新版

第二册

八年级

阶梯训练

JIETIXUNLIAN

SHUXUEJINGSAI

数学竞赛

浙江教育出版社

前言

QIANYAN

义务教育阶段数学课程改革的基本理念之一是基础性、普及性和发展性，使数学教育面向全体学生，实现人人学有价值的数学；人人都能获得必需的数学；不同的人在数学上得到不同的发展。由中国教育学会数学专业委员会组织的“全国初中数学竞赛”正是为激发学生学习数学的兴趣，培养数学优秀人才，使有数学爱好的学生在数学上获得更好的发展服务的。

新课程实施后，全国初中数学竞赛命题的范围以《数学课程标准(7～9年级)》的内容、要求为基本依据，着重考查学生对数学知识的理解和应用数学知识的能力。因此这一群众性的数学竞赛活动越来越多地受到广大数学爱好者的欢迎，有越来越多的学校和师生加入到竞赛行列，迫切需要一套依据课程标准，源于教科书又高于教科书，以教科书内容、要求为起点，逐步上升到中考、竞赛水平的竞赛辅教、辅学用书。为此我会组织了我省有丰富竞赛辅导经验的特级和高级教师，在回顾总结中考、竞赛辅导经验的基础上编写了本套丛书。

本丛书共四册，前三册依次与各套课程标准实验教科书的七年级、八年级和九年级的内容基本同步，第四册设若干专题，着重培养学生的数学综合运用能力。

本丛书的内容涵盖《数学课程标准(7～9年级)》的全部内容，并且根据各套课程标准实验教科书课程内容呈现先后顺序的共性，分章编写，每章分若干节，每节设[温故知新][点石成金][独立尝试][数学活动][挑战自我][史海泛舟]六个栏目。[温故知新]主要回顾本节内容的知识要点，重要的公式、公理、定理、方法等；[点石成金]突出解题思路探求和解题方法的点拨；[独立尝试]给出两个典型问题，由学生尝试解答；[数学活动]重在数学阅读、数学探究、数学实践等；[挑战自我]分层要求，题量适中，紧扣课程标准内容和竞赛要求；[史海泛舟]提供数学竞赛史上的趣题、巧解、轶事、趣闻等。

本套丛书编委为(以姓氏笔画为序):王而冶、叶坚、边学平、许芬英、过伯祥、吴明华、李昌官、沃苏青、周伟扬、周道生、施储、胡兴余、倪金根、黄新民。

本套丛书由许芬英、黄新民、边学平、寿志德、白洪智设计。第二册第一章由白洪智编写,第二章由王旭东编写,第三章由寿德编写,第四章由吕海国编写,第五章由王临军编写,第六章由陈琦编写,第七章由王薇编写,第八章由寿志德编写,第九章由李剑编写。竞赛模拟试卷一、二、三、四、五分别由寿志德、吕海国、李剑、王临军和陈琦编写。全书由寿志德、许芬英统稿。

本套丛书凝聚着我省教师指导初中数学竞赛辅导的精华,希望能为广大师生提供有益的参考,并恳请读者使用过程中多提宝贵意见,使之更臻完美。

本次印刷时,对个别差错作了校正。

浙江省教育学会中学数学教学分会

2004 年 6 月

目 录

第一章 三角形

三角形是基本的几何图形,三角形的有关知识和方法是研究四边形的重要基础.本章主要研究全等三角形、等腰三角形、直角三角形、轴对称变换的知识与方法.

第一节 全等三角形

温故知新

全等的两个三角形不仅形状相同,而且大小也相等.全等三角形的性质和判定,在有关线段、角的计算或证明以及解决有关实际问题中都有重要作用.要善于由结论去寻找全等三角形,或从已知出发寻找全等三角形.如图中没有全等三角形,可以有针对性地构造全等三角形,并利用全等三角形来解题.

基本结论

(1) 全等三角形的面积相等,但面积相等的两个三角形不一定全等.

(2) 全等三角形对应边上的高、中线、对应角的平分线分别对应相等.

(3) 两边及其中一边上的中线分别对应相等的两个三角形全等.

重要方法

构造法,分类讨论法,数学实验.

点石成金

例 1 在两个三角形中,如果有两边及一角分别相等,这两个三角形全等吗?若全等,请说明理由;若不全等,请尽可能多地构造反例来说明.

分析 若相等的角是两边的夹角,根据全等三角形的判定定理,这两个三角形全等.若相等的角是两边其中一边的对角,则不一定全等,可构造反例来说明.

解 分两种情况:

(1) 当相等的角是两边的夹角时,这两个三角形全等.

(2) 当相等的角是两边其中一边的对角,则不一定全等.

如图 1-1,在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,点 A 和点 D,点 B 和点 E 分别重合,$AB=DE$,$DF=AC$,$\angle ABC=\angle DEF$.

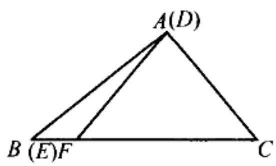


图 1-1

如图 1-2,在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,点 A 和点 D,点 B 和点 E 分别重合,$AB=$

$DE,DF=AC,\angle ABC=\angle EDF$.

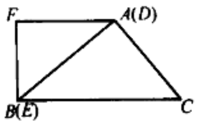


图 1 - 2

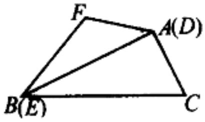


图 1 - 3

如图 1 - 3,在$\triangle ABC$和$\triangle DEF$中,点A和点D,点B和点E分别重合,$AB=DE,DF=AC,\angle ABC=\angle DEF$.

如图 1 - 4,在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$和$\mathrm{Rt}\triangle DEF$中,点D和点B重合,$AB=DE,EF=AC,\angle C=\angle E=90^\circ$.

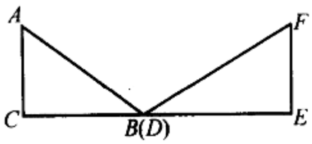


图 1 - 4

评注 边角边定理(SAS)是判定两个三角形全等的基本定理,但这里的角必须是两边的夹角,否则不一定全等. 同时构造反例也是一种重要的方法,但必须注意构造的方法. 你能说出以上四图构造的过程吗?

例 2 如图 1 - 5,已知$\triangle ABC$的高BD,CE相交于点F,延长BD到点P,使$BP=AC$,连接AP. 在CE上截取$CQ=AB$. 试探索AP与AQ之间的关系.

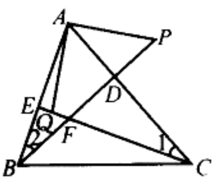


图 1 - 5

分析 通过测量比较,从位置与大小两方面,猜想AP与AQ的关系,进一步从$\triangle AQC\cong\triangle APB$入手,探索$AP,AQ$的关系.

解答 因为BD,CE是$\triangle ABC$的高,所以$CE\perp AB,BD\perp AC$,所以$\angle 1=\angle 2$.

又因为$CQ=BA,CA=BP$,所以$\triangle AQC\cong\triangle APB$,所以$AQ=AP,\angle CAQ=\angle P$. 而$\angle PAD+\angle P=\angle PAD+\angle CAQ=90^\circ$. 所以$AP\perp AQ$,即$AP$与$AQ$的关系是相等又垂直.

评注 合理的猜想,可以为解题提供方向. 善于发现全等三角形是利用全等三角形解题的关键,这必须从已知与求解目标的结合处入手,寻找突破口. 如本题由已知$BP=CA,BA=CQ$及探索目标线段AP,AQ,找到$\triangle AQC,\triangle APB$.

能力测试

1. 如图 1 - 6,AC是$\angle BAD$的角平分线,$CE\perp AB$于点E. 若$\angle B+\angle D=180^\circ$,则$AE,AB,AD$间有何关系? 试说明理由.

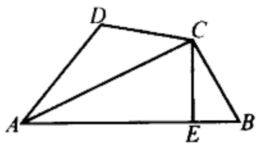


图 1 - 6

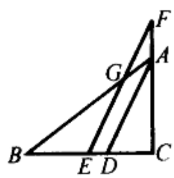


图 1 - 7

2. 如图 1 - 7,在$\triangle ABC$中,$AB>AC$,E是BC边的中点,AD平分$\angle BAC$,交BC

于点 E，$EF /\!/ AD$，交 AB 于点 G，交 CA 延长线于点 F. 试说明：$CF=BG$.

(1) 探索线段间的关系，可以考虑构造全等三角形，通过对应线段及线段的和差关系来探索.

(2) 探索角间的不等关系问题，也可以构造全等三角形. 将有关线段（AB，AC）及角（$\angle BAD$，$\angle CAD$）集中到一个三角形中，便于运用三角形的三边关系来解决问题，证线段间的不等关系也可类似处理.

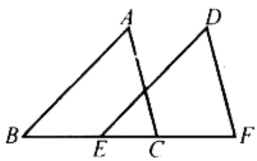
数学活动

已知 $\triangle ABC$，AD 是 BC 边上的中线，探索 $\angle BAD$ 与 $\angle DAC$ 的大小关系.

挑战自我

复习巩固

1. 如图，点 B，E，C，F 在同一直线上，且 $AB=DE$，$BE=CF$. 若要使 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，还需添加一个什么条件？



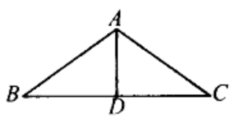
（第 1 题）

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 平分 $\angle BAC$，E，F 是 AC，AB 上的点，且 $AE=AF$，BE，CF 与 AD 相交于点 O，则图中全等三角形共有（　　）
   (A) 8 对.　　(B) 7 对.
   (C) 6 对.　　(D) 5 对.

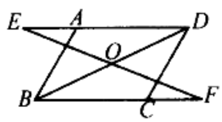
3. 下列命题是假命题的是（　　）
   (A) 全等三角形对应边上的中线、高、对应角的平分线对应相等.
   (B) 全等三角形的面积相等.
   (C) 两边及其中一边上的中线分别对应相等的两个三角形全等.
   (D) 两边及其中一边上的高分别对应相等的两个三角形全等.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，BD 为 AC 边上的中线. 若 $AB=6$，$BC=4$，则 BD 的取值范围是________.

5. 如图是人字形屋架的设计图，由 AB，AC，BC，AD 四根钢管焊接而成，其中 A，B，C，D 均为焊接点，且 $AB=AC$，D 为 BC 中点. 现焊接所需四根钢管已截好，且已标好 BC 的中点 D. 如果焊工身边只有可检验直角的角尺，那么为了准确快速，他首先应取的两根钢管焊接点是（　　）
   (A) AD 和 BC，焊接点 D.
   (B) AB 和 BC，焊接点 B.
   (C) AB 和 AC，焊接点 A.
   (D) AB 和 AD，焊接点 A.



（第 5 题）

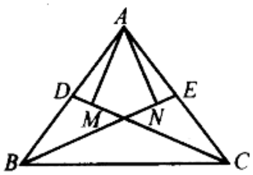


（第 6 题）

6. 如图，已知 $AB=DC$，$AD=BC$，O 是 BD 中点. 过点 O 作直线与 DA，BC 延长

线交于点 E,F,OE 与 OF 是否相等？若相等，请说明；若不相等，请说明理由.

7. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC,BE,CD$ 为两腰上的中线，$AM\perp CD,AN\perp BE$，垂足为 M,N. 试说明：$AM=AN$.

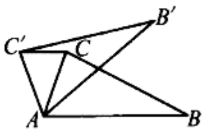


（第 7 题）

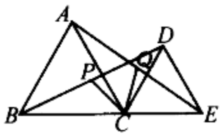
8. 已知$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$. D 为 BC 延长线上一点，且 $CD=CE$. 点 E 在 AC 上，BE 的延长线交 AD 于点 F. 试探索 BE 与 AD 的关系.

综合提高

9. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=70°$. 在同一平面内，将$\triangle ABC$ 绕点 A 旋转到$\triangle AB'C'$位置，且 $CC'\parallel AB$，则$\angle BAB'$的度数是________.



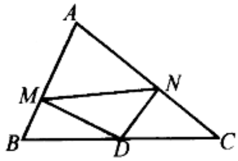
（第 9 题）



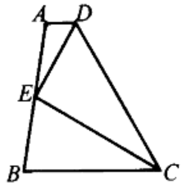
（第 10 题）

10. 如图，$\triangle ABC$ 和$\triangle CED$ 都是正三角形，且点 B,C,E 在同一直线上，P,Q 分别是 BD,AE 的中点. 试找出图中相等的线段，并加以说明.

11. 如图，在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 中点，$DM\perp ND$. 试探索 $BM+CN$ 与 MN 的大小关系.



（第 11 题）

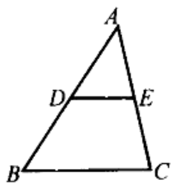


（第 12 题）

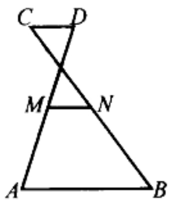
12. 如图，$AD\parallel BC,\angle ADC,\angle DCB$ 的平分线交 AB 于点 E. 设 $AD=a,BC=b,CD=c$. 试探索 $a+b$ 与 c 的关系.

探究拓展

13. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$AD=DB,AE=EC$. 试探索 DE 与 BC 的关系. 先作猜想，再加以说明.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 如图，$AB\parallel CD,M,N$ 分别为 AD,BC 的中点. 若 $AB=12,CD=4$，则 $MN=$________.

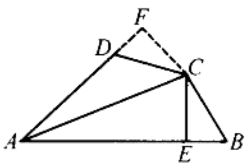
解答提示

独立尝试

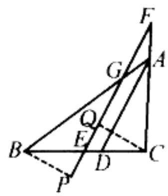
1. 提示：(1) 若$\angle B\neq\angle D$，过点 C 作 $CF\perp AD$，交 AD 的延长线于点 F. 因为$\angle B+\angle ADC=180°$，$\angle ADC+\angle CDF=180°$，所以$\angle B=$

$\angle CDF$. 因为 $CE\perp AB$，所以 $\angle CFD=\angle CEB$. 又因为 AC 平分 $\angle DAB$，所以 $CF=CE$. 所以 $\triangle CFD\cong\triangle CEB$. 所以 $EB=DF$. 又 $\triangle ACF\cong\triangle ACE$，得 $AF=AE=AD+DF$. 所以 $AE=AD+BE=AD+AB-AE$. 所以 $2AE=AD+AB$. 所以 $AE=\frac{1}{2}(AD+AB)$.

(2) 若 $\angle B=\angle D=90°$，则 $AB=AD$，$AE=AB=AD$.



(第 1 题)



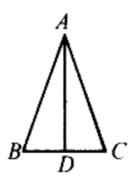
(第 2 题)

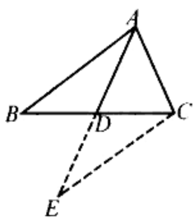
2. 提示：要证 $BG=CF$，可考虑构造含 BG，$\angle BGE$ 及 CF，$\angle F$ 的两个三角形全等. 如图，过点 B，C 分别作 $BP\perp EF$，$CQ\perp FE$，垂足分别为 P，Q. 则 $BP\parallel CQ$，所以 $\angle PBE=\angle QCE$，而 $BE=CE$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle BPE\cong\mathrm{Rt}\triangle CQE$，所以 $BP=CQ$. 又因为 $EF\parallel DA$，AD 平分 $\angle A$，所以 $\angle BGE=\angle F$，所以 $\mathrm{Rt}\triangle BPG\cong\mathrm{Rt}\triangle CQF$. 所以 $BG=CF$.

数学沙龙

提示：分 3 种情况：$AB=AC$，$AB>AC$，$AB<AC$ 来探索.

(1) 当 $AB=AC$ 时，明显有 $\angle BAD=\angle CAD$.



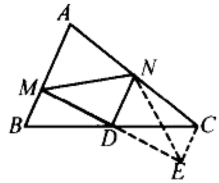


(2) 当 $AB>AC$ 时，延长 AD 到点 E，使 $AD=DE$，连接 EC. 因为 $AD=DE$，$\angle ADB=\angle EDC$，$BD=CD$，所以 $\triangle ADB\cong\triangle EDC$. 所以 $\angle BAD=\angle E$，$AB=EC$. 在 $\triangle ACE$ 中，$EC=AB>AC$，所以 $\angle CAD>\angle E$. 从而 $\angle CAD>\angle BAD$，即 $\angle BAD<\angle CAD$.

(3) 当 $AB<AC$ 时，由(2)可知 $\angle BAD>\angle CAD$.

挑战自我

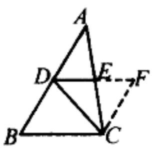
1. 可添加(1) $AC=DF$，(2) $\angle B=\angle DEF$，(3) $AB\parallel DE$，(4) $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DEF}$.
2. B　3. D　4. $1<BD<5$　5. A
6. 相等. 提示：$\triangle ODE\cong\triangle BOF$.
7. 提示：方法一：先证 $\triangle AEB\cong\triangle ADC$，再由全等三角形对应边上的高相等，得 $AM=AN$.
方法二：先证 $\triangle BEC\cong\triangle CDB$，再证 $\triangle AMD\cong\triangle ANE$.
8. $BE=AD$ 且 $BE\perp AD$. 提示：$\triangle BCE\cong\triangle ACD$.
9. $40°$. 提示：由 $CC'\parallel AB$，得 $\angle C'CA=\angle CAB=70°$. 由 $\triangle ABC\cong\triangle AB'C'$，得 $\angle BAC=\angle B'AC'=70°$，$AC=AC'$，所以 $\angle C'AC=40°$，于是 $\angle B'AC=30°$，从而 $\angle BAB'=\angle CAC'=40°$.
10. (1) $AB=BC=CA$，(2) $DC=CE=DE$，(3) $AE=BD$，(4) $AQ=QE=BP=PD$，(5) $CP=CQ$.
11. $BM+CN>MN$. 提示：延长 MD 至 E，使 $MD=DE$，连接 NE，CE. 构造 $\triangle BMD\cong\triangle CED$，将 BM，CN，MN 集中到同一个三角形中.



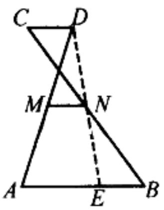
(第 11 题)

12. $a+b=c$. 提示：延长 DE 交 CB 的延长线于点 F. 构造 $\triangle AED\cong\triangle BEF$，及 $\triangle CED\cong\triangle CEF$.

13. 提示：通过测量比较，不难发现 $DE /\!/ BC$，且 $DE=\frac{1}{2}BC$. 为了说明 $DE=\frac{1}{2}BC$，不妨把 DE 延长一倍到点 F，连接 CF，转化为证 $DF=BC$，及 $DF /\!/ BC$.
因为 $AE=EC$，$\angle AED=\angle CEF$，$DE=FE$，所以 $\triangle AED \cong \triangle CEF$. 所以 $CF=AD=DB$，$\angle ACF=\angle CAD$. 所以 $CF /\!/ AB$. 所以 $\angle BDC=\angle FCD$. 又 $DC=CD$，所以 $\triangle BDC \cong \triangle FCD$. 所以 $BC=DF=2DE$，$\angle BCD=\angle FDC$. 所以 $DF /\!/ BC$. 所以 $DE=\frac{1}{2}BC$，且 $DE /\!/ BC$.



（第 13 题）



（第 14 题）

14. 4. 提示：连接 DN，并延长交 AB 于点 E. 由 $AB /\!/ CD$，得 $\angle B=\angle C$，$\angle CDN=\angle BEN$. 又 N 为 BC 中点，知 $CN=BN$，可得 $\triangle CDN \cong \triangle BEN$，$BE=CD=4$，$DN=NE$. 由第 13 题可知 $MN=\frac{1}{2}AE$，于是 $NM=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}(AB-CD)=\frac{1}{2}(12-4)=4$.

第二节　等腰三角形

温故知新

等腰三角形是两边相等的特殊三角形，以顶角平分线所在直线为对称轴，具有"两底角相等"、"顶角的平分线、底边上的中线和高互相重合"等重要性质. 这些性质和相关判定是有关等腰三角形的计算和证明的重要依据，应加以灵活应用，同时在解题时应注重问题需要，合理构造等腰三角形.

基本图形与重要结论

(1) 如图 1－8，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，则 $\angle A=180^\circ-2\angle B=180^\circ-2\angle C$，$\angle B=\angle C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

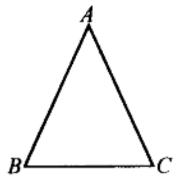


图 1－8

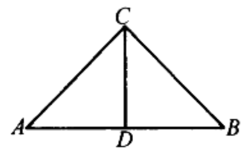


图 1－9

(2) 如图 1－9，$AC=BC$，$\angle ACB=90^\circ$，$CD \perp AB$，则 $\angle A=\angle B=45^\circ$，$CD=AD=BD$.

(3) 如图 1－10，$AB=BC=AC$，则 $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$.

(4) 在图 1－11，1－12 中，$\angle B=2\angle C$，AD 平分 $\angle BAC$. 在图 1－13 中，$ED /\!/ BC$，BD 平分 $\angle ABC$. 均可构成等腰三角形.

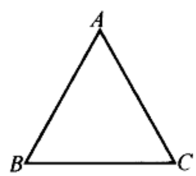


图 1－10

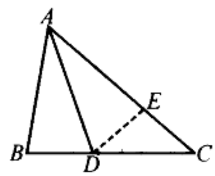


图 1－11

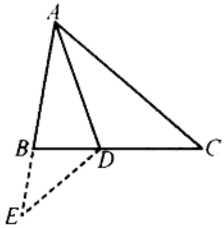


图 1-12

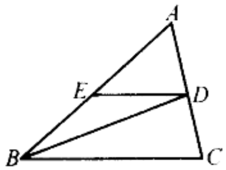


图 1-13

基本方法

(1) 数形结合：巧算线段长度或角度.

(2) 构造法：构造等腰三角形、构造正三角形、构造全等三角形.

点石成金

例 1 如图 1-14，P 是等边$\triangle ABC$ 外一点，$\angle APB=\angle APC=60°$. 若$\triangle PBD$ 是正三角形，

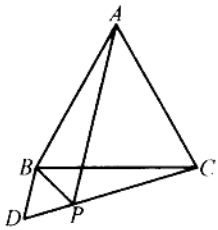


图 1-14

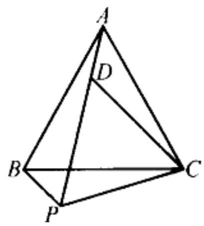


图 1-15

(1) 试说明：$PB+PC=PA$.

(2) 若将图 1-14 变为图 1-15，$\triangle PDC$ 为正三角形，则 $PB+PC=PA$ 仍能成立吗？

分析 (1) 由$\triangle PBA\cong\triangle DBC$，可证 $DC=PA$；(2) 可证$\triangle PBC\cong\triangle DAC$.

解 (1) 因为$\triangle ABC$，$\triangle PDB$ 都是等边三角形，

所以 $AB=BC$，$\angle ABC=\angle DBP=60°$，$PB=BD$.

所以 $\angle PBA=\angle DBC$，且 $\angle DPC=180°$，即 D，P，C 三点共线.

所以$\triangle DBC\cong\triangle PBA$.

所以 $DC=PA$.

所以 $PB+PC=PC+PD=PA$.

(2) 仍成立.

因为$\triangle ABC$，$\triangle PDC$ 都是等边三角形，

所以 $AC=BC$，$\angle ACB=\angle DCP=60°$，$CD=CP$.

所以$\angle PCB=\angle DCA=60°-\angle BCD$.

所以$\triangle BPC\cong\triangle DAC$.

所以 $AD=PB$.

所以 $PB+PC=AD+PD=PA$.

评注 要善于运用等边三角形的特殊性质解题."图变"但问题没变是这一类问题的特点.

例 2 如图 1-16，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，AE 平分$\angle BAC$，交 BC 于 D，$BE\perp AE$ 于 E. 请你猜想 AD 与 BE 的大小关系，并说明你的猜想.

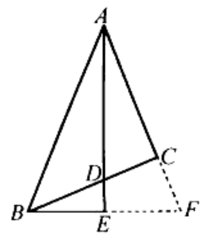


图 1-16

分析 用圆规或刻度尺度量 AD，BE 的长，并比较，不难发现 $AD=2BE$（或 $BE=\frac{1}{2}AD$）. 由已知"AE 平分$\angle BAC$ 及 AE

$\perp BE$"联想相关定理，适当添加辅助线，构造等腰三角形。

解 分别延长 BE，AC，相交于点 F。

因为 AE 平分 $\angle BAC$，$AE \perp BF$，

所以 $\triangle ABF$ 是等腰三角形。

所以 $BF = 2BE$。

因为 $\angle C = 90°$，即 $BC \perp AC$，

所以 $\angle CAD = \angle CBF$。

又因为 $AC = BC$，$\angle ACD = \angle BCF = 90°$，

所以 $\triangle ACD \cong \triangle BCF$。

所以 $AD = BF = 2BE$。

评注 以角平分线为轴构造等腰三角形是常用的构造方法，要善于根据问题的需要选择合适的构造方式。

1. 如图 1－17，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = 120°$，$AD \perp BC$ 于 D，且 $AC + CD = BD$，求 $\angle B$ 的度数。

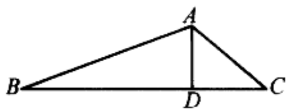


图 1－17

2. 如图 1－18，在六边形 $ABCDEF$ 中，各内角均相等，$BC = 1$，$ED = 2$，$AF = 3$，$BA = a$，$CD = b$，$EF = c$，求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ 的值。

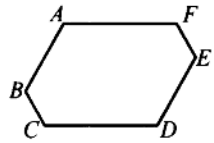


图 1－18

评注 (1) 由已知"$AC + CD = BD$"出发，不妨在 BD 上截取 $DE = CD$，或者在 BC 的延长线上截取 $CF = AC$，构造等腰三角形。

(2) 提示：由"各内角相等"可得每一个内角度数为 120°，由此利用 60°联想正三角形，延长各边构造正三角形。

如图 1－19，$\angle ABD = \angle ACD = 60°$，$\angle ADB = 90° - \dfrac{1}{2}\angle BDC$，试说明：$AB = AC$。

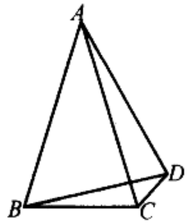
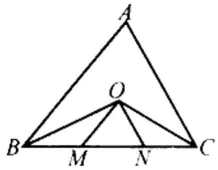


图 1－19

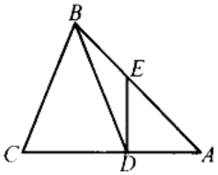
复习巩固

1. 如图，$BC = 5$ cm，$\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的两条角平分线相交于点 O，$OM \parallel AB$ 交 BC 于 M，$ON \parallel AC$ 交 BC 于 N，则 $\triangle OMN$ 的周长＝________ cm。

2. 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的 AB 边上一点，E 是 CA 延长线上的点，$AB = AC$，$AE = AD$。若 $\angle B = 50°$，则 $\angle E =$ ________。



(第 1 题)



(第 3 题)

3. 如图，在$\triangle ABC$中，E，D分别是AB，AC上的点，$AB=AC$，$BC=BD$，$AD=DE=EB$，则$\angle AED=$________.

4. 如果等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为$45°$，那么这个等腰三角形的顶角为________.

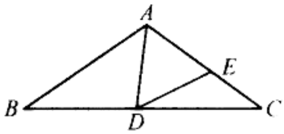
5. $\triangle ABC$的一个内角等于$50°$，且$\angle A=\angle B$，那么与$\angle C$相邻的外角等于________.

6. 已知一个等腰三角形的周长为18.若各边长均为整数，则这样的三角形共有(　　)

(A) 7个.　　(B) 6个.

(C) 5个.　　(D) 4个.

7. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，点D在BC上，且$\angle BAD=50°$，点E在AC上，且$AD=AE$，则$\angle EDC$的度数为(　　)



(第 7 题)

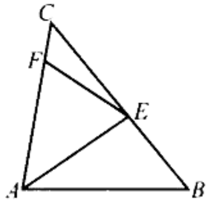
(A) $50°$.　　(B) $30°$.

(C) $25°$.　　(D) $15°$.

8. 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，O是$\triangle ABC$内一点，$OB=OC$，AO与BC有何关系？先猜想，后说明.

9. 在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$，你能用三种不同的方法说明$AB=AC$吗？

10. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，E，F分别是BC，AC上的点，且$AE=AF$，试问$\angle BAE$与$\angle CEF$之间有何关系？



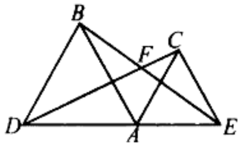
(第 10 题)

综合提高

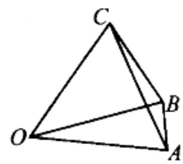
11. 若等腰三角形被一条直线分割成两个较小的等腰三角形，则原等腰三角形的顶角度数是________.

12. 已知BH是等腰三角形一腰上的高，且$\angle ABH=40°$，则顶角的度数________.

13. 如图，$\triangle ABD$，$\triangle ACE$都是正三角形，CD，BE相交于点F，则$\angle BFC=$________.



(第 13 题)



(第 14 题)

14. 如图，已知$OA=OB=OC$，$\angle BOC=40°$，$\angle BOA=20°$，则$\angle BAC$与$\angle BCA$的关系是(　　)

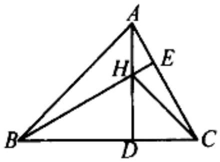
(A) $\angle BAC=2\angle BCA$.

(B) $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BCA$.

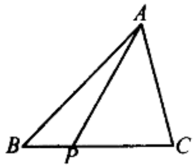
(C) $\angle BAC=3\angle BCA$.

(D) $\angle BAC=\frac{1}{3}\angle BCA$.

15. 如图,在$\triangle ABC$中,高AD,BE相交于H,$AC=BH$. 试说明:$\angle ABC=\angle HCD$.



(第 15 题)



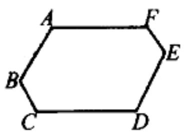
(第 16 题)

16. 如图,P是$\triangle ABC$的BC边上一点,且$PC=2PB$,$\angle ABC=45°$,$\angle APC=60°$,求$\angle ACB$的度数.

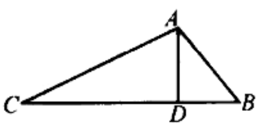
探索拓展

17. 在$\triangle ABC$中,$\angle B=2\angle C$,$AD\perp BC$于点D,延长AB至点E,使$BE=BD$,连接ED,并延长ED交AC于点F. 试说明:$AF=FD=FC$.

18. 如图,一个六边形的每个内角都相等,有连续四边的长度依次是1,3,2,1,那么其余两边的长是________.



(第 18 题)



(第 19 题)

19. 如图,在$\triangle ABC$中,$AD\perp BC$于点D,$\angle C=\frac{1}{2}\angle B$,试说明:$AB+BD=CD$.

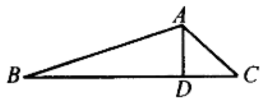
解答提示

独立尝试

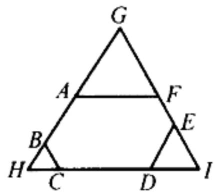
1. 提示:由已知“$AC+CD=BD$”出发,不妨在BD上截取$DE=CD$,或者在BC的延长线上截取$CF=AC$,构造等腰三角形.

解法1:在BD上截取$ED=CD$,连接AE. 因为$AD\perp EC$,所以AD是EC的中垂线. 所以$AE=AC$,所以$\angle AEC=\angle C$. 因为$BD=BE+ED=AC+CD$,所以$BE=AE$,所以$\angle BAE=\angle B$. 所以$\angle AEC=2\angle B$,$\angle C=2\angle B$. 因为$\angle EAC=120°$,所以$\angle B+\angle C=\angle B+2\angle B=60°$. 所以$\angle B=20°$.

解法2:在BC的延长线上截取$CE=AC$,连接AE,则$\angle E=\angle CAE$,$\angle ACD=2\angle E$. 因为$BD=AC+CD$,所以$BD=DE$. 因为$AD\perp BE$,所以$AB=AE$. 所以$\angle B=\angle E$,所以$\angle ACB=2\angle B$. 以下同解法1,得$\angle B=20°$.



(第 1 题)



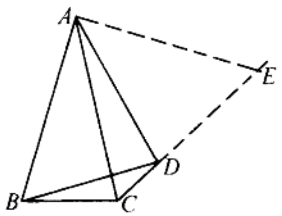
(第 2 题)

2. 提示:由“各内角相等”可得每一个内角度数. 由此利用60°联想正三角形,延长各边构造正三角形. 因为六边形$ABCDEF$的各内角相等,所以各内角等于$\frac{(6-2)\times 180°}{6}=120°$. 所以这个六边形的每个外角都等于60°. 分别延长六边形的边AB,CD,EF,得$\triangle GHI$,则$\triangle AFG$,$\triangle BCH$,$\triangle DIE$都是正三角形. 所以$AG=AF=FG$,$BH=HC=BC=1$,$DE=DI=IE=2$.

所以 $3+a+1=1+b+2=2+c+3$. 所以 $a-b=-1, b-c=2, c-a=-1$. 所以 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=\frac{1}{2}[(-1)^2+2^2+(-1)^2]=\frac{1}{2}\times 6=3$.

数学沙龙

提示：由 $\angle ADB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BDC$，即 $\angle BDC=180^\circ-2\angle ADB$，$\angle BDC+2\angle ADB=180^\circ$，联想 $\angle BDC$ 的补角. 延长 CD 至点 E，使 $DE=DB$，构造全等三角形. 延长 CD 至点 E，使 $DE=BD$，连接 AE.



因为 $\angle ADB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BDC$，所以 $\angle BDC=180^\circ-2\angle ADB$. 所以 $\angle ADE=180^\circ-(\angle ADB+\angle BDC)=180^\circ-(\angle ADB+180^\circ-2\angle ADB)=\angle ADB$. 又因为 $AD=AD$，$BD=DE$，所以 $\triangle ADB\cong\triangle ADE$. 所以 $AB=AE$，$\angle ABD=\angle E=60^\circ$. 因为 $\angle ACD=60^\circ$，所以 $AC=AE$，所以 $AB=AC$.

挑战自我

1. 5　　2. 40°　　3. 45°　　4. 45°或 135°
5. 100°或 130°　　6. D　　7. C
8. 提示：因为 $AB=AC$，所以 $\angle ABC=\angle ACB$. 因为 $OB=OC$，所以 $\angle OBC=\angle OCB$. 所以 $\angle ABO=\angle ACO$. 所以 $\triangle ABO\cong\triangle ACO$. 所以 $\angle BAO=\angle CAO$. 所以 OA 垂直平分 BC.
9. 提示 1：作 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD，说明 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$.
   提示 2：作 $\triangle ABC$ 的高 AD，说明 $\triangle ADB\cong\triangle ADC$.
   提示 3：由 $\angle B=\angle C$，$BC=CB$，$\angle C=\angle B$，得 $\triangle ABC\cong\triangle ACB$，此证法比较巧妙.
10. $\angle BAE=2\angle CEF$.　提示：设 $\angle BAE=\alpha$，$\angle CEF=\beta$，$\angle C=\gamma$. 因为 $AB=AC$，所以 $\angle B=\angle C=\gamma$. 因为 $AE=AF$，所以 $\angle AFE=\angle AEF=\angle C+\angle CEF=\gamma+\beta$. 因为 $\angle CEA=\angle BAE+\angle B$，所以 $\beta+\gamma+\beta=\alpha+\gamma$. 所以 $\alpha=2\beta$，即 $\angle BAE=2\angle CEF$.
11. 36°或 90°或 108°或 $\frac{180^\circ}{7}$.
12. $50^\circ, 80^\circ, 130^\circ$.　提示：分 $\angle A$ 是顶角（钝角或锐角）、底角两种情况来计算.
13. 120°.　提示：由 $\triangle DAC\cong\triangle BAE$，得 $\angle ACD=\angle AEB$，$\angle BFC=\angle BEC+\angle DCE=\angle BEC+\angle DCA+\angle ACE=\angle AEC+\angle ACE=120^\circ$.
14. A　　15. 略.
16. 75°.　提示：作 $CD\perp AP$，连接 BD.
17. 提示：说明 $\angle FDC=\angle C$，及 $\angle CAD=\angle ADF$.
18. 3，2
19. 提示：不妨在 CD 上截取 $DE=BD$，连接 AE，说明 $CE=AB$，或延长 DB 至点 E，使 $BE=AB$，连接 AE，说明 $DE=CD$.

第三节　直角三角形

温故知新

直角三角形是有一个角是直角的特殊三角形. 直角三角形的边、角、边和角的特有性质是有关直角三角形问题的计算和说明的重要依据.

重要性质

(1) 两锐角:直角三角形的两个锐角互余.

(2) 三边:在直角三角形中,两条直角边的平方和等于斜边的平方;反之,较小两边的平方和等于较大边平方的三角形是直角三角形.

(3) 斜边与中线:直角三角形的斜边上的中线等于斜边的一半;反之,一边上的中线等于该边一半的三角形是直角三角形.

(4) 边与角:在直角三角形中,30°的锐角所对的直角边等于斜边的一半;反之,直角三角形中等于斜边一半的直角边所对的锐角等于30°.

(5) 斜边上的高:直角三角形斜边上的高等于两条直角边的乘积除以斜边所得的商.

重要方法

构造法,分类讨论,对称法.

点石成金

例1 如图1-20,$DA\perp AB$,$CB\perp AB$,A,B为垂足,$AD+BC=AB$,问在AB上能否找到点P,使$PD=PC$.

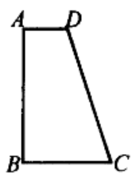


图1-20

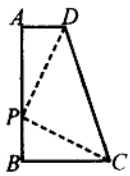


图1-21

分析 若$PD=PC$,则点P必是CD的中垂线与AB的交点,能找到这样的点P.由已知$AD+BC=AB$,不妨将AB分成两部分,一部分等于AD,另一部分等于BC,通过三角形全等获得问题的解决.

解 能.如图1-21,在AB上取点P,使$AP=BC$,$PB=AD$.

因为$\angle A=\angle B=90°$,

所以$Rt\triangle APD\cong Rt\triangle BCP$.

所以$PD=PC$.($\angle APD=\angle BCP$.

所以$\angle APD+\angle BPC=\angle BCP+\angle BPC=90°$.所以$\angle DPC=90°$.)

评注 通过测量、画图、比较等数学实验,作出猜想,然后探索说明是一种重要的研究方法.本题不仅有$PD=PC$,而且有$\angle DPC=90°$,$\triangle PDC$是一个等腰直角三角形.

例2 如图1-22,在$\triangle ABC$中,CD是高,E是CD中点,AE的延长线交CB于点F,且$AF\perp CB$.若$EF=1$,则$AE=$______.

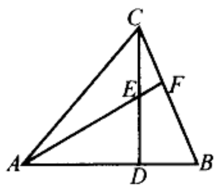


图1-22

分析 由$AE=CD$,E是CD的中点,及$\angle ADE=90°$,联想直角三角形相应的性质,不难获得问题的解题思路.

解 因为$AE=CD$,E是CD的中点,

所以$AE=2ED$.

因为$\angle ADE=90°$,

所以$\angle EAD=30°$.

又$AF\perp CB$，所以$\angle ECF=30°$，

所以$CE=2EF$，于是$AE=4EF=4$.

评注　含$30°$的直角三角形是非常特殊的直角三角形，要善于发现并加以应用.

独立尝试

1. 如图1－23，在$\triangle ABC$中，点E，F在AB上，$AC=AE$，$BC=BF$. 若$\angle A+\angle B=x°$，$\angle ECF=y°$.

  (1) 探索x与y间的关系.

  (2) 若$\angle ACB=90°$，则$\angle ECF$为多少度？

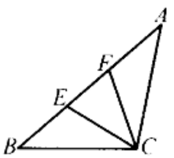


图1－23

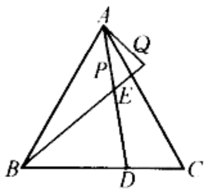


图1－24

2. 如图1－24，E，D分别是正$\triangle ABC$的AC，BC边上的点，$AE=CD$，连接BE与AD相交于点P，$AQ\perp BE$，交BE的延长线于点Q，问是否存在整数m，使$AP=mPQ$.

评注　由于AP，PQ在$\mathrm{Rt}\triangle APQ$中，可以联想含$30°$的直角三角形性质.

数学活动

如图1－25，在$\triangle ABC$中，$\angle A=30°$，最大边是最小边的两倍，$\triangle ABC$是直角三角形吗？

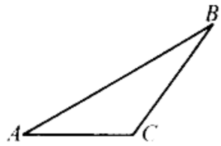
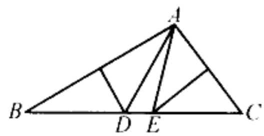


图1－25

挑战自我

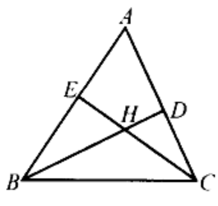
复习巩固

1. 如图，在$\triangle ABC$中，AB，AC的中垂线分别交BC于点D，E. 已知$\triangle ADE$的周长为8 cm，则$BC=$________ cm.

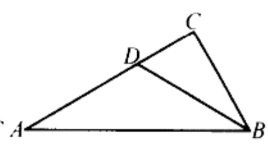


（第1题）

2. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，高BD，CE交于点H，且$BH=4$，$HD=1$，则$CE=$________.



（第2题）



（第3题）

3. 如图，在$\triangle ABC$中，已知$\angle C=90°$，$AB=2BC$，BD平分$\angle ABC$，则$\dfrac{CD}{AD}=$________.