中國科學技術典籍通彙

任繼愈 主編

河南教育出版社

中國科學技術典籍通彙

數學卷 五

郭書春 主編

河南教育出版社

（豫）新登字03號

責任編輯 雪　鴻
封面設計 秘金通

中國科學技術典籍通彙
數學卷（一——五册）

出　版　河南教育出版社
總發行　河南教育出版社
　　　　中國·鄭州
印　刷　上海古籍印刷廠
　　　　中國·上海
版　次　一九九三年六月第一版
　　　　一九九三年六月第一次印刷
開　本　十六分之一（787×1092mm）
印　張　四六七·五
插　頁　二二

ISBN　7－5347－1358－7/Z·35

中國科學技術典籍通彙　數學卷

主　編　郭書春

副主編　王渝生　韓　琦

編　委（以姓氏筆劃爲序）

王渝生　孔國平　李小娟　何紹庚　郭書春

趙澄秋　韓　琦

中國科學技術典籍通彙　數學卷（第五分册）

目録

開方説提要

劉鈍

《開方説》是清代中葉數學家李鋭(一七六九—一八一七)系統論述方程論的著作。

李鋭又名向,字尚之,號四香,江蘇元和(今蘇州)人。先世原居河南,父李章堉係乾隆年進士,曾官河南伊陽(今汝陽)知縣、兵部主事等職。李鋭「幼開敏,有過人之資,從書塾中撿得《算法统宗》,心通其義,遂爲九章八綫之學。」(阮元《李尚之傳》,《揅經室二集》卷四)及長,考爲元和縣生員,又在錢大昕主持的紫陽書院接受文史以及天文、數學方面的綜合教育。錢大昕對李鋭的才華十分欣賞,「遇有疑義輒與鋭商榷。」(羅士琳《續疇人傳》卷五十)在此期間,李鋭主要學習了古代各家曆法以及明代行用的大統曆及回曆,同時與焦循討論天文、數學問題。

乾隆六十年(一七九五),阮元任浙江學政時,開始籌劃編纂傳記體天文、數學史著作《疇人傳》,邀請李鋭前往杭州擔任主筆。這部書以曆法沿革爲主綫,共收録自遠古至清初的中外曆算家三百一十六人。每一人物皆分「傳」、「論」兩部分:傳主要是原始文獻之薈萃,論是編者對傳主的簡要評語。没有對中國古代天文、數學的全面知識的研究和博覽群書的條件,是難以勝任這一工作的。在此期間,李鋭經常往來於蘇、杭之間,得以瀏覽江南諸多藏書家所收各種珍籍秘本以及文瀾閣《四庫全書》抄本。對中國古代天文、數學中的一些重要作品進行了研究。在天文學方面,他先後對三統、四分、乾象、奉元、占天、淳祐、會天、大明、大統等曆法進行了疏解,其中前五種有書稿留存從而被編入《李氏遺書》。在數學方面,他先後整理校勘了《測圓海鏡》、《益古演段》、《緝古算经》、《數書九章》等,又於嘉慶三年(一七九八)撰成《弧矢算術細草》。次年(一七九九)春,讀《宋書·律曆志》,對内中所載周琮轉述何承天調日法有所悟,撰成《日法朔余強弱考》,不但正確闡述了「於強弱之際以求日法」的數學意義,而且提出了一種基於求一術的二元一次不定方程解法。同年秋季,《疇人傳》全書編竣。

李鋭在經學方面也頗有造詣,曾協助阮元校刊《周易》、《春秋·穀梁傳》、《孟子》等,其成果已載入阮元編纂的《十三經注疏》之中。他自撰的《召誥日名考》則被收入《李氏遺書》。

在杭州時,李鋭與焦循同居阮元官署之內,得以朝夕相處,共論經史和天文曆算之學,又通過焦循介紹了解到汪萊

的工作。李鋭在讀到汪萊《衡齋算學》第五册書稿之後，將其中的九十六條「可知」與「不可知」歸納爲三例，其中第一例相當於説係數序列有一次變號的高次方程只有一個正數，第三例相當於説係數序列有偶數次變號的高次方程不會只有一個正根，它們與十六世紀意大利數學家卡當(G·Cardano)提出的兩個命題幾乎雷同。第二例則不夠精確，後來汪萊舉出了一個反例加以反駁。李鋭的短文也被汪萊收入到他的《衡齋算學》第六册中。

嘉慶十年(一八〇五)，李鋭應當時的揚州太守張敦仁之邀前往，與焦循、汪萊、凌廷堪、沈欽裴等人經常相聚切磋學問，其中李鋭、焦循、汪萊三人被時人目爲「談天三友」。張敦仁在幕客幫助下先後撰寫《緝古算經細草》、《求一算術》、《開方補記》諸書，均請李鋭過目校算。他覓得宋版《九章算術》(殘五卷)、《孫子算經》、《張丘建算經》等珍本後，李鋭得以閲覽并以微波榭本《算經十書》加以對校。在此之後的兩、三年内，李鋭的主要興趣集中在對《九章算術》的研究上，於嘉慶十一年(一八〇六)分别完成《勾股算術細草》和《方程新術草》，稿成後都曾寄給在北京任工部左侍郎的李潢。李潢當時也在研究《九章算術》等古代數學經典，後來在其《九章算術細草圖説》中就採納了李鋭的部分成果。當時數學上有「南北二李」之稱，指的就是李潢和李鋭。

嘉慶十五年(一八一〇)，李鋭由南方到北京參加順天府鄉試，如同前幾次科舉考試一樣，這一次也未獲得成功，但他在北京期間却見到神交已久的李潢，兩人多次晤談或通過書信交流彼此的研究心得。在京期間他還收得弟子黎應南。

李鋭對古算珍籍十分重視，除了前面已提到的曾對多部古算書進行過校釋外，又曾親自購得梅文鼎手録之明清之際頗爲流行而後稀見的《歐邏巴西鏡録》，此書後由焦循另抄一部，得以流傳至今。居留北京期間，他還從李潢處讀到阮元録自《永樂大典》的多部算書。晚年又曾整理過《楊輝算法》和《四元玉鑑》等，後因體力不支未能卒業，以致後來阮元歎道：「惜乎李君細草未成，遂無能讀是書矣。」(阮元《李尚之傳》)

李鋭生活貧苦，晚年又患重病。嘉慶十九年(一八一四)他開始把自己在方程論方面的研究成果傳授給黎應南，後來整理成《開方説》的前兩卷。嘉慶二十二年(一八一七)夏，李鋭病情惡化，最終咯血而死。他在臨終前曾一再囑託黎應南將尚未定稿的《開方説》下卷寫好并付梓刊行，黎氏「謹遵先生遺命，依法推衍」(黎應南《開方説跋》)，於嘉慶二十四年(一八一九)將此書整理完成。

李鋭是乾嘉學派在天文、數學領域的代表人物，他的學術風格與這一學派的治學宗旨有密切的關係。還在學徒時

代，錢大昕就告誡他：「數爲六藝之一，由藝以明道，儒者之學也」，從而使他認識到：「自世之學者卑無高論，習於數而不達於理，囿於今而不通乎古，於是儒林之實學，遂下同於方技，雖復運算如飛，下子不誤，又曷足貴乎！」（李鋭《三統術衍鈐跋》）可見他學習曆算的動機與其業師錢大昕一樣，是服從於治經明道這一「儒林之實學」的大目標的。李鋭認爲「曆學誠致治之要，爲政之本」（羅士琳《續疇人傳》卷五十），在《三統術注》中，他對「伐桀」、「伐紂」、「攝政」、「獲麟」等古史或傳説年代都從曆法的角度做了考證。在讀《尚書·召誥》時，也以曆法知識對前人的研究進行了驗算。

乾嘉學派雖然以復興古學相標榜，但由於他們講求考據的方法和堅持實事求是的原則，在學術上多有超越前代的成就。就天文、數學領域而論，其成就表現在兩個方面：一是對古代經典名著進行整理與挖掘，二是運用科學的研究方法考察某些傳統題材，從而獲得嶄新的成果。李鋭在這兩方面都做出了非凡貢獻。

「開方」在中國傳統數學中泛指解高次數值方程，儘管中國古代數學家在這一領域很早就取得了居於世界前列的成就，然而對於一般的方程理論却很少有人關心。李鋭的《開方説》則突破了前代算家就具體數字方程求出一個正根的窠臼，他在傳統增乘開方法的基礎上運用抽象的文字表述形式來表達研究對象，更採納枚舉、排序、分析、綜合、歸納等多種邏輯手段對高次方程進行理論探討，構成中國代數學史上光輝的一頁。

《開方説》共三卷：卷上主要討論高次方程正根個數與其係數符號的關係并介紹增乘開方法；卷中引進了負根的概念并闡釋作者自己提出的「代開法」；卷下介紹了重根概念和根與係數的關係，又討論了各種方程變形。

《開方説》中最突出的成果是卷上關於正根個數的論述。在梗概性地叙述了增乘開方法的表達式及有關術語後，李鋭提出了如下的命題：「凡上負、下正，可開一數」；「上負、中正、下負，可開二數」；「上負、次正、次負、下正，可開三數或一數」；「上負、次正、次負、次正、下負，可開四數或二數」。用現代數學語言來表達，上述四句話相當於説：若實係數方程的係數序列出現一次變號，則有一個正根；若出現兩次變號，則有兩個正根；若出現三次變號，則有三個或一個正根；若出現四次變號，則有四個或兩個正根。推而廣之，實係數方程具有的正根個數或等於其係數序列的變號數或比此數少二。這一結論與現代方程論中判定正根個數的「笛卡兒符號法則」(Cartesian Rule of Signs)十分接近。（精確的陳述應爲「實係數方程具有的正根個數或等於其係數序列的變號數或比該數少一偶數。」實際上法國數學家笛卡兒(R.Descartes)於一六三七年提出的法則中也不包括「少一偶數」這一部分。參閲劉鈍《李鋭與笛卡兒符號法則》，《自然科學史研究》第八卷，第二期。）

除了這一判定方程正根個數的法則外，《開方說》中還有許多其它重要的成果。例如書中在中國數學史上首次引進了負根和重根的概念，又將方程的非正數解稱爲「無數」，并認識到「凡無數必兩，無一無數者」這一事實。書中又在整數範圍內討論了二次和雙二次方程無實根的判別條件，提出了先求出一根首位數字再由變形方程續求其餘位數字及其餘根的「代開法」，還對宋元算書中包含的各種方程變換如倍根變換、縮根變換、減根變換、反根變換都做了解釋并予以完善。

《開方說》没有單刊本。李鋭去世後，他的友人將其主要天文、數學著作彙集成《李氏遺書》在廣州刊刻，時在嘉慶末年（約一八二〇年），參預校訂的學者有江藩、阮福等。道光十三年（一八三三）阮福嶺南節署校本和光緒六年（一八九〇）上海醉六堂重刊本均由此出。此外，《開方說》也爲丁取忠《白芙堂算學叢書》和劉鐸《古今算學叢書》所收，後者在每卷之末都附有「刊誤」數條。前者在開雕前請數學名家黃宗憲算校，蓋因「《開方說》梓於廣州，在先生既歿之後，其中行列顛倒，算式舛錯，幾至不可讀。」（丁取忠「刻《天元勾股細草》、《開方說》識記」）

黃宗憲的確校正了《李氏遺書》本中的不少錯誤，特別是籌式算草中的刻寫錯誤，本書就是採用《白芙堂算學叢書》本影印。

開方之用進退步法始於九章之少廣及孫子算經然古人祇以馭平方立方之帶縱者未嘗有正負相開之諸乘方也自天元術出而始有正負開方其法始見於宋秦道古九韶數書九章蓋其時天元始出因其以天元相乘而有正負又因其以乘代除而層累益增開方之有翻法益積由此起矣非以步法進退審之無以定初商之位數非以正負層層審之無以定可開幾數非以超進之法層層審之無以定各商之數而後歎古人之法為蔑以加矣有明一代無人知天元誰復究心步法而西人乘其敝創為隔位作點之法人皆便之而不知隔位作點祇能馭無縱

之方而不能馭有縱之方天元自立方以上無不帶縱者

國朝康熙間雖天元四元之法復明而步法不傳學者病之自元和李尚之銳作開方說而古法始復明於世法雖一貫而布算甚繁然以之開十數位之方非旬日莫辦近日南海鄒特夫伯奇著乘方捷術杭州夏紫笙鸞翔著少廣縋鑿特夫又立截算續商二法無論正負雜糅翻法益積皆能得數頃刻豈非快事然遇無盡方根雖求十餘位而無難若遇無奇零者惟逼近眞數終不能與原數相合是以終當以尚之之法為正法也余故於敘尚之之書而并及之光緒紀元臘八日丁取忠補記於荷池精舍

開方說上

元和 李銳學

凡除之位上實下法商在實上平方之位上實中從（亦曰方）下隅商在實上立方上實次從方次廉下隅商在實上三乘方上實次從方次第一廉（亦曰上廉）次第二廉（亦曰下廉）下隅商在實上三乘方以上每增一乘卽多一廉（四乘方有第三廉五乘方有第四廉之類）

商

實

法

右除

商

實

方

隅

右平方

商

實

方

廉

隅

右立方

商

實

方

廉

廉

隅

右三乘方

凡實常為負商常為正除法為正開方方廉有正有負有空隅有正有負

凡正方正廉正隅亦謂之從方從廉從隅負方負廉負隅亦謂之益方益廉益隅

凡上負下正可開一數除一平方三立方八三乘方二十上負中正下負可開二數平方一立方五三乘方一十八

上負次正次負下正可開三數或一數立方一三乘方七
上負次正次負次正下負可開四數或二數三乘方一假令有五位上二位負下三位正卽是上負下正非止謂上一位負下一位正也他皆倣此
凡可開三數或止一數可開四數或止三數其二數不可開是爲無數凡無數必兩無無一數者

實負法正

右除一

實負方空隅正
實負方正隅正
實負方負隅正

右平方三

實負方空廉空隅正
實負方空廉正隅正
實負方空廉負隅正
實負方正廉空隅正
實負方負廉空隅正
實負方正廉正隅正
實負方負廉負隅正
實負方負廉正隅正

右立方八

實負方空廉空廉空隅正
實負方空廉空廉正隅正
實負方空廉空廉負隅正
實負方空廉正廉空隅正
實負方空廉負廉空隅正
實負方正廉空廉空隅正
實負方負廉空廉空隅正
實負方空廉正廉正隅正
實負方空廉負廉負隅正
實負方正廉空廉正隅正

實負方負廉空廉負隅正
實負方正廉正廉空隅正
實負方負廉負廉空隅正
實負方空廉負廉正隅正
實負方負廉空廉正隅正
實負方負廉正廉空隅正
實負方正廉正廉正隅正
實負方負廉正廉正隅正
實負方負廉負廉正隅正
實負方負廉負廉負隅正

右三乘方二十

已上皆上負下 止可開一數

實負方正隅負

右平方一

實負方空廉正隅負

實負方正廉空隅負

實負方正廉正隅負

實負方正廉負隅負

實負方負廉正隅負

右立方五

實負方空廉空廉正隅負

實負方空廉正廉空隅負

實負方正廉空廉空隅負

實負方空廉正廉正隅負

實負方空廉正廉負隅負

實負方空廉負廉正隅負

實負方正廉空廉正隅負

實負方正廉空廉負隅負

實負方負廉空廉正隅負

實負方正廉正廉空隅負

實負方正廉負廉空隅負

實負方負廉正廉空隅負

實負方正廉正廉正隅負

實負方正廉正廉負隅負

實負方正廉負廉負隅負

實負方負廉正廉正隅負

實負方負廉正廉負隅負

實負方負廉負廉正隅負

右三乘方一十八

已上皆上負中正下負可開二數

實負方正廉負隅正

右立方一

實負方空廉正廉負隅正

實負方正廉空廉負隅正

實負方正廉負廉空隅正

實負方正廉正廉負隅正

實負方正廉負廉正隅正

實負方正廉負廉負隅正

實負方負廉正廉負隅正

右三乘方七

已上皆上負次正次負下正可開三數或一數

實負方正廉負廉正隅負

右三乘方一

已上上負次正次負次正下負可開四數或二數

凡步之法除置實法萬千百十一上下相當商一法進一商十又進如前商百至不可進而約初商實不可減法則不可進平方置實方隅萬千百十一上下相當商一方進一位隅進二位商十又進如前商百至不可進而約初商立方置實方廉隅萬千百十一上下相當商一方進一位廉進二位隅進三位商十又進如前商百至不可進而約初商三乘方置實方第一廉第二廉隅萬千百十一上下相當商一方進一位第一廉進二位第二廉進三位隅進四位商十又進如前商百至不可進而約初商

實四百負法二正法除實得二百

商 ○
實 ○○卌
法 ‖

如法列位商一

凡算式有斜畫者為負無斜畫者為正

商 ○○
實 ○○卌
法 ‖○

法進一位商十

商 ‖○○
實 ○○卌
法 ‖○○

如前又進商百不可進約商二百

實九萬負方空隅一正開平方得三百

商 ○
實 ○○○○卌
方 ○
隅 丨

如法列位商一

商 ○○
實 ○○○○卌
方 ○
隅 丨

方進一位隅進二位商十

商 川○○
實 ○○○○卌
方 ○
隅 丨

百

如前又進商百不可進約商三百

實六千四百萬負方空廉空隅一正開立方得四百

商 ○
實 ○○○○○○卌丄
方 ○
廉 ○
隅 丨

如法列位商一

商 ○○
實 ○○○○○○卌丄
方 ○
廉 ○
隅 丨

方進一位廉進二位隅進三位商十

商
實
方
廉
隅
如前又進商百不可進約商四百

實六百二十五億負方空第一廉空第二廉空隅一正開三乘方得五百

商
實
方
一廉
二廉
隅
如法列位商一

商
實
方
一廉
二廉
隅
方進一位第一廉進二位第二廉進三位隅進四位商十

商
實
方
一廉
二廉
隅
如前又進商百

不可進約商五百

凡步之法以正步負或以負步正皆主於減所步

凡平方可開二數者以正方步負實得第一數小數也以負隅步正方得第二數大數也立方可開三數者以正方步負實得第一數小數也以負廉步正方得第二數中數也以正隅步負廉得第三數大數也他皆仿此

實一萬負方一萬一正隅一負開平方得第一數一第二數一萬

商
實
方
隅
此以正方步負實商一

商
實
方
隅
此以負隅步正從商一萬