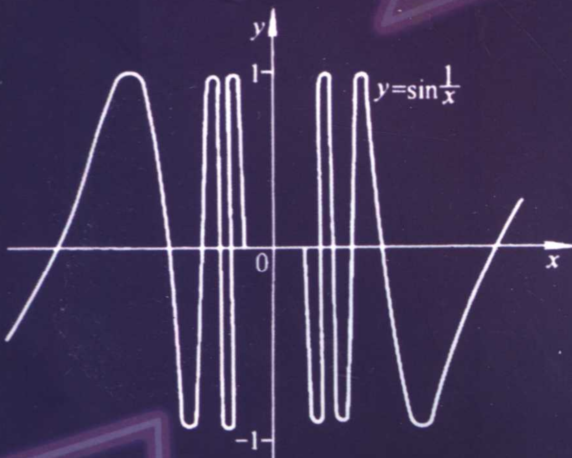
高职高专基础课系列规划教材

应用数学基础学习与提高

尹清杰 杨莉军 主编

（下册）

YINGYONG SHUXUEJICHU XUEXIYUTIGAO



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专基础课系列规划教材

应用数学基础学习与提高

下　册

主　编　尹清杰　杨莉军
副主编　宋志坚　姜泽宏　刘维先
参　编　屈文文　孙成文　付木亮　于育民
主　审　刘　浩

机 械 工 业 出 版 社

本书是机械工业出版社出版的高职高专基础课系列规划教材《应用数学基础 下册》的配套学习指导丛书。全书共五章，精选了不同类型的高等数学试题，内容与教材《应用数学基础 下册》相呼应。每章由内容提要、学习指导、典型例题、习题选解、自测题及自测题参考答案组成。内容丰富，覆盖面广，反映不同的类型、不同层次的教学要求。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础学习与提高. 下册/尹清杰，杨莉军主编. —北京：机械工业出版社，2005.1
（高职高专基础课系列规划教材）
ISBN 7-111-15791-5

Ⅰ.应… Ⅱ.①尹…②杨… Ⅲ.应用数学-高等学校：技术学校-教学参考资料 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 129384 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：郑 玫 宋学敏 版式设计：霍永明 责任校对：吴美英
封面设计：张 静 责任印制：洪汉军
北京京丰印刷厂印刷・新华书店北京发行所发行
2005 年 1 月第 1 版・第 1 次印刷
787mm×1092mm $^{1}/_{16}$・6.75 印张・162 千字
定价：12.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646
68326294、68320718

前　言

本书是依据国家教育部颁布的高职高专院校数学教学大纲编写的，为更好地贯彻“必需、够用、求实、创新”的教学改革思路，促进教学质量的提高，满足学生学习的需要，由长期从事数学教学工作的一线教师，结合高职高专院校数学教学实际和多年教学经验，有针对性地编写而成的。

在编写本书过程中，我们既注意到高职高专院校学生的特点，又注意到初学高等数学时容易产生的一些对基本概念理解不透而产生的错误，着重强调如何掌握基本概念和有关基本理论，着重强调怎样将一个实际问题抽象成数学模型来进行分析和解决，着重强调如何帮助和启发学生总结解题的规律，提高分析和解决实际问题的能力，从而进一步提高广大学生对高等数学的学习热情和积极性。

本书共五章，由尹清杰、杨莉军任主编，参加编写的人员还有宋志坚、姜泽宏、刘维先、屈文文、孙成文、付木亮、于育民等。

感谢河南大学刘浩教授对本书进行全面、细致的审阅。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请专家、同仁和广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第七章　多元函数微积分

在实际生活中,会遇到依赖于两个或两个以上自变量的多元函数.本章在一元函数微积分的基础上介绍多元函数微积分.多元函数微积分和一元函数微积分有很多相似的问题,也有很多不同的问题,需要大家在学习中注意.

内 容 提 要

1. 两点间距离公式

点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$与点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$之间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2. 曲面方程

如果曲面 W 与三元方程$F(x, y, z)=0$有如下关系：曲面上任意点的坐标都满足方程，不在曲面上点的坐标都不满足方程，则称方程 $F(x, y, z)=0$为曲面的方程，曲面为方程的几何图形.

(1) 球面方程　以点(a, b, c)为球心、R 为半径的球面方程为$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.球心在原点的球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

(2) 柱面　平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 的轨迹称为柱面.动直线 l 叫做柱面的母线，定曲线 C 叫做柱面的准线.方程 $F(x, y)=0$, $G(x, z)=0$, $H(y, z)=0$分别表示母线平行于 z 轴、y 轴和 x 轴的柱面.

常见柱面方程有：圆柱面 $x^2+y^2=R^2$；抛物柱面 $x^2=2pz$；双曲柱面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$等.

(3) 旋转曲面　在 yOz 平面上的曲面$f(y, z)=0$绕 z 轴旋转一周所产生的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$；曲面 $f(y, z)=0$绕 y 轴旋转一周所产生的旋转曲面方程为$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

(4) 简单二次曲面　球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$；椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$($p$ 与 q 同号)；旋转抛物面 $z=x^2+y^2$；圆锥面 $z^2=a^2(x^2+y^2)$；双曲抛物面 $z=xy$；单页双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$；双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

3. 二元函数的几何意义

二元函数 $z=f(x, y)$的图形是空间一张曲面，这张曲面在 xOy 坐标面上的投影区域为二元函数$z=f(x, y)$的定义域.

4. 二元函数的极限

函数 $f(x, y)$在开区域(或闭区域)D 内有定义，$p_0(x_0, y_0)$是 D 的内点或边界点，对于

任意给定的正数 ε，如果当点 $p(x, y)\in D$ 无限地接近于点 $p_0(x_0, y_0)$时，恒有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x, y)=A$ 或 $f(x, y)\to A(\rho\to 0)$，其中 $\rho=|pp_0|$.

5. 二元函数的连续性

设函数 $f(x, y)$在开区域(或闭区域)D 内有定义，$p_0(x_0, y_0)$是 D 的内点或边界点，且 $p_0\in D$，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x, y)=f(x_0, y_0)$，则称函数 $z=f(x, y)$在点 p_0 连续.否则，p_0 称为函数 $f(x, y)$的间断点.

如果函数 $f(x, y)$在开区域(或闭区域)D 内的每一点都连续，那么就称函数 $f(x, y)$在 D 内连续或者称函数$f(x, y)$是在 D 内的连续函数.初等二元函数在其定义域内是连续的.

6. 有界闭区域上二元连续函数的性质

1) 有界闭区域上二元连续函数在该区间上必有最大值和最小值.

2) 有界闭区域上二元连续函数必能取得介于它的两个不同函数值之间的任何值至少一次.

7. 偏导数的有关概念

(1) 二元函数的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$也可记为$\dfrac{\partial f}{\partial x}$或$z_x$ 或$f_x(x, y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$也可记为$\dfrac{\partial f}{\partial y}$或$z_y$ 或$f_y(x, y)$.

(2) 二阶偏导数　若函数 $z=f(x, y)$在区域 D 内的偏导数存在，则 $f_x(x, y)$,$f_y(x,y)$一般仍为 x，y 的函数，可以继续对 x 或y 求偏导数，这就是二阶偏导数.这样的偏导数共有四个，它们是 z_{xx}、z_{yy}、z_{xy}、z_{yx}.

(3) 全增量　$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$.

(4) 全微分　如果函数 $z=f(x, y)$在点 $p(x, y)$的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$，可表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中 A、B 不依赖于Δx、Δy，而仅与 x、y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x, y)$在点 $p(x, y)$可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数$z=f(x, y)$在点 $p(x, y)$的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即 $\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$.如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称这个函数在 D 内可微分.

8. 偏导数与全微分的关系

偏导数存在是全微分存在的必要条件；偏导数连续是全微分存在的充分条件.可见，二元函数的全微分存在的充分条件与必要条件不同.二元函数的全微分与一元函数的微分是有区别的.二元函数的全微分计算公式为 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

9. 全微分在近似计算中的公式

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)\approx f(x, y)+f_x(x, y)\Delta x+f_y(x, y)\Delta y$$

10. 多元函数极值

设函数 $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某一邻域内有定义，对于该邻域内异于点(x_0, y_0)的

点(x, y)，如果都有不等式$f(x, y) < f(x_0, y_0)$成立，则在点(x_0, y_0)处有极大值$f(x_0, y_0)$；如果都有不等式$f(x, y) > f(x_0, y_0)$成立，则在点(x_0, y_0)处有极小值$f(x_0, y_0)$，极大值和极小值统称为极值.使函数取得极值的点叫做极值点.

驻点　使$f_x(x, y)=0$，$f_y(x, y)=0$同时成立的点.

条件极值　对自变量有附加条件的极值问题.对自变量的附加条件叫做约束条件.

无条件极值　对自变量无附加条件的极值问题.

11. 极值的必要条件

偏导数存在的极值点必定是驻点，但函数的驻点不一定是极值点.

12. 极值的充分条件

求二元函数$z=f(x, y)$的极值的一般步骤(若二元函数的二阶偏导数连续)为：

第一步　求出f_x，f_y，f_{xx}，f_{xy}，f_{yy}.

第二步　解方程组$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$，即求出所有的驻点(如果驻点存在).

第三步　求出$z=f(x, y)$在每一个驻点$P_0(x_0, y_0)$处的二阶偏导数的值

$$A=f_{xx}(x_0, y_0),\ B=f_{xy}(x_0, y_0),\ C=f_{yy}(x_0, y_0)$$

第四步　作以下判断：

1) 当$B^2-AC<0$时，点$P_0(x_0, y_0)$是极值点.且当$A<0$时，点$P_0(x_0, y_0)$是极大值点；当$A>0$时，点$P_0(x_0, y_0)$是极小值点.

2) 当$B^2-AC>0$时，点$P_0(x_0, y_0)$不是极值点.

3) 当$B^2-AC=0$时，不能判断点$P_0(x_0, y_0)$是否为极值点.

注意,以上方法只适用于二元函数.

13. 求函数$z=f(x, y)$在条件$\varphi(x, y)=0$下的条件极值的方法

方法1(转化为无条件极值的问题)

约束条件$\varphi(x, y)=0$确定变量y为变量x的函数，并能求出这个函数的显式表达式$y=y(x)$，将它代入$z=f(x, y)$中，条件极值问题可化为无条件极值.其前提是要把方程$\varphi(x,y)=0$确定的隐函数显化为$y=y(x)$，但这种"显化"往往比较困难，甚至是不可能的，因此该方法不具普遍性.

方法2(拉格朗日乘数法)

第一步　作辅助函数$L(x, y, z)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$，其中，$\lambda$称为拉格朗日乘数(或乘子).

第二步　解方程组$\begin{cases} L_x=f_x(x, y)+\lambda\ \varphi_x(x, y)=0 \\ L_y=f_y(x, y)+\lambda\ \varphi_y(x, y)=0 \\ \varphi(x, y)=0 \end{cases}$，此方程组的解$(x_0, y_0)$就是可能的极值点.

第三步　根据实际问题，可以判定点(x_0, y_0)是否为极值点.

注意，这种方法可以推广到自变量多于两个或约束条件多于一个的情形.

14. 二重积分的性质

性质1　当k为常数时，$\iint\limits_D kf(x, y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$.

性质 2　$\iint\limits_D [f(x,\ y) \pm g(x,\ y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$.

性质 3　对区域具有可加性

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma \quad (D = D_1 + D_2)$$

性质 4　若 σ 为 D 的面积，有 $\sigma = \iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma$.

性质 5　若在 D 上 $f(x,\ y) \leqslant g(x,\ y)$，则有 $\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$.

特殊地
$$\left|\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,\ y)|\mathrm{d}\sigma$$

性质 6　设 M、m 分别是 $f(x,\ y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值，σ 为 D 的面积，则

$$m\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma \quad \text{（二重积分估值不等式）}$$

性质 7　设函数 $f(x,\ y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 为 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 $(\xi,\ \eta)$，使得 $\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\ \eta)\sigma$（二重积分中值定理）.

15. 二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是曲顶柱体的体积；当被积函数小于零时，二重积分是曲顶柱体的体积的负值.

16. 二重积分

设 $z = f(x,\ y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_i$，…，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i,\ \eta_i)$，作乘积 $f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$，如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数 $z = f(x,\ y)$ 在闭区域 D 上的二重积分.记为 $\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$$

计算二重积分时，要根据被积函数及积分区域的形状选择适当的坐标（直角坐标、极坐标）及适当的积分次序.由于累次积分的次序不同，其计算的难易程度也不完全相同，有的定积分甚至不能计算，所以，选择适当的积分次序，可使计算变得简单.

(1) 交换积分次序的步骤

1) 由所给累次积分的两次积分限，找出积分区域 D，并作出草图.

2) 把积分区域 D 分成一个或几个类型的积分区域.

3) 确定另一个积分次序的积分限.

(2) 将二重积分化为累次积分的步骤

1) 确定积分的次序（先积 x 后积 y 或先积 y 后积 x 的问题），其原则是使两个定积分都能积出来且计算尽量简单.

2) 确定累次积分的积分限：先作出积分区域 D 的图形. 在直角坐标系中，如果积分区域 D 可以表示为 $a\leqslant x\leqslant b$，$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，$f(x, y)$ 在 D 上连续，则有

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

如果积分区域 D 可以表示为 $c\leqslant y\leqslant d$，$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$

且 $f(x, y)$ 在 D 上连续，则有

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x$$

如果积分区域 D 既可以表示为 $a\leqslant x\leqslant b$，$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，又可以表示为 $c\leqslant y\leqslant d$，$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$，且 $f(x, y)$ 在 D 上连续，则有

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x$$

特别，当积分区域 D 为矩形时，$a\leqslant x\leqslant b$，$c\leqslant y\leqslant d$，$f(x, y)$ 在 D 上连续，则有

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x$$

3) 在极坐标系中，一般先对 r 积分，后对 θ 积分. 先用过极点的半射线穿 D 域，r 积分的积分限的下限是穿进 D 域之点所在的曲线的极坐标方程，上限是穿出 D 域之点所在的曲线的极坐标方程；对 θ 积分的积分限的下限是极径对应的最小角度，上限是极径对应的最大角度. 对于被积函数或积分区域的边界方程中含 x^2+y^2 时，使用极坐标系往往能简化运算.

4) 计算技巧：只有当积分区域 D 对称，且被积函数在 D 上也对称时，才可将二重积分化为部分区域上二重积分的若干倍来计算. 如果区域 D 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint\limits_{D/2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{当} f(x, -y) = f(x, y) \\ 0 & \text{当} f(x, -y) = -f(x, y) \end{cases}$$

如果区域 D 关于 y 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint\limits_{D/2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{当} f(-x, y) = f(x, y) \\ 0 & \text{当} f(-x, y) = -f(x, y) \end{cases}$$

如果区域 D 关于 x 轴和 y 轴对称，则

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 4\iint\limits_{D/4} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y & \text{当} f(x, -y) = f(-x, y) = f(x, y) \\ 0 & \text{当} f(x, -y) = -f(x, y) \text{或} f(-x, y) = -f(x, y) \end{cases}$$

17. 二重积分的应用

几何应用为平面图形的面积，空间几何体的体积；物理应用为平面薄片的重心，不均匀薄片的质量.

学习指导

1. 重点和难点

重点　多元函数的偏导数(二元函数为主要研究对象)、全微分、极值、最值；二重积分的计算及应用.

难点　多元函数的偏导数，极值、最值；二重积分的计算及应用.

2. 学习中应注意的问题

1) 记号$\frac{\partial z}{\partial x}$是一个不能分开的整体.单独的记号"$\partial x$"没有意义，这与一元函数 $y=f(x)$的导数记号$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可以分开(看成 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的商)是不同的.

2) 求多元函数的偏导数，只要对所讨论的自变量求导，而把其他变量看作常量，按一元函数的求导方法进行求导即可.

3) 与一元函数类似，二元可微函数的极值点一定是驻点，但对不可微函数来说，极值点不一定是驻点.例如，点(0，0)是函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$的极小值点，但点(0，0)并不是驻点，因为函数在该点偏导数不存在.因此，二元函数的极值点可能是驻点，也可能是偏导数中至少有一个不存在的点.

4) 有界闭区域 D 上的连续函数一定有最值.如果使函数取得最值的点在区域 D 内部，则对可微函数讲，这个点必然是函数的驻点，或者是一阶偏导数中至少有一个不存在的点.函数的最值也可能在该区域的边界上取得.

求有界闭区域 D 上二元函数的最值时，首先要求出函数在 D 内的驻点、一阶偏导数不存在的点处的函数值及该函数在 D 的边界上的最值，比较这些值，其中最大者，就是该函数在闭域 D 上的最大值，最小者就是该函数在闭区域 D 上的最小值.

求二元函数在区域 D 上的最值往往比较复杂，但是，如果根据问题的实际意义，知道函数在区域 D 内存在最值，又知函数在 D 内可微，且只有惟一的驻点，则该点处的函数值就是所求的最值.

5) 在二重积分的定义中，对闭区域的划分是任意的.

6) 当$f(x，y)$在闭区域 D 上连续时，二重积分定义中的和式的极限必存在，即二重积分必存在.

7) 极限、连续是多元函数微分学中最基本的概念，它们与一元函数相应概念有密切关系，在一点处连续则极限一定存在，但极限存在却不一定连续.

多元函数的极限问题：①讨论极限的存在性：要证明二重极限存在，一定要用定义去证.要证明极限不存在，则只要能找出两条不同的路线，沿这两条路线的极限值不相同就行了.②求极限问题：求二重极限可按一元函数求极限类似的运算法则和方法去计算.

8) 对于分段函数，像在一元函数中一样，其偏导数也必须分两步考虑，先求出每一分段表达式的偏导函数，再用定义求出每一分段点处的偏导数.一般地，分段函数的导函数仍然是一个分段函数.

9) 同一元函数类似，在研究一个多元函数的极值问题时，通常也是分两步来进行讨论.

先根据必要条件求出可能的极值点(亦称稳定点或原主点)，再运用充分条件判定稳定点是否为极值点，至于应用问题，有时我们可以直接判断出是否为极值(或最值)，不必再用充分条件.

极值问题中，条件极值应用更为广泛，对于条件极值，利用拉格朗日乘数法可以找出可能的极值点，至于此点是否为极值点，可以从具体问题的实际意义中判断.

10) 用定义讨论二重积分的存在性，一般来说都比较困难，可对比曲顶柱体的体积、平面薄板的质量的求法来理解二重积分. 还要注意，连续函数在闭区域上和二重积分一定存在，也就是说无论区域怎样划分，$(\xi_i,\ \eta_i)$怎样选取，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$ 的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$ 总惟一存在.

二重积分是一具体数值，它只与被积函数 $z=f(x,\ y)$和积分区域 D 有关.

11) 二重积分的计算方法有两种，一种是直角坐标系下的计算方法；另一种是极坐标系下的计算方法. 两种方法都是将二重积分化成二次积分，通过计算两个定积分来求出二重积分的值.

具体步骤为：①根据积分区域 D 的边界曲线方程，画出区域 D 的草图. ②按区域 D 的形状和被积函数的形式选择适当的坐标系和适当的积分次序，并确定积分的上限和下限. 当积分区域是圆形域、扇形域或者是其中一部分，或被积函数是 x^2+y^2 的函数，一般用极坐标计算. ③计算二次积分.

典型例题

例 1　一般二次方程 $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Iz+J=0$ 当二次项系数不全为零时必定表示二次曲面吗?

【分析】　这是一个很容易被学生误解的问题. 二次曲面是指以二次曲线为准线的柱面、椭圆、锥面、椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面、椭圆抛物面及双曲抛物面等诸类曲面，例如下面各二次方程均不表示二次曲面：

1) $x^2+4y^2+9z^2+4xy+12yz+6zx-4x-8y-12z+3=0$ 可化为$(x+2y+3z-3)(x+2y+3z-1)=0$，故知它表示两个平行平面 $x+2y+3z=3$ 及 $x+2y+3z-1=0$

2) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ 可化为$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$，故知它表示一条直线 $x=y=z$.

3) $x^2+y^2+4z^2-2x-4y-8z+9=0$ 可化为$(x-1)^2+(y-2)^2+4(z-1)^2=0$，故知它表示一个点(1, 2, 1).

4) $x^2+y^2+z^2+1=0$ 在实数范围内无解，即无图像.

答　不一定. 二次方程在某些情况下，可能表示平面、直线、点，甚至无图像. 这与平面解析几何中二元二次方程不一定都表示二次曲线的情形类似.

例 2　设 $z=\sin(xy)-\sqrt{1+y^2}$，求 $z\Big|_{\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)}$.

【分析】　$\left(\dfrac{\pi}{2},\ 1\right)$是定义域内的点，由初等二元函数在其定义域内是连续的，则可直接

代入求解.

解 $z\Big|_{\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 1\right)-\sqrt{1+1^2}=1-\sqrt{2}$

例 3 求函数 $f(x,\ y)=\sqrt{2y-x^2}\ln(8-x^2-y^2)$ 的定义域，并作出定义域的草图.

【分析】 学习二元函数定义时，注意自变量的取值范围及它们与因变量的对应关系.求二元函数 $f(x,\ y)$ 的定义域，就是在实数范围内，求能使二元函数 $f(x,\ y)$ 的解析式在 xOy 平面上有意义的点 $(x,\ y)$ 的集合.该点集一般是一个平面区域(或者是一条曲线、一个点或空集).

解 欲使函数有意义，必须使 $\begin{cases}2y-x^2\geqslant 0\\ 8-x^2-y^2>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}y\geqslant\dfrac{x^2}{2}\\ x^2+y^2<8\end{cases}$ 所以定义域为 $D=\left\{(x,\ y)\,\middle|\, y\geqslant\dfrac{x^2}{2}\text{且 } x^2+y^2<8\right\}$，其图形如图 7-1阴影部分所示，包括抛物线 $2y=x^2$ 在圆 $x^2+y^2=8$ 内的实线部分.

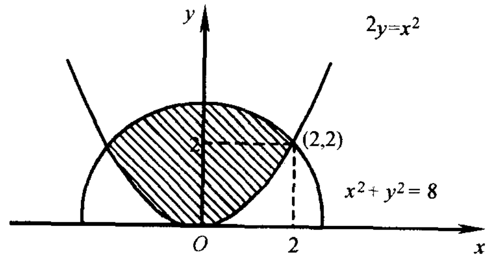


图　7-1

例 4 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

【分析】 在一元函数 $y=f(x)$ 的极限定义中，点 x 只是沿 x 轴趋向于点 x_0，但二元函数极限的定义中要求点 $p(x,\ y)$ 以任意方向趋向于点 $p_0(x_0,\ y_0)$，一般比较复杂，但有时可转化为一元函数的极限问题，可设 $x=u\cos\theta$，$y=u\sin\theta$，则 $x^2+y^2=u^2$.

解 令 $u^2=x^2+y^2$，因为当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时 $u\to 0$，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u^2}{u^2}=1.$$

例 5 设 $z=x^2+xy^2$，求 $z_x(1,\ 2)$.

【分析】 求函数在一点处的偏导数，一般有三种解法.

解法 1 用偏导数的定义求解

$$z_x(1,\ 2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x,\ 2)-f(1,\ 2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)\times 2^2]-[1^2+1\times 2^2]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+6)=6.$$

解法 2 求函数在一点处的偏导数是指函数的偏导函数在一点处的值.可先将 y 看作常数，对 x 求偏导数 $z_x(x,\ y)=2x+y^2$，然后代入 $x=1$，$y=2$，从而 $z_x(1,\ 2)=2\times 1+2^2=6$.

解法 3 先将二元函数转化为一元函数，再对 x 求导数，由于 $z(x,\ 2)=x^2+4x$，则 $z_x(x,\ 2)=2x+4$，从而 $z_x(1,\ 2)=2\times 1+4=6$.

说明 以上三种解法中解法 2 较为常用，解法 3 较简单.

例 6 设 $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$，求 $\mathrm{d}u\big|_{(1,\ 1,\ 1,\ )}$.

【分析】 求函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 在点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 处的全微分，只需求出该点处的偏导

数 $u_x(x_0, y_0, z_0)$，$u_y(x_0, y_0, z_0)$，$u_z(x_0, y_0, z_0)$代入全微分公式就可以了，另一方面，也可以运用微分法则 $\mathrm{d}(u \pm v \pm w)=\mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v \pm \mathrm{d}w$，$\mathrm{d}(uvw)=uv\mathrm{d}w+uw\mathrm{d}v+vw\mathrm{d}u$ 及一阶全微分形式的不变性，来直接计算函数的全微分，这时自变量微分 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ 前面的系数就是相应的偏导数.

解法 1 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=\left.\dfrac{1}{z}\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}\dfrac{1}{y}\right|_{(1,1,1)}=1$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=\left.\frac{1}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right|_{(1,1,1)}=-1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=\left.\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\ln\frac{x}{y}\left(-\frac{1}{z^2}\right)\right|_{(1,1,1)}=0$$

所以　$\left.\mathrm{d}u\right|_{(1,1,1)}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}y+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$

解法 2 两边同时取对数，有 $\ln u=\dfrac{1}{z}(\ln x-\ln y)$；两边求微分，得

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{u}\right|_{(1,1,1)}=\left.\left[-\frac{1}{z^2}\mathrm{d}z(\ln x-\ln y)+\frac{1}{z}\left(\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{y}\mathrm{d}y\right)\right]\right|_{(1,1,1)}$$

又 $u(1,1,1)=1$，则有 $\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

解法 3 由 $u(x,1,1)=x$ 得$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=1$；由 $u(1,y,1)=\dfrac{1}{y}$得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=\left.-\frac{1}{y^2}\right|_{y=1}=-1$$

由 $u(1,1,z)=1$ 得$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=0$

则 $\left.\mathrm{d}u\right|_{(1,1,1)}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}y+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$

例 7 求由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定的函数 $z=z(x,y)$在点$(1,0,-1)$处的全微分 $\mathrm{d}z$.

【分析】 思路和例 6 类似.本题为隐函数求全微分.

解法 1 先求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.方程两边对 x 求偏导，得 $yz+xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{x+z\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$

代入 $x=1$，$y=0$，$z=-1$ 得$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0,-1)}=1$，方程两边对 y 求偏导，得

$$xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{y+z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$$

代入 $x=1$，$y=0$，$z=-1$,得　$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)}=-\sqrt{2}$

所以 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(1,0,-1)}=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0,-1)}\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y.$

解法2 先求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.根据偏导数定义，先将 $y=0$ 代入方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$，得 $x^2+z^2=2$.

两边对 x 求偏导，有 $2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$，再代入 $x=1$，$z=-1$，得$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0,-1)}=1$，将 $x=1$ 代入方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$得 $yz+\sqrt{1+y^2+z^2}=\sqrt{2}$即 $1+y^2+z^2=(\sqrt{2}-yz)^2$.

两边对 y 求偏导，再代入 $y=0$，$z=-1$ 得$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)}=-\sqrt{2}$，所以

$$\left.dz\right|_{(1,0,-1)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0,-1)}dx+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)}dy=dx-\sqrt{2}dy.$$

解法3 对方程的两端求全微分，得 $yzdx+xzdy+xydz+\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$ 在点$(1,0,-1)$处得 $-dy+\frac{dx-dz}{\sqrt{2}}=0$，即 $dz|_{(1,0,-1)}=dx-\sqrt{2}dy$.

例8 已知 $z=f^2(xy)+g(x^2,x+y)$，其中 f，g 可微，求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

【分析】 求抽象函数的偏导数有一定的难度，计算时最好用记号 f'，g_1'，g_2'等.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2f(xy)f'y+g_1'2x+g_2'\times 1=2yff'+2xg_1'+g_2'$.

例9 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

1) 试计算 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$；

2) 证明 $f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

【分析】 1) 求函数在分段点处的偏导数必须按定义计算.

解 由偏导数定义有 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

【分析】 2) 证明函数在一点处不连续，可依据连续定义(在该点有定义，极限存在且等于该点的函数值)，只要有一条不满足连续定义即可.

证明 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0$

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=\sqrt{x}\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=\sqrt{x}\to 0}}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

沿两条路径趋于$(0,0)$极限不相等，函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$处极限不存在，所以 $f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

例10 求函数 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2+1$ 的极值.

【分析】 求函数极值问题可以用列表的方法，比较清晰，一目了然.

解 1）求偏导数 $f_x(x, y)=3x^2-8x+2y$，$f_y(x, y)=2x-2y$

$$f_{xx}(x, y)=6x-8，f_{xy}(x, y)=f_{yx}(x, y)=2，f_{yy}(x, y)=-2$$

2）解方程组$\begin{cases}f_x(x, y)=3x^2-8x+2y=0\\ f_y(x, y)=2x-2y=0\end{cases}$，得驻点(0，0)及(2，2).

3）列表判定极值点

驻点(x_0, y_0)	A	B	C	$\Delta=B^2-AC$ 的符号	结论
(0，0)	$-8<0$	2	-2	$-$	极大值 $f(0, 0)=1$
(2，2)	4	2	-2	$+$	$f(2, 2)$不是极值

例 11 在 xOy 坐标面上找出一点 P，使它到三点 $P_1(0, 0)$、$P_2(1, 0)$、$P_3(0, 1)$距离的平方和为最小.

【分析】 这是一个几何应用问题，由问题的实际意义，到三点距离平方和最小的点一定存在.

解 设 $P(x, y)$为所求之点，l 为 P 到 P_1、P_2、P_3 三点距离的平方和，即

$$l=|PP_1|^2+|PP_2|^2+|PP_3|^2$$

因为 $|PP_1|^2=x^2+y^2$，$|PP_2|^2=(x-1)^2+y^2$，$|PP_3|^2=x^2+(y-1)^2$

所以 $$l=x^2+y^2+(x-1)^2+y^2+x^2+(y-1)^2=3x^2+3y^2-2x-2y+2$$

对 x、y 求偏导数，有 $l_x=6x-2$，$l_y=6y-2$

令$\begin{cases}l_x=0\\ l_y=0\end{cases}$，即$\begin{cases}6x-2=0\\ 6y-2=0\end{cases}$，解方程组得驻点$\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

由问题的实际意义，到三点距离平方和最小的点一定存在，函数 l 可微，又只有一个驻点，因此$\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$即为所求之点.

例 12 欲做一容积为 V 的无盖长方体水箱，当长、宽、高各为多少时用料最省？

【分析】 条件极值问题可以用拉格朗日乘数法或转化为非条件极值两种方法求解.

解法 1 设水箱的长、宽、高分别为 x，y，z，则目标函数即为水箱的表面积 A.

$$A=xy+2(xz+yz)\{x>0, y>0, z>0\} \quad (约束条件为\ xyz=V)$$

作拉格朗日函数 $L(x, y, z)=xy+2(xz+yz)+\lambda(xyz-V)$

解方程组 $\begin{cases}L_x=y+2z+\lambda yz=0\\ L_y=x+2z+\lambda xz=0\\ L_z=2x+2y+\lambda xy=0\\ xyz=V\end{cases}$，得 $x=y=\sqrt[3]{2V}$，$z=\dfrac{V}{xy}=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$.

这是定义域内惟一的可能极值点.由实际问题意义可知,水箱用料面积的最小值存在,所以这个可能极值点就是最小值点,即当水箱的长与宽均为$\sqrt[3]{2V}$,高为$\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$时,用料最省.

解法 2 上面的条件极值问题也可以转化为无条件极值来解.由于 $z=\dfrac{V}{xy}$，则

$$A=xy+\frac{2V}{xy}(x+y)=xy+\frac{2V}{x}+\frac{2V}{y}$$

解方程组$\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial x}=y-\dfrac{2V}{x^2}=0\\\dfrac{\partial A}{\partial y}=x-\dfrac{2V}{y^2}=0\end{cases}$求得惟一驻点($\sqrt[3]{2V}$，$\sqrt[3]{2V}$)，这时 $z=\dfrac{V}{xy}=\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$. 由实际问题意义可知，最小值一定存在. 因此当水箱的长与宽均为$\sqrt[3]{2V}$，高为$\dfrac{\sqrt[3]{2V}}{2}$时，用料最省.

例 13 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}d\sigma$. 其中，$D$ 是由直线 $y=x$，$y=1$ 与 y 轴所围成.

【分析】 重积分的计算最终归结为计算单积分(即定积分)，即化为累次积分后进而求定积分的计算. 关键是适当选择积分坐标系及确定积分限. 积分次序的选择，不仅要看积分区域的特点，而且要考虑到被积函数的特点. 原则是既要使计算能进行，又要使计算尽可能的简便.

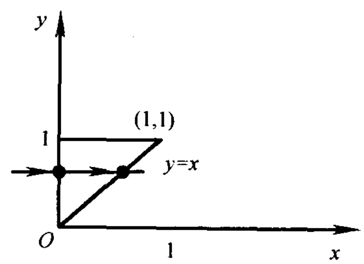


图 7-2

解 1) 画出积分区域 D，如图 7-2 所示，求出边界曲线的交点(1, 1)、(0, 0)、(0, 1).

2) 由图可见，这个二重积分采用哪一种积分次序，都不会出现区域 D 分块计算的情形. 但是，如果先对 y 积分，后对 x 积分，e^{-y^2}就无法积分(它的原函数不是初等函数)，因此只能采取先对 x 积分，后对 y 积分的积分次序进行计算，有

$$\iint\limits_D e^{-y^2}d\sigma=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1[e^{-y^2}x]_0^y dy$$

$$=\int_0^1 e^{-y^2}y\,dy=-\frac{1}{2}[e^{-y^2}]_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

例 14 把二重积分 $I=\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma$ 化为极坐标系中的累次积分. 其中，D 是圆 $x^2+y^2=2Ry$ 所围成的区域.

【分析】 在极坐标系中，一般先对 r 积分，后对 θ 积分.

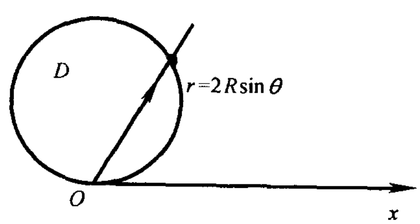


图 7-3

解 1) 画出积分区域 D，如图 7-3 所示，把 D 的边界曲线 $x^2+y^2=2Ry$ 化为极坐标方程，即为 $r=2R\sin\theta$.

2) 定出积分限. 先对 r 积分，后对 θ 积分，原点不在域 D 内部，θ 的变化范围是$[0,\ \pi]$，把 θ 看作是常量，把 r 看作是变量，在$[0,\ \pi]$中任作射线与域 D 边界交两点 $r_1=0$，$r_2=2R\sin\theta$，则按照所述积分限确定法，有

$$\iint\limits_D f(x,\ y)d\sigma=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2R\sin\theta}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,dr$$