数学分析选讲

MATHEMATICAL ANALYSIS

主编 卜春霞 赵占才

郑州大学出版社

数学分析选讲

主编:卜春霞　赵占才

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/卜春霞,赵占才主编.—郑州:郑州大学出版社,2006.9

ISBN 7-81106-412-X

Ⅰ.数… Ⅱ.①卜…②赵… Ⅲ.数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 079729 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052

出版人:邓世平　　发行部电话:0371-66966070

全国新华书店经销

河南省豫水印务有限公司印制

开本:787 mm×1 092 mm　　1/16

印张:18.25

字数:443 千字　　印数:1~2 000

版次:2006 年 9 月第 1 版　　印次:2006 年 9 月第 1 次印刷

书　号:ISBN 7-81106-412-X/O·26　　定价:28.00 元

内容简介

Brief introduction

本书系统地总结了数学分析中的基本技巧与典型方法。全书共分七讲：极限初论，极限续论，一元函数微分学，一元函数积分学，级数，反常积分，重积分、曲线积分与曲面积分。本书的特点是内容丰富，分类详细明确，注重实用和突出技巧方法。

本书可作为数学分析课的学习参考书，也可供准备报考研究生的人员参考。

前　言
Foreword

数学分析是数学专业的一门最重要的基础课，掌握其基本知识和基本思想将有助于其他后续课程的学习。在教学实践中，我们发现学生运用所掌握的知识去分析问题和解决问题的能力有限，并时常感到困难。基于这种困难，我们广泛搜集了各类典型例题，分析所涉及的内容和方法，进行归纳和总结。

本书紧密地配合教材和教学，结合学生的实际，同时参考北京非数学专业大学生历届数学竞赛试题及历届全国各院校的数学专业考研试题编写而成。可以作为正在学习该课程的本科学生以及准备报考研究生人员的参考书。

全书共分七讲。每讲由若干节组成。每讲的内容包括内容提要，典型例题，每讲的最后是习题。内容提要部分总结了每节的定义、重要定理和公式，对概念的理解，知识体系的纵横交叉作了系统的总结。例题部分既有基本计算题，也有较难的证明题。几乎每道典型例题我们都做了评注，讲述解题的基本思路，指出易被忽略的问题，分析解题的基本技巧和方法。习题部分是典型例题的后续或延拓，认真研究这些习题，可以使读者更深地体会例题中的思路与技巧。

编写过程中，郑州大学数学系、郑州大学出版社给予编者很大的帮助，特别是李梦如教授、慕小武教授对本书提出了宝贵的修改意见和建议，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者水平，编写中一定会有不少缺点与错误，敬请读者批评指正。

卜春霞

2006 年 5 月

目录

Contents

第一讲　极限初论

1.1　数列极限

一、内容提要

1. 数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N$,有$|x_n-a|<\varepsilon$.

[注1]　ε的双重性.一方面,正数ε具有绝对的任意性,这样才能有

$$\{x_n\}\text{无限趋近于}a\Leftrightarrow|x_n-a|<\varepsilon(n>N).$$

另一方面,正数ε又具有相对的固定性,从而使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$.还表明数列$\{x_n\}$无限趋近于a的渐近过程的不同程度,进而能估算$\{x_n\}$趋近于a的近似程度.

[注2]　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则对于每一个正数$\varepsilon$总存在一正整数$N$与之对应,但这种$N$不是唯一的,若$N$满足定义中的要求,则取$N+1,N+2,\cdots$,作为定义中的新的一个$N$也必满足极限定义中的要求,故若存在一个$N$则必存在无穷多个正整数可作为定义中的$N$.

[注3]　$x_n\to a(n\to\infty)$的几何意义是:对a的预先给定的任意ε-邻域$\mathrm{U}(a,\varepsilon)$,在$\{x_n\}$中至多除去有限项,其余的无穷多项将全部进入$\mathrm{U}(a,\varepsilon)$.

[注4]　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a\Leftrightarrow\exists\varepsilon_0,\forall N\in\mathbf{N},\exists n_0>N$,有$|x_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

2. 子列的定义

在数列$\{x_n\}$中,保持原来次序自左往右任意选取无穷多个项所得的数列称为$\{x_n\}$的子列,记为$\{x_{n_k}\}$,其中n_k表示x_{n_k}在原数列中的项数,k表示它在子列中的项数.

[注1]　对每一个k,有$n_k\geqslant k$.

[注2]　对任意两个正整数h,k,如果$h\geqslant k$,则$n_h\geqslant n_k$.反之,若$n_h\leqslant n_k$,则$h\leqslant k$.

[注3]　$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists K\in\mathbf{N},\forall k>K$,有$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$.

[注4]　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \Leftrightarrow \{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 a.

3. 数列有界

对数列 $\{x_n\}$，若 $\exists M>0$，使得对 $\forall n\in\mathbf{N}$，有 $|x_n|\leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列.

4. 无穷大量

对数列 $\{x_n\}$，如果 $\forall G>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$\forall n>N$，有 $|x_n|>G$，则称 $\{x_n\}$ 为无穷大量，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

[注1]　∞ 只是一个记号，不是确切的数. 当 $\{x_n\}$ 为无穷大量时，数列 $\{x_n\}$ 是发散的，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

[注2]　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，则 $\{x_n\}$ 无界，反之不真.

[注3]　设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 为同号无穷大量，则 $\{x_n+y_n\}$ 为无穷大量.

[注4]　设 $\{x_n\}$ 为无穷大量，$\{y_n\}$ 有界，则 $\{x_n\pm y_n\}$ 为无穷大量.

[注5]　设 $\{x_n\}$ 为无穷大量，对数列 $\{y_n\}$，若 $\exists\delta>0$，$N\in\mathbf{N}$，使得对 $\forall n>N$，有 $|y_n|\geqslant\delta$，则 $\{x_ny_n\}$ 为无穷大量. 特别地，若 $y_n\to a\neq0$，则 $\{x_ny_n\}$ 为无穷大量.

5. 无穷小量

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称 $\{x_n\}$ 为无穷小量.

[注1]　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\{y_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

[注2]　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$；若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，且 $\exists N\in\mathbf{N}$，使得 $\forall n>N$，$x_n\neq0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=\infty$.

6. 收敛数列的性质

(1) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 必有界，反之不真.

(2) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则极限必唯一.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $a>b$，则 $\exists N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n>y_n$.

[注]　这条性质称为“保号性”，在理论分析论证中应用极普遍.

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，且 $\exists N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，有 $x_n>y_n$，则 $a\geqslant b$.

[注]　这条性质在一些参考书中称为“保不等号性”.

(5) 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 皆收敛，则它们和、差、积、商所构成的数列 $\{x_n+y_n\}$，$\{x_n-y_n\}$，$\{x_ny_n\}$，$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$（$\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$）也收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}\quad(\lim_{n\to\infty}y_n\neq0).$$

7. 夹逼定理

若$\exists N\in\mathbf{N}$,使得当$n>N$时有$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

8. 单调有界定理

单调递增有上界数列$\{x_n\}$必收敛,单调递减有下界数列$\{x_n\}$必收敛.

9. Cauchy 收敛准则

数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是:$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n,m>N$,有$|x_n-x_m|<\varepsilon$.

[**注**]　Cauchy 收敛准则是判断数列敛散性的重要理论依据.尽管没有提供计算极限的方法,但它的长处也正在于此——在论证极限问题时不需要事先知道极限值.

10. Bolzano Weierstrass 定理

有界数列必有收敛子列.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots$

12. 几个重要不等式

(1) Bernoulli 不等式:当$a\geqslant-2$时,$\forall n>N$,有$(1+a)^n\geqslant1+na$.

(2) Cauchy - Schwarz 不等式:$\forall a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$,有

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_kb_k|^2\right)\leqslant\sum_{k=1}^n a_k^2\sum_{k=1}^n b_k^2.$$

(3) 算术 - 几何 - 调和平均不等式:$\forall a_k>0(k=1,2,\cdots,n)$,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

(4) $\forall n\in\mathbf{N},\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$.

13. O. Stolz 公式

定理 1　($\frac{\infty}{\infty}$型 Stolz 公式)

设$\{x_n\}$严格递增,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\begin{cases}a(\text{有限数})\\+\infty\\-\infty\end{cases},\text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\begin{cases}a(\text{有限数})\\+\infty\\-\infty\end{cases}.$$

定理 2　($\frac{0}{0}$型 Stolz 公式)

设$\{x_n\}$严格递减,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\begin{cases}a(\text{有限数})\\+\infty\\-\infty\end{cases},\text{则}\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\begin{cases}a(\text{有限数})\\+\infty\\-\infty\end{cases}.$$

［注1］ 定理1其名为$\frac{\infty}{\infty}$型，其实只要求分母x_n严格单增趋向无穷大，至于分子y_n是否趋向无穷大，无关紧要．定理2则是名符其实的$\frac{0}{0}$型．

［注2］ Stolz公式可以说是序列里的L'Hospital法则，它对求序列的极限很有用．

［注3］ 此定理的条件只是一个充分条件，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$不存在，不能推出$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}$不存在．

二、例题

例1.1 用定义证明下列各式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}=1$；

(2) 设$x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0\ (\alpha>0)$．

证明：(1) $\forall\varepsilon>0$，欲使不等式

$$\left|\frac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}-1\right|=\frac{6n-5}{3n^2-n+6}<\frac{6n}{3n^2-n}<\frac{6n}{n^2}=\frac{6}{n}<\varepsilon$$

成立，只须$n>\frac{6}{\varepsilon}$，于是，$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{6}{\varepsilon}]+1$，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}-1\right|<\frac{6}{n}<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+1}{3n^2-n+6}=1.$$

(2) 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$x_n>0$，知$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有$|x_n-a|<\sqrt{a}\varepsilon$，则

$$\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right|=\frac{|x_n-a|}{\sqrt{x_n}+\sqrt{a}}<\frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon.$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当$n>N$时，有$\left|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}\right|<\frac{|x_n-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$，

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}.$$

(3) 已知$n>\ln n$，因为

$$0<\frac{\ln n}{n^\alpha}=\frac{\frac{2}{\alpha}\ln n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha}<\frac{\frac{2}{\alpha}\ln([n^{\frac{\alpha}{2}}]+1)}{n^\alpha}<\frac{\frac{2}{\alpha}([n^{\frac{\alpha}{2}}]+1)}{n^\alpha}\leqslant\frac{\frac{2}{\alpha}\cdot 2[n^{\frac{\alpha}{2}}]}{n^\alpha}\leqslant\frac{4}{\alpha}\cdot\frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha}=\frac{4}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}},$$

所以，$\forall\varepsilon>0$，欲使不等式$\left|\frac{\ln n}{n^\alpha}-0\right|=\frac{\ln n}{n^\alpha}\leqslant\frac{4}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}}<\varepsilon$成立，只须$n>\left(\frac{4}{\alpha\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}$．

于是，$\forall \varepsilon>0$，取 $N=\left[\left(\frac{4}{\alpha\varepsilon}\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]+1$，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{\ln n}{n^{\alpha}}-0\right|=\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\leqslant\frac{4}{\alpha n^{\frac{\alpha}{2}}}<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}=0.$$

评注1　本例中，我们均将 $|x_n-a|$ 做了适当的变形，使得 $|x_n-a|\leqslant g(n)<\varepsilon$，从而从解不等式 $g(n)<\varepsilon$ 中求出定义中的 N. 将 $|x_n-a|$ 放大时要注意两点：①$g(n)$ 应满足当 $n\to\infty$ 时，$g(n)\to 0$. 这是因为要使 $g(n)<\varepsilon$，$g(n)$ 必须能够任意小；②不等式 $g(n)<\varepsilon$ 容易求解.

评注2　用定义证明 $x_n\to a(n\to\infty)$，对 $\forall\varepsilon>0$，只要找到一个自然数 $N(\varepsilon)$，使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 即可. 关键证明 $N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ 的存在性.

评注3　在第二小题中，用到了数列极限定义的等价命题，即：

(1) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $|x_n-a|\leqslant M\varepsilon$（$M$ 为任一正常数）.

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon^k(k\in\mathbf{N})$.

例1.2　用定义证明下列各式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\quad(a>1,k\in\mathbf{N})$.

证明：(1)（方法一）　由于 $\sqrt[n]{n}>1(n>1)$，可令 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda(\lambda>0)$，则

$$n=(\sqrt[n]{n})^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2(n>2).$$

当 $n>2$ 时，$n-1>\frac{n}{2}$，有

$$n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2>\frac{n^2}{4}\lambda^2=\frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n}-1)^2,$$

即
$$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

$\forall\varepsilon>0$，欲使不等式 $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$ 成立，只须 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$.

于是，$\forall\varepsilon>0$ 取 $N=\max\left\{\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]+1,2\right\}$，当 $n>N$ 时，有

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

（方法二）　因为

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\overbrace{1\cdot1\cdot\cdots\cdot1}^{n-2\text{个}})^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1+\cdots+1}{n}=\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

所以$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$\forall\varepsilon>0$,欲使不等式$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$成立,只须$n>\dfrac{4}{\varepsilon^2}$.

于是,$\forall\varepsilon>0$,取$N=\left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]+1$,当$n>N$时,有

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

(2)当$k=1$时,由于$a>1$,可记$a=1+\lambda(\lambda>0)$. 则

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2\quad(n>2).$$

当$n>2$时,$n-1>\dfrac{n}{2}$,于是有

$$0<\frac{n}{a^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2}<\frac{4}{n\lambda^2}.$$

$\forall\varepsilon>0$,欲使不等式$\left|\dfrac{n}{a^n}-0\right|=\dfrac{n}{a^n}<\dfrac{4}{n\lambda^2}<\varepsilon$成立,只须$n>\dfrac{4}{\varepsilon\lambda^2}$.

对$\forall\varepsilon>0$取$N=\max\left\{\left[\dfrac{4}{\varepsilon\lambda^2}\right]+1,2\right\}$,当$n>N$时,有

$$\left|\frac{n}{a^n}-0\right|=\frac{n}{a^n}<\frac{4}{n\lambda^2}<\varepsilon.$$

当$k>1$时,$a^{\frac{1}{k}}>1(a>1)$,而$\dfrac{n^k}{a^n}=\left[\dfrac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k$.

则由以上证明知$\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}$,当$n>N$时,有$0<\dfrac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}<\varepsilon$,即

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\varepsilon^k,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$$

评注1 在本例中,$\forall\varepsilon>0$,要从不等式$|x_n-a|<\varepsilon$中解得N非常困难. 根据x_n的特征,利用二项式定理展开较容易. 要注意,在这两个小题中,一个λ是变量,一个λ是定值.

评注2 从第一小题的方法二可看出算术-几何平均不等式的妙处.

评注3 第二小题的证明用了从特殊到一般的证法.

例1.3 求证:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$($a$为常数).

分析:$\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a}{3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a}{m}\cdot\dfrac{a}{m+1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a}{n}$,因$a$为固定常数,必存在正整数

m,使 $m\leqslant|a|<m+1$,因此,自$\frac{a}{m+1}$开始,$\left|\frac{a}{m+1}\right|<1$,$\left|\frac{a}{m+2}\right|<1,\cdots,\left|\frac{a}{n}\right|<1$,且 $n\to\infty$ 时,$\left|\frac{a}{n}\right|\to 0$.

证明:对于固定的 a,必存在正整数 m,使 $|a|<m+1$,当 $n\geqslant m+1$ 时,有

$$0\leqslant\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\frac{|a|}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n}\leqslant\frac{|a|^m}{m!}\cdot\frac{|a|}{n},$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a|^m}{m!}\cdot\frac{|a|}{n}=0$,由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a|^n}{n!}=0$,

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

评注　当极限不易直接求出时,可将求极限的变量作适当的放大或缩小,使放大、缩小所得的新变量,易于求极限,且二者极限值相同,直接由夹逼定理得出结果.

例 1.4　若$\{a_n\}$是正数数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=0.$$

证明:由 $\sqrt[n]{(1a_1)(2a_2)\cdots(na_n)}\leqslant\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$,知

$$\sqrt[n]{n!}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}.$$

即
$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

于是,$0<\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$,而已知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}=0\text{ 及 }\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

由夹逼定理得
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0.$$

评注 1　极限四则运算性质普遍被应用,值得注意的是这些性质成立的条件,即参加运算各变量的极限存在,且在商的运算中,分母极限不为 0.

评注 2　对一些基本结果能够熟练和灵活应用. 例如:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}=0(a>0)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0(a>0)$;　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

例 1.5 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$($a$ 有限或 $\pm\infty$),则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a\quad(a\text{ 有限或 }\pm\infty).$$

证明:(1)设 a 有限,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}$,当 $n>N_1$时,有 $|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}+\frac{|x_{N_1+1}-a|+\cdots+|x_n-a|}{n}$$

$$<\frac{A}{n}+\frac{(n-N_1)}{n}\varepsilon<\frac{A}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

其中 $A=|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|$为非负常数.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{n}=0$,故对上述的 $\varepsilon>0$, $\exists N_2\in\mathbf{N}$,当 $n>N_2$时,有$\dfrac{A}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

(2)设 $a=+\infty$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,则

$\forall G>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}$,当 $n>N_1$时,$x_n>2G$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}>0$. 于是

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{N_1}}{n}+\frac{x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}$$

$$>\frac{x_{N_1+1}+\cdots+x_n}{n}>\frac{2G(n-N_1)}{n}=2G-\frac{2N_1}{n}G.$$

取 $N=2N_1$,当 $n>N$ 时,$\dfrac{2N_1}{n}G<G$,于是

$$\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}>2G-G=G.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty.$$

(3)$a=-\infty$ 时证法与(2)类似.

评注 1 这一结论也称 Cauchy 第一定理,是一个有用的结果,应用它可计算一些极限,例如:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0$ (已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$);

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$ (已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$).

评注 2 此结论是充分的，而非必要的. 但若条件加强为"$\{x_n\}$ 为单调数列"，则由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$ 可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

评注 3 证明一个变量能任意小，将它放大后，分成有限项，然后证明它的每一项都能任意小，这种"拆分方法"是证明某些极限问题的一个常用的方法，例如：

若 $0<\lambda<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$（$a$ 为有限数），证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2a_{n-2}+\cdots+\lambda^na_0)=\frac{a}{1-\lambda}.$$

分析： 令 $x_n=a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2a_{n-2}+\cdots+\lambda^na_0$，则

$$(1-\lambda)x_n=a_n+\lambda(a_{n-1}-a_n)+\lambda^2(a_{n-2}-a_{n-1})+\cdots+\lambda^n(a_0-a_1)-\lambda^{n+1}a_0.$$

只须证 $\quad\lambda(a_{n-1}-a_n)+\lambda^2(a_{n-2}-a_{n-1})+\cdots+\lambda^n(a_0-a_1)\to0\quad(n\to\infty)$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，故 $\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，$|a_n-a_{n-1}|<\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}&|\lambda(a_{n-1}-a_n)+\lambda^2(a_{n-2}-a_{n-1})+\cdots+\lambda^n(a_0-a_1)|\\&\leqslant\lambda|a_n-a_{n-1}|+\lambda^2|a_{n-1}-a_{n-2}|+\cdots+\lambda^N|a_{n-N+1}-a_{n-N}|+\lambda^{N+1}|a_{n-N}-a_{n-N-1}|\\&\quad+\cdots+\lambda^n|a_0-a_1|.\end{aligned}$$

再利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n=0(0<\lambda<1)$ 即得.

例 1.6 求下列数列极限：

(1) 设 $A>0,x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{A}{x_n}\right)$；

(2) 设 $x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$；

(3) 设 $x_0=a,x_1=b,x_n=\dfrac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad(n=2,3,\cdots)$.

解： (1) 首先注意 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{A}{x_n}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{A}{x_n}}=\sqrt{A}$，所以 $\{x_n\}$ 为有下界数列.

另一方面，因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right)-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{A}{x_n}-x_n\right)\leqslant0.$$

故 $\{x_n\}$ 为单调递减数列. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且记为 a.

由极限的四则运算，在 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{A}{x_n}\right)$ 两端同时取极限 $n\to\infty$，得 $a=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{A}{a}\right)$.
并注意到 $x_n\geqslant\sqrt{A}>0$，解得 $a=\sqrt{A}$.

(2) 注意到 $0<x_{n+1}=\dfrac{3+3x_n}{3+x_n}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}<3$，于是 $\{x_n\}$ 为有界数列.

另一方面，由

$$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{3+3x_{n+1}}{3+x_{n+1}}-x_{n+1}=\frac{3-x_{n+1}^2}{3+x_{n+1}}=\frac{3-\left[\dfrac{3+3x_n}{3+x_n}\right]^2}{3+\dfrac{3+3x_n}{3+x_n}}=\frac{2(3-x_n^2)}{(3+x_n)(4+2x_n)}$$

$$=\frac{3-x_n^2}{(3+x_n)(2+x_n)}$$

知
$$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{\dfrac{3-x_n^2}{(3+x_n)(2+x_n)}}{\dfrac{3-x_n^2}{3+x_n}}=\frac{1}{2+x_n}>0.$$

即 $x_{n+2}-x_{n+1}$ 与 $x_{n+1}-x_n$ 保持同号，因此 $\{x_n\}$ 为单调数列，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在(记为 a).

由极限的四则运算，在 $x_{n+1}=\dfrac{3+3x_n}{3+x_n}$ 两端同时取极限 $n\to\infty$，得 $a=\dfrac{3+3a}{3+a}$，并注意到 $0<x_n<3$，解得 $a=\sqrt{3}$.

(3)由于 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}-x_n=-\dfrac{x_n-x_{n-1}}{2}=\cdots$

$$=\frac{x_2-x_1}{(-2)^{n-1}}=\frac{x_1-x_0}{(-2)^n}=\frac{b-a}{(-2)^n}.$$

又 $x_n=\displaystyle\sum_{m=0}^{n-1}(x_{m+1}-x_m)+x_0=(b-a)\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{(-2)^m}+a=(b-a)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+a$，

所以
$$\lim_{n\to\infty}x_n=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+a=\frac{2(b-a)}{3}+a=\frac{2b+a}{3}.$$

评注1 求递归数列的极限，主要利用单调有界必有极限的原理，用归纳法或已知的一些基本结果说明数列的单调、有界性.在说明递归数列单调性时，可用函数的单调性.下面给出一个重要的结论：设 $a_{n+1}=f(a_n)(n=1,2,\cdots)a_n\in I$，若 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，且 $a_2>a_1$(或 $a_2<a_1$)，则数列 $\{a_n\}$ 单调增加(或单调减少).

评注2 第三小题的方法较为典型，根据所给的 x_n,x_{n-1},x_{n-2} 之间的关系，得到 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 的等式，再利用错位相减的思想，将数列通项 x_n 写成级数的表达式.

例1.7 设 a_1,b_1 为任意正数，且 $a_1\leqslant b_1$，设 $a_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$，$b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ $(n=2,3,\cdots)$，则 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 收敛，且极限相同.

证明：由 $a_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\leqslant\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{2\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}}=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}=b_n$，知

$$b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\leqslant\sqrt{b_{n-1}b_{n-1}}=b_{n-1}.$$

则 $0<b_n\leqslant b_1$，即 $\{b_n\}$ 为单调有界数列.

又 $0<a_n\leqslant b_n\leqslant b_1$，且

$$a_n-a_{n-1}=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}-a_{n-1}=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}-a_{n-1}^2-a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}=\frac{a_{n-1}(b_{n-1}-a_{n-1})}{a_{n-1}+b_{n-1}}\geqslant 0,$$

所以 $\{a_n\}$ 亦为单调有界数列.