

普通高等院校土木工程专业使用教材

结构稳定理论

田兴运 编著



STRUCT STABILITY THEORY



西北农林科技大学出版社

结构稳定理论

田兴运 编著

西北农林科技大学出版社

内容提要

本书以临界荷载的计算方法为线索,以钢结构稳定设计为应用对象,系统地介绍了杆系结构、刚架和薄板的稳定,包括稳定的基本概念和临界荷载的计算方法。全书共七章,主要内容有:失稳的类型与临界荷载计算方法、轴心受压构件的失稳、压弯构件的失稳、梁的弯扭失稳、刚架的稳定性及薄板屈曲等。

本书注重结构稳定理论的阐述,尽量做到浅显易懂,又强调应用,紧密结合钢结构的稳定设计,尽可能地把基本理论应用于结构稳定设计,从而沟通《结构稳定理论》和《钢结构》两门课程。

本书可作为土木工程等专业的本科生教材,可供相关专业的教师、研究生和工程技术人员参考

图书在版编目(CIP)数据

结构稳定理论/田兴运编著.—杨凌:西北农林科技大学出版社,2006
ISBN 7-81092-300-5

I.结... II.田... III.结构稳定性—理论 IV.TU311.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第158226号

结构稳定理论

田兴运 编著

出版发行	西北农林科技大学出版社
地 址	陕西杨凌杨武路3号 邮 编: 712100
电 话	总编室: 029—87093105 发行部: 87093302
电子邮箱	press0809@163.com
印 刷	西北农林科技大学印刷厂
版 次	2006年12月第1版
印 次	2006年12月第1次
开 本	787 mm × 960 mm 1/16
印 张	12.75
字 数	250千字

ISBN 7-81092-300-5/TU-2

定价: 25.00 元

本书如有印装质量问题,请与本社联系

前 言

《结构稳定理论》在培养学生分析问题的能力、空间想像力和计算能力等方面具有十分重要的作用，作为专业课程《钢结构》的先修课程，《结构稳定理论》是土木工程专业课程体系中不可缺少的一门课程。

《结构稳定理论》具有难度较大、授课学时少的特点。稳定问题是工程结构理论中的主要问题之一，历史久远、体系庞大、内容丰富、计算复杂。因此，如何在有限的学时内把结构稳定理论的基本知识传授给学生，并取得良好的教学效果，教材发挥着不可替代的作用，应该加强该课程的教材建设。

结构稳定理论属力学范畴，是力学应用于专业设计、指导专业设计的典型代表；结构稳定理论体系是从材料力学、结构力学、弹性力学延伸过来的，是力学走向专业设计的桥梁，是力学的进一步深化，是专业设计的理论基础。在材料力学中就已经涉及最简单、最基本的压杆稳定，已经介绍了压杆稳定的概念、欧拉公式、临界力、稳定系数等；结构力学全面介绍了结构的稳定计算，稳定类型等；在一些《钢结构》教材中也涉及结构稳定理论，但只是简明地做了介绍。虽然这些教材都涉及结构稳定理论，但就目前而言，还很难找到一本浅显易懂、体系比较完整又比较适合本科生教学需要的《结构稳定理论》教材，这便是作者编写这一教材的初衷。

本书具有如下特点：

1. 本书以临界荷载的计算方法为线索，以钢结构稳定设计为应用对象，全面、系统地介绍了结构稳定理论。无论是杆系结构中的轴心

受压构件、压弯构件、受弯构件、拱，还是刚架、薄板，都重点介绍了临界荷载的计算方法，并把基本理论在钢结构设计中作了具体应用。

2. 本书力求浅显易懂，把深奥的稳定理论用浅显的语言表达出来，以便于读者理解和接受，并安排了大量的例题，以辅佐读者对基本理论的掌握。

3. 本书在内容安排上有所不同。首先介绍了失稳类型与临界荷载的计算方法，然后依次介绍了轴心受压构件、压弯构件、受弯构件、刚架、薄板、拱等的稳定。这样安排，既便于与力学课程的衔接，又为《钢结构》打好了基础，使《结构稳定理论》真正起到承上启下的作用。

4. 本书适合本科生的教学需要，是作者多年教学经验的总结，是在作者讲义的基础上编写而成。全面介绍了结构稳定理论的基本知识，删去了一些复杂的公式推导，以便于读者理解和接受，为进一步学习结构稳定理论打好基础。

本书由田兴运执笔完成，王志刚同志精心绘制了书中插图。

本书承蒙西安建筑科技大学胡长明教授审阅，李宗利同志对书稿提出了很多宝贵的修改意见，在此一并表示感谢！

由于水平有限，书中不当之处在所难免，请读者批评指正！

作 者

2006年9月于西北农林科技大学

目 录

第一章 失稳类型与临界荷载计算方法	1
第一节 失稳类型	3
一、分支点稳定	4
二、极值点失稳	6
三、跃越失稳	7
第二节 临界荷载的计算方法	7
一、静力法	7
二、能量法	10
三、弹性屈曲的高阶微分方程	25
习题 1	27
第二章 轴心受压构件的失稳	30
第一节 轴心受压构件的失稳类型	30
第二节 轴心受压构件的弯曲失稳	31
一、理想轴心受压构件的弹性弯曲失稳	32
二、理想轴心受压构件的非弹性弯曲失稳	52
三、初始缺陷对轴心受压构件稳定性的影响	57
第三节 轴心受压构件的扭转失稳	63
一、扭转的类型	63
二、轴心受压构件弹性扭转失稳	68
三、轴心受压构件弹塑性扭转失稳	71
第四节 轴心受压构件的弯扭失稳	72

一、轴心受压构件的弹性弯扭失稳	72
二、轴心受压构件的弹塑性弯扭失稳	77
第五节 轴心受压构件稳定理论在钢结构设计中的应用	77
一、截面边缘纤维屈服准则确定 φ	79
二、压溃理论确定 φ	81
习题 2	83
第三章 压弯构件的失稳	84
第一节 弯矩作用平面内的弹性弯曲失稳	85
一、弯矩作用平面内的弹性弯曲失稳	85
二、压弯构件弯矩作用平面内的稳定理论在钢结构设计中的应用	92
第二节 压弯构件弯矩作用平面外弹性失稳	94
一、压弯构件平面外弹性失稳	94
二、压弯构件弯矩作用平面外的稳定理论在钢结构设计中的应用	103
习题 3	105
第四章 梁的弯扭失稳	107
第一节 梁的弹性弯扭失稳	108
一、支撑条件对梁弯扭失稳临界弯矩的影响	109
二、荷载作用类型对梁弯扭失稳临界弯矩的影响	112
第二节 梁的弯扭失稳理论在钢结构设计中的应用	118
习题 4	119
第五章 刚架的稳定性	121
第一节 刚架的失稳形式	121
第二节 刚架的临界荷载——中性平衡法	123
一、无侧移对称屈曲刚架	123
二、有侧移反对称屈曲刚架	126
第三节 刚架的临界荷载——转角位移法	129
一、梁柱的转角位移方程	130

二、无侧移对称屈曲刚架	133
三、有侧移反对称屈曲刚架	138
第四节 刚架的临界荷载——有限单元法	141
第五节 刚架柱的计算长度	143
一、多层多跨刚架	143
二、单层单跨刚架	151
习题 5	153
第六章 薄板屈曲	154
第一节 小挠度理论板的弹性曲面微分方程	155
一、采用小挠度理论的三个基本假定	155
二、弹性曲面微分方程	156
三、单向均匀受压简支板的弹性失稳荷载	157
第二节 能量法计算板的弹性失稳荷载	160
第三节 不同面内荷载作用下板的弹性失稳	163
一、单向非均匀受压板的弹性失稳	163
二、均匀受剪板的弹性失稳	165
三、一个边缘受压的四边简支板的临界应力	166
第四节 几种边缘荷载共同作用下薄板的临界条件	167
一、用横向加劲肋加强的梁腹板	168
二、同时用横向加劲肋和纵向加劲肋加强的梁腹板	170
三、同时用横向加劲肋、受压区纵向加劲肋及短向加劲肋加强的梁腹板	171
四、偏心受压柱的腹板	171
第五节 板稳定理论在钢结构设计中的应用	172
一、轴心受压构件中板件的局部稳定设计	172
二、受弯构件中板件的局部稳定设计	174
三、压弯构件中板件的局部稳定设计	177

习题 6	180
第七章 拱的稳定性	181
第一节 概述	181
第二节 圆拱的临界荷载	182
第三节 抛物线拱及悬链线拱的临界荷载	189
一、抛物线拱的临界荷载计算公式以及相应的稳定系数	189
二、悬链线拱的临界荷载计算公式以及相应的稳定系数	191
第四节 拱的计算长度系数	192
参考文献	195

第一章 失稳类型与临界荷载计算方法

设计规范规定：在进行建筑结构设计时，必须考虑两种极限状态，即承载力极限状态和正常使用极限状态。承载力极限状态包括：结构、构件的强度和稳定性计算。结构可能出现的承载力极限状态有：（1）结构构件或连接因材料强度被超过而破坏；（2）结构转变为机动体系；（3）整个结构或其中一部分作为刚体失去平衡而倾覆；（4）结构或构件丧失稳定；（5）结构出现过度塑性变形，不适于继续承载；（6）在重复荷载作用下构件疲劳断裂。正常使用极限状态包括：结构、构件达到正常使用或耐久性的某项规定限值。例如，长细比 $\lambda = \frac{l_0}{i} \leq [\lambda]$ ，挠度 $v \leq [v]$ 。对于任何一种结构构件，强度计算是基本的和必不可少的，而对某些受压构件，如钢筋混凝土薄壳，或者高强度材料制成的结构构件，如钢结构构件等，稳定计算比强度计算更为重要。

强度是指由作用对结构构件产生的截面最大内力是否超过截面的承载能力，它是一个应力问题。对绝大多数结构，常以未变形的结构作为计算简图进行分析，所得的变形与作用的关系是线性的，称为几何线性分析，或一阶分析；而某些结构，如张拉结构，必须用变形后的结构作为计算依据，作用与变形呈非线性关系，称为几何非线性分析，或二阶分析。

稳定问题是要找出作用与结构内部抵抗力之间的不稳定平衡状态，即变形开始急剧增长的状态，从而设法避免进入该状态，它是一个变形问题。必须以变形后的体系作为计算依据，用二阶分析方法。

由于结构构件的失稳具有突然性，古今中外由于失稳引起的工程结构倒塌事故屡见不鲜，所以我们应该格外注意。例如，1907年，加拿大圣劳伦斯河上的魁北克桥，在用悬臂法架设桥的中跨桥架时，因桥桁中桥墩附近的下弦杆丧失稳定，导致桥架倒塌，90 000 kN 钢结构变成一堆废铁，正在桥上作业的 86 名工人伤亡 87%。美国哈特福德市体育馆网架屋盖由于网架杆件采用了四个等肢角钢组成的十字形截面，抗扭刚度较差，加上为压杆设置的支撑也不十分有效。该体育馆交付使用后，于 1987 年 1 月 18 日的风雪之夜，压杆扭曲，屋盖瞬间坠毁落地。我国广东鹤地水库溢洪道上的弧形钢闸门，于 1966 年由于库区

刮起 7 级阵风，浪高 0.6 m，波浪反复冲击闸门，使弧门支臂柱失稳，从而导致闸门破坏。

高层建筑钢结构在地震中因失稳而破坏也不乏实例。1985 年 9 月 19 日，墨西哥城湖泊沉淀区发生 8.1 级地震，持续 180 s，只隔 36 h 又发生一次 7.5 级强余震。震后调查表明，位于墨西哥城中心区的一栋综合楼第四层有 3 根钢柱严重屈曲，横向交叉形支撑交叉点的连接板屈曲，纵向桁架梁腹杆屈曲破坏。1994 年美国发生在加利福尼亚州的地震，震害表明，该地区有超过 100 座钢框架发生了梁柱节点破坏。1995 年发生在日本的一次地震中，钢结构发生的典型破坏主要有局部屈曲、脆性断裂和低周疲劳破坏。

对结构构件，强度计算是基本要求，但是对钢结构构件，稳定计算比强度计算更为重要。强度问题与稳定问题虽然均属承载力极限状态问题，但两者之间概念不同。强度问题关注在结构构件截面上产生的最大内力或最大应力是否达到该截面的承载力或材料的强度，因此，强度问题是应力问题；而稳定问题要找出作用与结构内部抵抗力之间的不稳定平衡状态，即变形开始急剧增长的状态，属于变形问题。稳定问题有以下几个特点：

1. 稳定问题采用二阶分析

以未变形的结构来分析它的平衡，不考虑变形对作用效应的影响称为一阶分析；针对已变形的结构来分析它的平衡，则是二阶分析。

2. 不能用叠加原理

应用叠加原理有两个条件：一是材料符合虎克定律，即应力与应变成正比；二是结构处于小变形状态。弹性稳定问题不满足第二个条件，所以二阶分析不能用叠加原理；非弹性稳定计算则两个条件均不满足。因此，叠加原理不适用于稳定问题。

3. 稳定问题不必区分静定和超静定结构

对应力问题，静定和超静定结构内力分析方法不同，静定结构的内力分析只用静力平衡条件即可；超静定结构内力分析则还需增加变形协调条件。在稳定计算中，无论何种结构都要针对变形后的位形分析。既然总要涉及变形，区分静定与超静定就失去意义。

第一节 失稳类型

一个处于平衡状态的刚性球，可以有三种性质不同的平衡状态：稳定平衡、随遇平衡和不稳定平衡状态。如图 1.1a 所示，用实线表示的球，在凹面中处于平衡状态，如果有一侧向力使球偏离平衡位置 B 点，达到图中虚线所示位置，当撤去侧向力，球体在重力作用下，经过振动仍恢复到原来的平衡位置 B 点，则这种平衡状态是稳定的。图 1.1b 中，如果有侧向水平力使其偏离平衡位置 B 点，当撤去水平力后，球体不再回到原来的 B 点，而是停留在新的点（图中虚线所示位置），这种推到何处就停在何处的状态称为随遇平衡状态。图 1.1c 中的球体在凸面顶点 B 处于平衡状态，当有一侧向力使球体离开平衡位置 B 点，撤去侧向力后，球体不仅不能恢复到 B 点，反而继续沿着凸面滚动，远离平衡位置，因此这种平衡状态是不稳定的。

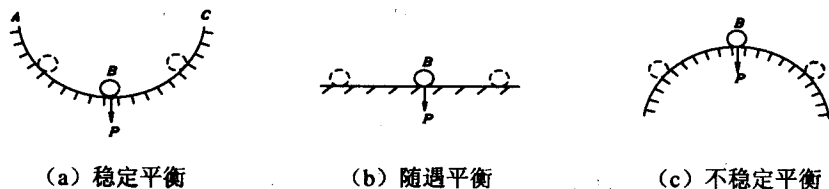


图 1.1 刚体的平衡状态

两端铰接、均质弹性材料的轴心压杆的稳定也有类似的三种平衡状态，如图 1.2 所示。图 1.2a 所示为稳定平衡状态，称为原始平衡状态，图 1.2b 所示为随遇平衡状态，称为临界状态，图 1.2c 所示为不稳定的平衡状态。

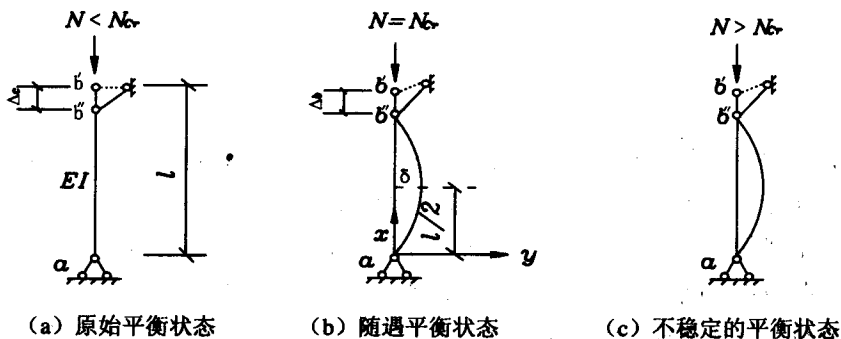


图 1.2 理想轴心压杆的稳定形式

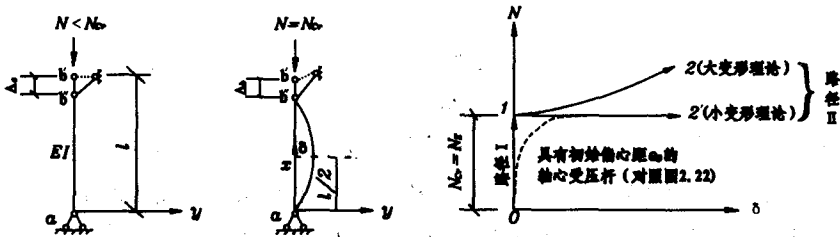
结构的失稳现象就其性质而言，可以分为三类稳定问题：分支点失稳、极值点失稳和跃越失稳。

一、分支点稳定

理想轴心压杆和理想的中面内受压的平板失稳均属于分支点失稳。也称第一类稳定或质变稳定。

图 1.3a 所示，当压力 N 小于临界荷载 N_c ，即当 $N < N_c$ 时，压杆只压缩 Δ_c ，杆处于直线形式的平衡状态，称为原始平衡状态。这时， N 与杆中点侧移 δ 之间的关系，可用 01 表示（图 1.3c），称为原始平衡路径 I。此时，如果杆受到轻微的横向干扰而偏离原始平衡位置，则当干扰消除后，杆将会回到原来的直线状态。可见，原始平衡形式是唯一的稳定平衡形式。

当 $N = N_c$ 时，原始平衡形式不再是唯一的，压杆的平衡状态既可以是直线形式的，也可以是其他形式的，如图 1.3b、c 所示的弯曲形式—12 或 12' (路径 II)。在图 1.3c 中， N_c 表示两端铰接的理想轴心压杆的临界荷载，通常称为欧拉荷载。



(a) 原始平衡状态 (b) 临界状态 (c) N - δ 关系

图 1.3 理想轴心受压构件

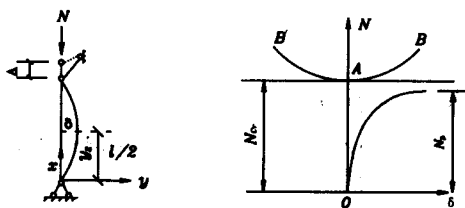
两个平衡路径 I 和 II 的交点 1 称为分支点。在 1 点，路径 I 与新平衡路径 II 同时并存，出现平衡形式的二重性，原始平衡路径 I 由稳定平衡转为不稳定平衡，出现稳定性的转变。具有这种特征的失稳形式称为分支点失稳。分支点对应的荷载称为临界荷载，对应的平衡状态称为临界状态（图 1.3b）。因此，求临界荷载，就是求轴心压杆在直的和微弯的两种形式下都能平衡的荷载。用这个准则计算临界荷载的方法称为中性平衡法。

分支点失稳的定义：原有的平衡形式可能成为不稳定，而出现与原平衡形式有本质区别的新的平衡形式，即结构的变形产生了本质上的突然性变化。

分支点失稳又可以分为稳定分支点失稳和不稳定分支点失稳两种。

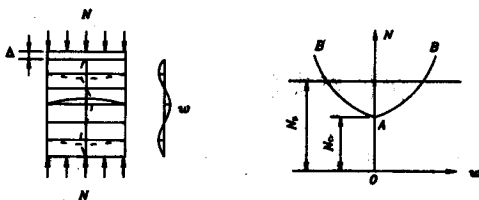
1. 稳定分支点失稳

图 1.3c 所示荷载—位移曲线是根据小挠度理论分析得到的，如按大挠度理论分析，轴心压杆屈曲后，荷载随位移加大而略有增加，但横向位移的增长速度远大于轴向力的提高速度，如图 1.4b 所示。轴心压杆屈曲后，荷载—位移曲线是 AB 或 AB' ，这种平衡状态是稳定的，属于稳定分支点失稳。由于压杆因弯曲变形而产生弯矩，在压力和弯矩的共同作用下，杆件最大



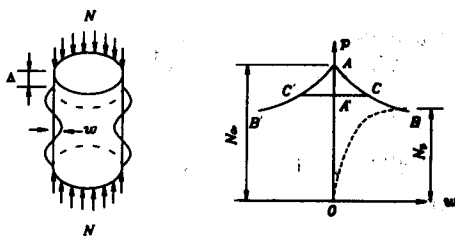
(a) 轴心受压构件 (b) $N-\delta$ 曲线
图 1.4 大挠度弹性理论分析的荷载—位移曲线

弯矩作用截面边缘纤维先屈服，随着塑性发展，压杆很快就达到承载力极限状态，即极限荷载 N_u 。 N_u 与屈服荷载 N_{cr} 相差很小，因此，轴心压杆屈曲后强度并不能被利用。



(a) 中面均匀受压的四边支承薄板 (b) $p-\delta$ 曲线
图 1.5 中面均匀受压的四边支承薄板的荷载—位移关系

对图 1.5a 所示四边有支撑的薄板，当中面均匀压力 N 达到屈曲荷载 N_{cr} 后，板发生凸曲，同时在板中面产生横向薄膜拉应力，牵制了板的变形，使板屈曲后仍能够承受较大的荷载增量，屈曲后板仍处于稳定平衡状态，该板的失稳属于稳定分支点失稳。薄板屈



(a) 均匀受压园柱壳 (b) 荷载—位移曲线
图 1.6 不稳定分支点失稳

曲后荷载—位移曲线如图 1.5b 中的 AB 或 AB' 所示, 由于薄板的极限荷载 N_u 远超过屈曲荷载 N_{cr} , 所以可以利用板屈曲后的强度。

2. 不稳定分支点失稳

如果结构或构件发生分支点失稳后, 只能在远比临界荷载低的条件下维持平衡状态, 则称此类为不稳定分支点失稳。图 1.6a 所示承受均匀压力的圆柱壳的失稳就是不稳定分支点失稳, 荷载—位移曲线如图 1.6b 中的 OAB 或 OAB' 所示。

其他结构的分支点失稳如图 1.7 所示。

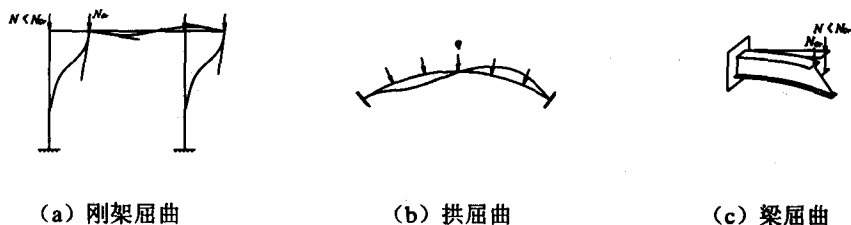


图 1.7 其他结构分支点稳定

二、极值点失稳

图 1.8a 所示偏心受压构件, 作用力 N 的偏心距为 e , 其失稳过程的压力 N —挠度 δ 曲线见图 1.8c。随着压力 N 的增加, 偏心压杆的挠度 δ 也随之增长, 形成曲线的上升段 OA , 压弯构件处于稳定平衡状态; 但是到达曲线的最高点 A 时, 构件的抵抗力开始小于外力作用, 即 A 点为压弯构件承载力的极限点, 表示压弯构件开始丧失整体稳定, N_u 为偏心压杆的最大承载力, 也称为偏心压杆的极限荷载或压溃荷载; A 点之后出现了曲线的下降段 AB , 为了维持构件的平衡状态必须不断降低端部压力

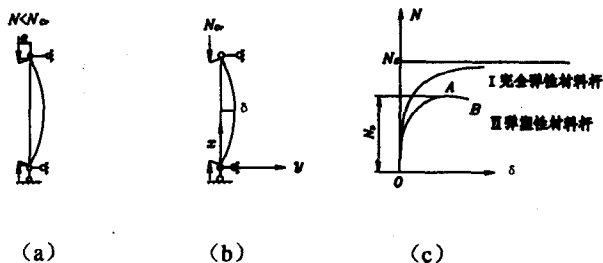


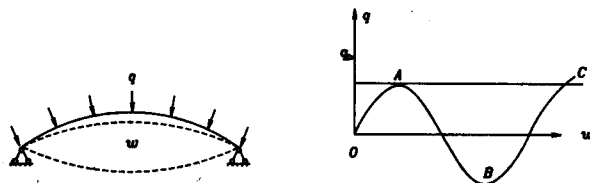
图 1.8 偏心受压构件

N ，构件处于不稳定平衡状态。从压弯构件的失稳过程可知，其压力 N —挠度 δ 曲线只有极值点，没有出现由直线平衡状态向弯曲平衡状态过渡的分支点，构件弯曲变形的性质始终不变，称这种失稳为极值点失稳，也称为第二类失稳。

极值点失稳的定义：结构的弯曲变形将大大发展，而不出现新的平衡形式，即结构的平衡形式不出现分支现象。

三、跃越失稳

对两端铰接的坦拱结构图 1.9，在均布荷载 q 作用下产生挠度 w ，其荷载—挠度曲线图 1.9b，也有稳定的上升段 OA ，但是到达曲



(a) 均布荷载作用下的坦拱 (b) 荷载—挠度曲线
图 1.9 跃越失稳

线的最高点 A 时会突然跳跃到一个非临近的具有很大变形的 C 点，即由向上拱起的位移突然跳到下垂的位形，与 A 点对应的荷载 q_{cr} 为坦拱的临界荷载；下降段 AB 不稳定， BC 段虽然稳定上升，但是因为结构已经破坏而不能被利用。这种结构由一个平衡位形突然跳到另一个非临近的平衡位形的失稳现象称为跃越失稳。跃越失稳既无平衡分支点，又无极值点，但与不稳定分支点失稳又有相似之处，都在丧失稳定平衡后经历一段不稳定平衡，然后达到另一个稳定平衡状态。钢结构油罐、扁球壳顶盖等的失稳也属此种类型。

第二节 临界荷载的计算方法

结构由稳定平衡到不稳定平衡的界限状态称为临界状态。结构处于临界状态时的荷载值称为临界荷载值，即临界力，稳定计算的主要目的在于确定临界荷载值。求临界荷载值的方法很多，可以分为精确计算方法和近似计算方法两大类，其中静力法、能量法分别是两类方法中常用的计算方法。

一、静力法

直接应用平衡条件、几何条件和物理条件来求解结构的内力和位移的方

法，叫静力法。静力法即静力平衡法，也称中性平衡法，是求解临界荷载的最基本的方法。对第一类弹性稳定问题，在分支点存在两个临近的平衡状态：原始直线平衡状态和产生了微小弯曲变形的平衡状态。静力法就是根据已经发生了微小弯曲变形后结构的受力条件建立平衡微分方程，而后解出临界荷载。下面通过两个具体例题来说明静力法的基本原理和计算步骤。

图 1.10a 所示单自由度体系的原始平衡状态，若忽略杆件本身的变形，即 EI 趋于无穷大，则体系只有一个变形自由度，即弹簧支座变形（图 1.10b）。 s 为弹簧支座的刚度系数。

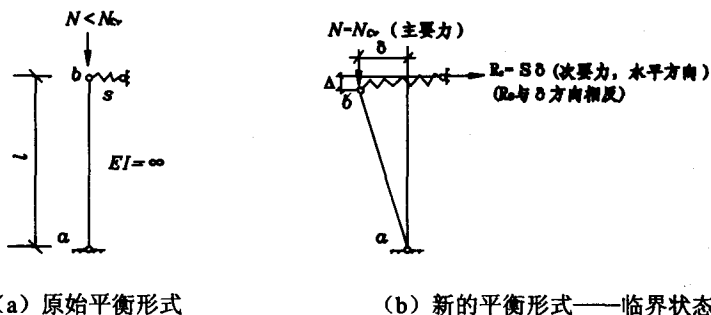


图 1.10 单自由度体系

根据小变形理论，由图 1.10b 可得平衡条件：

$$\sum M_a = 0 \quad N\delta - Rl = 0$$

即：
$$(N - sl)\delta = 0 \quad (1.1)$$

必须指出，在稳定分析中，平衡条件是根据变形后的结构新位置写出的，即临界状态写出的。在应用小变形理论时，由于假设位移 δ 是微量，因而对结构中的各个力要区分主要力和次要力。在图 1.10b 中， N 是主要力，而弹簧支座反力 R_s 是次要力。建立平衡方程时，方程中的各项次应是同级微量。因此，对主要力的项要考虑结构变形对几何尺寸的微量变化，而次要力的项则不考虑几何尺寸的变化。

式 (1.1) 是以线性位移 δ 为未知数的齐次代数方程。这类方程有两类解：零解和非零解。零解， $\delta = 0$ 对应于原始平衡状态；非零解， $\delta \neq 0$ 是新的平衡形式。为了得到非零解，方程 (1.1) 的系数应为零，即：

$$N - sl = 0 \quad (1.2a)$$

称式 (1.2a) 为特征方程，由式 (1.2a) 解得临界荷载：