$. 显然有

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}，\text{或 } \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

习题9－2

1. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

2. 把$\triangle ABC$的BC边五等分，设分点依次为D_1，D_2，D_3，D_4，再把各分点与A连接．试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$表示向量$\overrightarrow{D_1A}$，$\overrightarrow{D_2A}$，$\overrightarrow{D_3A}$，$\overrightarrow{D_4A}$.

§3　向量的坐标

一、向量在轴上的投影

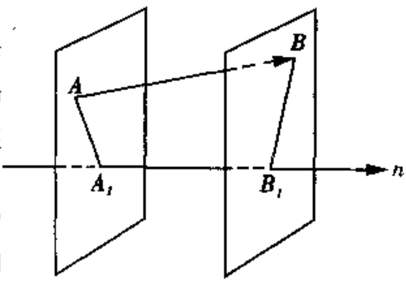


图 9—12

为了用数量研究向量，需要建立向量与有序数组之间的对应关系，为此要讨论向量在轴上的投影．

设向量$\overrightarrow{AB}$与轴n正向间的夹角为$\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，过$A$点和$B$点分别作平面垂直于轴$n$，这两平面与$n$轴的交点$A_1$和$B_1$分别称为点$A$和点$B$在轴上的投影(图 9—12)．在$n$轴上的有向线段$\overline{A_1B_1}$的"值"，记为$A_1B_1$．$A_1B_1$是一个实数，当$\overline{A_1B_1}$与$n$的指向相同时，它的值$A_1B_1$为正，否则为负．

定义　有向线段$\overline{A_1B_1}$的值A_1B_1，叫做向量$\overrightarrow{AB}$在n轴上的投影，记为

$$\mathrm{Prj}_n\overrightarrow{AB}=A_1B_1.$$

轴n叫做投影轴.

显然，如图 9—13 所示，通过向量$\overrightarrow{AB}$的起点A引轴n'使与轴n平行，且有相同的正方向，则轴n和向量$\overrightarrow{AB}$的夹角φ等于轴n'和$\overrightarrow{AB}$间的夹角．且有

$$\mathrm{Prj}_n A\vec{B}=\mathrm{Prj}_{n'}\overrightarrow{AB}$$

从图 9—13 可以看出.

$\mathrm{Prj}_{n'}\overrightarrow{AB}=AB_2$

$=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$

所以 $\text{Prj}_n\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi.$

向量在轴上的投影是一个数量，当 φ 为锐角时，投影为正；当 φ 为钝角时，投影为负；当 φ 为直角时，投影为 0. 相等的向量在同一轴上的投影相等.

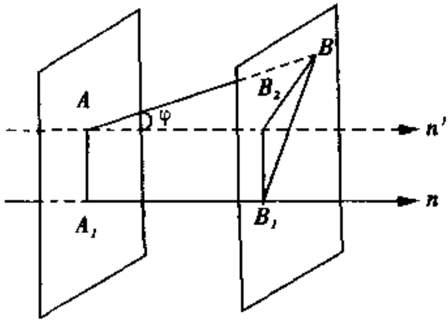


图 9—13

至于两个向量 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{a}_2$ 的和在 n 轴上的投影由图 9—14 可见

$$\text{Prj}_n(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=A_1C_1=A_1B_1+B_1C_1=\text{Prj}_n\boldsymbol{a}_1+\text{Prj}_n\boldsymbol{a}_2.$$

即两个向量的和在轴上的投影，等于这两个向量在轴上投影的和. 推广到 n 个向量的和的投影便是：

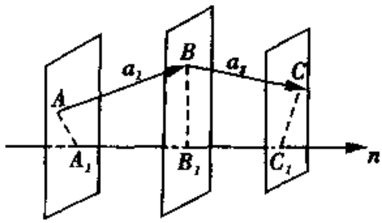


图 9 14

$$\text{Prj}_n(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)$$
$$=\text{Prj}_n\boldsymbol{a}_1+\text{Prj}_n\boldsymbol{a}_2+\cdots\text{Prj}\boldsymbol{a}_n.$$

二、向量的坐标表示法

前面计算向量的图示方法极不方便，因此，在向量投影的基础上，建立向量的坐标，以此简化向量的计算.

在空间直角坐标系的三个坐标轴正向上，分别取三个单位向量，记为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$ 叫做基本单位向量.

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$是以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$为起点，$M_2(x_2, y_2, z_2)$为

终点的向量．过点 M_1、M_2 各作垂直于三个坐标轴的平面．这六个平面围成一个以线段 M_1M_2 为对角线的长方体．从图 9－15 可以看出

$$\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{M_1N},$$

$$\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{M_1M_2}.$$

从而得到 $$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}.$$

但是 $$\overrightarrow{M_1P}=\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{M_1Q}=\overrightarrow{Q_1Q_2},\ \overrightarrow{M_1R}=\overrightarrow{R_1R_2},$$

所以 $$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{Q_1Q_2}+\overrightarrow{R_1R_2}.$$

上式右端的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$、$\overrightarrow{Q_1Q_2}$、$\overrightarrow{R_1R_2}$ 分别称为 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量．

以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x，y，z 轴正向的单位向量，则有

$$\overrightarrow{P_1P_2}=a_x\boldsymbol{i}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i},$$

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}=a_y\boldsymbol{j}=(y_2-y_1)\boldsymbol{j},$$

$$\overrightarrow{R_1R_2}=a_z\boldsymbol{k}=(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

因此 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，

或 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 按基本单位向量的分解式．

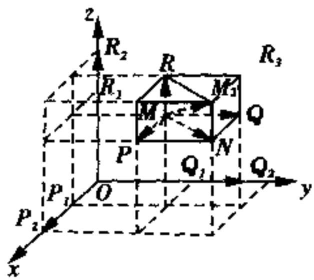


图 9－15

设 $\overrightarrow{OM}$ 与三个坐标轴夹角分别为 α、β、γ（图 9－16），并规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$，$0\leqslant\beta\leqslant\pi$，$0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，称 α、β、γ 为 $\overrightarrow{OM}$ 的方向角．因用坐标计算方向角较复杂，所以改用方向角的余弦来表示向量的方向．因方向角都在 0 与 π 之间，故当方向余弦确定了，方向角也就唯一确定，从而确定了向量的方向．

从图 9－16 知

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

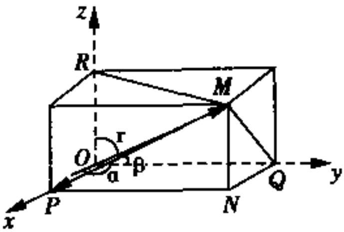


图 9 · 16

把 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 叫做向量的方向余弦.

直接验证可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

即任何向量的方向余弦的平方和恒等于 1.

由向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^\circ=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，

设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，于是 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^\circ&=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\&=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{i}+\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{j}+\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{k}\\&=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦就是 $\boldsymbol{a}$ 方向单位向量的坐标，即

$$\boldsymbol{a}^\circ=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

从上面的推导过程可知，可以从向量 $\boldsymbol{a}$ 唯一地定出它在三条坐标轴上的投影. 同时，反过来也可以从 a_x，a_y，a_z 唯一地定出向量 $\boldsymbol{a}$. 这就是说，有序数组 a_x，a_y，a_z 与向量 $\boldsymbol{a}$ 一一对应. 其中 a_x，a_y，a_z 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}.$$

上式叫做向量 a 的坐标表示式.

于是，起点为 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 而终点为 $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 的向量