ZHONGKAOBIXIU

中考必修

初三二轮专题复习

数学

主编 王建明 周度

江苏人民出版社

编写说明

本书是初三第一轮全面复习后的第二轮专题复习用书，内容指向《九年义务教育初中课程标准》、《九年义务教育初中教学大纲》及现行教材的共同要求。读者对象为2006届初三年级师生。

该书以对初三学生的常态调研为基础，针对学生在进入总复习以后面临的问题，有系统、有选择、有重点、有目标地通过解题分析、解题示范和解题训练，借助对重点与热点内容的剖析、解题途径的探究及思考方法的指导，揭示解题规律和基本的学科思想，体现课程改革的基本理念和中考命题改革的精神。

为了提高复习的效率，每一学科均根据学科特点设置若干专题集中讨论。每个专题分别由以下几部分组成，不同基础的学生可以全部或根据自己的需要选择部分专题重点学习。

【考点聚焦】说明专题中题目的主要表现形态和基本特点，本专题在中考评价中的知识与能力测试要点。

【解题档案】说明解决本专题问题的基本的思维方向和基本规律，主要的思想方法，需要注意的有关重点和关键点。

【经典题库】一般选择5~6道新颖、典型的例题（主要选近两年的中考题）。编排有层次性，体现循序渐进的原则。

【自主评价】一般选择8~12题，其中：基础题占20%，中等题占60%，较难题占20%，一般不出现难题（难度系数在0.3以下）。

【参考答案】答案集中排放在最后，对较容易的题目仅写出答案，较难的题目提供提示、简要解答过程或详细过程。

为了切实提高学生的能力，经典例题的分析与指导主要由以下几个环节组成，不同水平的学生可以针对自己的薄弱环节重点阅读研习。

1. 解题点拨　主要是分析题意，指导读者正确掌握审题技巧、寻求最佳解题途径和解题的基本策略。本书的分析不同于解答，语言较简洁，且富有启发性。

2. 解题过程　解答分“详细解答”和“简要解答”两种。每一专题中，一般有3~4道例题有详细解答过程。“详细解答”完整、规范，具有示范性。“简单解答”仅给出必要的解题过程与方法。

若有多种解法，则通过“解题点拨一”、“解题过程一”；“解题点拨二”、“解题过程二”等方式实现。对一道题目的多种解法均精选通法，不出现较为冷僻的解法。一般情况下，一道题目的多种解法不超过三种，以便一般水平的学生均能形成正确的思想方法并能遴选最佳

的解决办法。

3. 解后回味　主要围绕三方面展开：一是对所选的例题进行评析，说明该题设计的精当和谐之处，以便确切掌握题旨；二是总结该类问题的基本解题规律和思想方法；三是揭示学生在理解概念以及审题、解题过程中思路和方法等方面容易出现的偏差，并透析病因提出纠错建议，以切中要害，帮助学生在量的积累的基础上形成质的飞跃。

4. 拓展延伸　结合生产、生活实际和当前的热点问题，对典型例题进行适当的变式训练。变式题有具体展示，并给出必须的解题过程，目的在于帮助学生进一步形成信息筛选、知识迁移、举一反三、临机应变和融会贯通的能力。

我们一贯主张，"素质教育与应试复习工作应该统一起来，课程改革与考试改革应该同步研究"，所以本书虽属于复习指导用书性质，从形式上看，它与其他复习指导用书似乎没有多大的区别，但在指导思想上却高度关注学生素质尤其是他们的学科文化素质的培养，关注学生的学习能力、思维能力、审美能力、应用能力的形成，关注课程改革对于义务教育阶段的新要求，在"知识与能力，过程与方法，情感、态度、价值观"等方面给予学生以全面的关怀和指导。考虑到初中总复习时间紧、任务重的实际情况，我们试图帮助学生有效、高效地组织自身的复习，除了严格按照教学大纲和课程标准的要求，全面、系统、有序地覆盖"基本知识、基本技能、基本方法、基本思路"以外，还严格控制各专题"落点的选择"和"到位的程度"，注意突出"基本的、核心的、可再生性的"内容，以便学生在圆满完成初中学段学习任务以后还可以持续发展。为了避免编写中的差错以致影响复习的效果，我们对选题进行了前提检验，组织了专家对参考答案和提示进行审读，在此一并表示谢忱。

由于编写时间匆促，错误在所难免，敬请批评指正！

编　者

2006年1月

目　录

专题1 代数应用型问题

考点聚焦

纵观近几年的中考试卷，应用题的占分比例呈现上升趋势．这些应用题的取材贴近现实生活，数据真实可靠．其内容主要包括：用数与式知识解决的应用题，用不等式知识解决的应用题，用方程知识解决的应用题，用函数知识解决的应用题以及综合运用代数知识解决的应用题等．

解题档案

解决应用型问题的基本的思维过程：阅读审题（去掉无用信息，找到关键词语），确立模型（是方程，不等式还是函数等），建立等式（或不等式），求解检验．

关键：学会提炼（运用数学的思维方式去观察，分析应用题），学会化归（将复杂问题简单化，陌生问题熟悉化，抽象问题具体化），学会数学化（建立数学模型）．

经典题库

【例1】(2003福州中考)据《人民日报》2003年6月1日报道，今年1～4月福州市完成工业总产值550亿元，比去年同期工业总产值增长21.46%．那么去年同期工业总产值在（　　）

A. 380～400(亿元)　　B. 400～420(亿元)

C. 420～440(亿元)　　D. 440～460(亿元)

解题过程　由题意，得$\frac{550}{1+21.46\%}\approx 452.8$(亿元)，即去年同期工业总产值在440～460亿元之间，故选择D.

回味总结　本题不要求去年同期工业总产值的准确值，而是要的估计值，因此，在具体求解过程中，不必象上面那样计算．我们分析一下：

$\because 1.2<1+21.46\%<1.25$，即$\frac{6}{5}<1+21.46\%<\frac{5}{4}$．又$1.2=\frac{6}{5}$，$1.25=\frac{5}{4}$，

$\therefore 550\times\frac{4}{5}<\frac{550}{1+21.46\%}<550\times\frac{5}{6}$，即$440<\frac{550}{1+21.46\%}<459$.

因此，这里只要抓住$550\times\frac{4}{5}<\frac{550}{1+21.46\%}$即可．

估算能力是数学的基本能力，能减少运算量，提高解题速度．因此要理解其思想方法，并运用它解决一些简单的数学问题和实际问题．

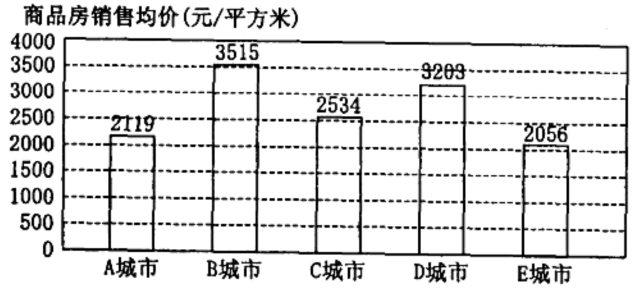
拓展延伸　(2005南通中考)某同学根据2004年江苏省内五个城市商品房销售均价(即销售平均价)的数据，绘制了如下统计图：

(1)这五个城市2004年商品房销售均价的中位数，极差分别是多少？

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(2)若 2002 年 A 城市的商品房销售均价为 1600 元/平方米，试估计 A 城市从 2002 年到 2004 年商品房销售均价的年平均增长率约是多少(要求误差小于 1%)？

2004年江苏省内五个城市商品房销售均价统计图



解题过程 (1)中位数是 2534(元/平方米)；

极差是 $3515-2056=1459$(元/平方米).

(2)设 A 城市 2002 年到 2004 年的年平均增长率为 x，由题意，得

$1600(1+x)^2=2119$，$(1+x)^2=1.324375$，

$\because x>0$，$\therefore 1+x>0$，

当 $x=0.15$ 时，$(1+x)^2=1.15^2=1.3225<1.324375$，

当 $x=0.16$ 时，$(1+x)^2=1.16^2=1.3456>1.324375$，

可知 $1.15<1+x<1.16$，$\therefore 0.15<x<0.16$.

答：平均增长率约为 15%(或 16%等，答案不惟一).

2

【例 2】(2005 南通中考)某市政府切实为残疾人办实事，在市区道路改造中为盲人修建一条长 3000m 的盲道，根据规划设计和要求，该市工程队在实际施工时增加了施工人员，每天修建的盲道比原计划增加 50%，结果提前 2 天完成，则实际每天修建盲道______ m.

思路点拨 可以直接设元和间接设元.

解题过程 [间接设元法]

设原计划每天修建盲道 xm，则实际每天修建盲道$(1+50\%)x$m.

据题意，得$\frac{3000}{x}=\frac{3000}{(1+50\%)x}+2$. 解之，得 $x=500$.

经检验 $x=500$ 是方程的根且符合题意，$\therefore (1+50\%)x=750$.

答：实际每天修建盲道 750m.

[直接设元法]

解题过程设实际每天修建盲道 xm，则原计划每天修建盲道$\frac{x}{1+50\%}$m.

据题意，得$\frac{3000}{x}+2=\frac{3000}{\frac{x}{1+50\%}}$. 解之，得 $x=750$.

经检验 $x=750$ 是方程的根且符合题意.

答：实际每天修建盲道 750m

回味总结 本题解答时注意间接设元得到 x 的值并非题目的答案. 许多数学问题的解决，往往根据量与量之间的等量关系，通过列方程(组)得到解决. 这种将问题归结为方程来处理的思想，就是方程思想. 引用方程思想解决问题，核心是用联系的观点看待变量的变

化，用等式来描述联系．

拓展延伸 (2004南京中考)某商店以2400元购进某种盒装茶叶，第一个月每盒按进价增加20%作为售价，售出50盒，第二个月每盒以低于进价5元作为售价，售完余下的茶叶．在整个买卖过程中盈利350元，求每盒茶叶的进价．

分析 从方程思想看，本题有三个等量关系：购进某种盒装茶叶总用去的费用=2400，第一个月售出的盒数+第二个月售出的盒数=购进的总盒数，第一个月盈利−第二个月亏本=350. 解题时，选择与未知数、已知量直接相关且便于求解的一种方案．

解题过程 设每盒茶叶的进价为x元，则由题意，得

$50\times20\%x-5(\frac{2400}{x}-50)=350$，解这个方程，得$x_1=40$，$x_2=-30$.

经检验$x_1=40$，$x_2=-30$都是原方程的解，但$x_2=-30$不符合实际意义舍去，

所以只取$x_1=40$.

【例3】(2003黑龙江中考)为了保护环境，某企业决定购买10台污水处理设备，现有A，B两种型号的设备，其中每台的价格，月处理污水量及年消耗费如下表：

	A型	B型
价格(万元/台)	13	10
处理污水量(吨/月)	240	200
年消耗费(万元/台)	1	1

经预算，该企业购买设备的资金不高于105万元．

(1)请你设计该企业有几种购买方案；

(2)若企业每月产生的污水量为2040吨，为了节约资金，应选择哪种购买方案；

(3)在第(2)问的条件下，若每台设备的使用年限为10年，污水厂处理费为每吨10元，请你计算，该企业自己处理污水与将污水排到污水厂处理相比较，10年节约资金多少万元？(注：企业处理污水的费用包括购买设备的资金和消耗费).

思路点拨 (1)企业购买A，B两种型号的设备的资金不高于105万元，这就是说，购买A型号设备的资金与购买B型号设备的资金之和要小于或等于105万元，而不考虑处理污水量，据此可列出不等式．对于(2)，关键要考虑每月的污水处理量，然后再考虑资金问题．

解题过程 (1)设购买污水处理设备A型x台，则B型$(10-x)$台．

由题意知，$12x+10(10-x)\leqslant105$，解得$x\leqslant2.5$.

$\because x$取非负整数，x可取0，1，2.

$\therefore$有三种购买方案：购A型0台，B型10台；购A型1台，B型9台；购A型2台，B型8台．

(2)由题意，得$240x+200(10-x)\geqslant2040$，解得$x\geqslant1$. $\therefore x$为1或2.

当$x=1$时，购买资金为$12\times1+10\times9=102$(万元)；

当$x=2$时，购买资金为$12\times2+10\times8=104$(万元).

$\therefore$为了节约资金，应选购A型1台，B型9台．

(3)10年企业自己处理污水的总资金为$102+10\times10=202$(万元).

若将污水排到污水厂处理，10年所需费用为

$2040\times12\times10\times10=2448000$(元)$=244.8$(万元).

$244.8-202=42.8$(万元),∴能节约资金 42.8 万元.

回味总结 求出不等式的解应该是自然数,并且要注意分类讨论. 现实世界中的不等关系是普遍存在的. 许多问题有时并不需要研究他们之间的相等关系,而只需确定某个量的变化范围即可对所研究的问题有比较清楚的认识.

拓展延伸 (2005 茂名中考)今年 6 月份,我市某果农收获荔枝 30 吨,香蕉 13 吨,现计划租用甲,乙两种货车共 10 辆将这批水果全部运往深圳,已知甲种货车可装荔枝 4 吨和香蕉 1 吨,乙种货车可装荔枝香蕉各 2 吨;

(1)该果农安排甲,乙两种货车时有几种方案?请你帮助设计出来;

(2)若甲种货车每辆要付运输费 2000 元,乙种货车每辆要付运输费 1300 元,则该果农应选择哪种方案使运费最少?最少运费是多少元?

解题过程 (1)设安排甲种货车 x 辆,则安排乙种货车(10-x)辆,

依题意,得$\begin{cases}4x+2(10-x)\geqslant30,\\x+2(10-x)\geqslant13.\end{cases}$解这个不等式组,得$\begin{cases}x\geqslant5,\\x\leqslant7.\end{cases}$

∴$5\leqslant x\leqslant7$.

∵x 是整数,∴可取 5,6,7. 即安排甲,乙两种货车有三种方案:

① 甲种货车 5 辆,乙种货车 5 辆;② 甲种货车 6 辆,乙种货车 4 辆;

③ 甲种货车 7 辆,乙种货车 3 辆.

(2)方法一:由于甲种货车的运费高于乙种货车的运费,两种货车共 10 辆,所以当甲种货车的数量越少时,总运费就越少,故该果农应选择方案①运费最少,最少运费是 16500 元;

方法二:方案①需要运费 $2000\times5+1300\times5=16500$(元).

方案②需要运费 $2000\times6+1300\times4=17200$(元).

方案③需要运费 $2000\times7+1300\times3=17900$(元).

∴该果农选择方案①运费最少,最少运费是 16500.

【例 4】(2005 济宁中考)为加快教学手段的现代化,学校计划同时从甲,乙两家电脑经销商(以下简称甲,乙)购置一定数量的电脑,订购甲的电脑数是乙的电脑数的 2 倍. 提货时,由于资金不足,学校少购买了 5 台电脑,最后购买甲的电脑数与乙的电脑数相等. 若学校最后购买的电脑总数为 y 台,在少购买的 5 台电脑中,有甲的 x 台($0\leqslant x\leqslant5$).

(1)写出 y 与 x 的关系式;

(2)学校最后所购买的电脑共多少台?

思路点拨 由"订购甲的电脑数是乙的电脑数的 2 倍"建立关于 x,y 的等式.

解题过程 (1)根据题意,得

$$\frac{2}{3}(y+5)-x=\frac{1}{3}(y+5)-(5-x)\text{或}\frac{y}{2}+x=2\left[\frac{y}{2}+(5-x)\right].$$

整理,得 $y=6x-20$.

(2)根据题意及(1)的结果,得

$\begin{cases}6x-20>0,\\x\geqslant0,\\x\leqslant5\end{cases}$. 解得$\frac{10}{3}<x\leqslant5$. ∴$x=4$ 或 $x=5$.

当 $x=4$ 时，$y=6\times4-20=4$；当 $x=5$ 时，$y=6\times5-20=10$.

答：学校最后购买的电脑为 4 台或 10 台.

回味总结 把一个具有实际背景的问题利用对应的思想把它转化为一个函数的模型，从而问题得于解决，这种思考问题的方法就是函数思想. 这类问题不仅考查同学们的数学建模能力，而且考查了同学们的洞察能力和在纷繁的信息中捕捉，转移有用信息，并解决问题的能力. 为此，同学们应该多关注生活，生产中的数学问题，形成应用数学的意识，并且养成把实际问题转化为数学问题的能力，使自己身在课堂而又不囿于课堂，避免做一个一心只读圣贤书的"书呆子".

自主评价

1. (2005 陕西中考)一件商品按成本价提高 40%后的标价，再打 8 折(标价的 80%)销售，售价为 240 元，设这样的商品成本价为 x 元，根据题意，下面所列的方程正确的是(　　)

   A. $x\cdot40\%\times80\%=240$　　　B. $x(1+40\%)\times80\%=240$

   C. $240\times40\%\times80\%=x$　　　D. $x\cdot40\%=240\times80\%$

2. (2004 江西中考)据报道：某省 2003 年中小学共装备计算机 16.42 万台，平均每 42 名中小学生拥有一台计算机；2004 年在学生数不变的情况下，计划平均每 35 名中小学生拥有一台计算机，则还需装备计算机________万台.

3. (2005 潍坊中考)为了加强学生的交通安全意识，某中学和交警大队联合举行了"我当一日小交警"活动，星期天选派部分学生到交通路口值勤，协助交通警察维护交通秩序. 若每一个路口安排 4 人，那么还剩下 78 人；若每个路口安排 8 人，那么最后一个路口不足 8 人，但不少于 4 人. 求这个中学共选派值勤学生多少人? 共在多少个交通路口安排值勤?

4. (2005 苏州中考)苏州地处太湖之滨，有丰富的水产养殖资源，水产养殖户李大爷准备进行大闸蟹与河虾的混合养殖，他了解到如下信息：

   ①每亩水面的年租金为 500 元，水面需按整数亩出租；

   ②每亩水面可在年初混合投放 4 公斤蟹苗和 20 公斤虾苗；

   ③每公斤蟹苗的价格为 75 元，其饲养费用为 525 元，当年可获 1400 元收益；

   ④每公斤虾苗的价格为 15 元，其饲养费用为 85 元，当年可获 160 元收益；

   (1)若租用水面 n 亩，则年租金共需________________元；

   (2)水产养殖的成本包括水面年租金，苗种费用和饲养费用，求每亩水面蟹虾混合养殖的年利润(利润=收益－成本)；

   (3)李大爷现有资金 25000 元，他准备再向银行贷不超过 25000 元的款. 用于蟹虾混合养殖. 已知银行贷款的年利率为 8%，试问李大爷应该租多少亩水面，并向银行贷款多少元. 可使年利润超过 35000 元?

5. (2005 哈尔滨中考)双蓉服装店老板到厂家选购 A、B 两种型号的服装，若购进 A 种型号服装 9 件，B 种型号服装 10 件，需要 1810 元；若购进 A 种型号服装 12 件，B 种型号服装 8 件，需要 1880 元.

(1)A、B 两种型号的服装每件分别为多少元?

(2)若销售 1 件 A 型服装可获利 18 元，销售 1 件 B 型服装可获利 30 元，根据市场需求，服装店老板决定，购进 A 型服装的数量要比购进 B 型服装数量的 2 倍还多 4 件，且 A 型服装最多可购进 28 件，这样服装全部售出后，可使总的获利不少于 699 元，问有几种进货方案？如何进货?

6. (2005 南京中考)在一块长方形镜面玻璃的四周镶上与它的周长相等的边框，制成一面镜子. 镜子的长与宽的比是 2∶1. 已知镜面玻璃的价格是每平方米 120 元，边框的价格是每米 20 元，另外制作这面镜子还需加工费 45 元. 设制作这面镜子的总费用是 y 元，镜子的宽度是 r 米.

(1)求 y 与 r 之间的关系式；

(2)如果制作这面镜子共花了 195 元，求这面镜子的长和宽.

7. (2005 武汉中考)某加工厂以每吨 3000 元的价格购进 50 吨原料进行加工. 若进行粗加工，每吨加工费为 600 元，需$\frac{1}{3}$天，每吨售价 4000 元；若进行精加工，每吨加工费用为 900 元，需$\frac{1}{2}$天，每吨售价 4500 元. 现将这 50 吨原料全部加工完.

(1)设其中粗加工 x 吨，获利 y 元，求 y 与 x 的函数关系式(不要求写自变量的范围)；

(2)如果必须在 20 天内完成，如何安排生产才能获得最大利润？最大利润是多少?

8. 某旅行社组团去南通旅游，30 人起组团，每人单价 800 元. 旅行社对超过 30 人的团给予优惠，即旅行团每增加一人，每人的单价就降低 10 元. 请你帮助算一下，当一个旅行团的人数是多少时，旅行社可以获得最大营业额.

9. (2005黑龙江中考)某房地产开发公司计划建A,B两种户型的住房共80套,该公司所筹资金不少于2090万元,但不超过2096万元,且所筹资金全部用于建房,两种户型的建房成本和售价如下表:

	A	B
成本(万元/套)	25	28
售价(万元/套)	30	34

(1)该公司对这两种户型住房有哪几种建房方案?

(2)该公司如何建房获得利润最大?

(3)根据市场调查,每套B型住房的售价不会改变,每套A型住房的售价将会提高a万元($a>0$),且所建的两种住房可全部售出,该公司又将如何建房获得利润最大?

注:利润=售价-成本

10. (2005黄冈中考)在黄州服装批发市场,某种品牌的时装当季节即将来临时,价格呈上升趋势. 设这种时装开始时定价为20元,并且每周(7天)涨价2元,从第6周开始保持30元的价格平稳销售;从第12用开始. 当季节即将过去时,平均每周减价2元,直到第16周周末,该服装不再销售.

(1)试建立销售价y与周次x之间的函数关系式;

(2)若这种时装每件进价z与周次x之间的关系式为$z=-0.125(x-8)^2+12$,$1\leqslant x\leqslant 16$,且x为整数,试问该服装第几周出售时,每件销售利润最大?最大利润是多少?

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

专题 2　几何应用型问题

考点聚焦

几何知识的应用在现实的生产实践和生活中极其普遍，几何知识的考查也从单纯的几何证明、计算向几何应用方面转变，且题型多种多样．它利用直线型和圆中的一些基本性质，借助于图形变换(平移变换，旋转变换，轴对称变换，相似变换)进行距离的测量与计算，面积的确定，线路的确定，方案的设计等等，主要考查学生的观察能力，空间想像能力，动手操作能力以及所学几何基础知识的灵活运用能力．

解题档案

解题一般先从实际的问题中抽象出几何图形的模型，将实际问题转化为数学问题，然后把已知量和所求的量转化在几何图形中，再根据几何图形的性质，用代数的方法进行求解，最后检验做答．

经典题库

【例 1】(2004 包头中考)某农场计划建一个养鸡场，为了节约材料，鸡场一边靠着原有的一堵墙(墙长为 28m)，另外的部分用竹篱笆围成．

(1)若用长为 50m 的竹篱笆围成面积为 300m² 矩形养鸡场(如图 1)，设矩形的长为 ym，宽为 xm，求 x 和 y 的值；

(2)若用长为 30m 的竹篱笆围成矩形(如图 1)或半圆形(如图 2)养鸡场，设矩形的面积为 S_1m²，长为 ym，宽为 xm，半圆形的面积为 S_2m²，半径为 rm，试比较 S_1 和 S_2 的大小(取 $\pi\approx3$)．

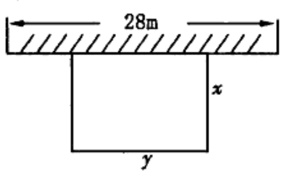


图 1

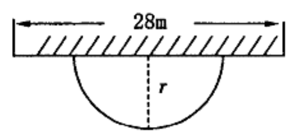


图 2

思路点拨　第 1 问是列方程组求解，只要注意鸡场的一边是靠墙的；第 2 问是要列函数关系式，求函数的最大值．

解题过程　(1)依题意得 $\begin{cases}2x+y=50,\\ xy=300.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=10,\\ y_1=30;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=15,\\ y_2=20.\end{cases}$

$\because$ 墙长 28m，$\therefore y=30$ 不合题意，舍去．$\therefore x=15, y=20$.

(2)由题意，得 $y+2x=30, S_1=xy$，$\therefore S_1=x(30-2x)=-2x^2+30x$，

又 $\because 30=\pi r$，$\therefore r=10$. $\therefore S_2=150$.

又 $\because S_1=-2x^2+30x=-2(x^2-15x)=-2(x-\frac{15}{2})^2+\frac{225}{2}$，

当 $x=\frac{15}{2}$ 时，S_1 的最大值为 $\frac{225}{2}$，$\frac{225}{2}<150$，$\therefore S_1<S_2$.

回味总结 在解答第1问时，要注意检验，围成的矩形鸡场的长不可以超过28m；在第2问中，半圆形的鸡场面积是一个定值，而矩形鸡场的面积是变化的，在变化的过程中，有一个面积是最大的，这就要用到二次函数求最大值的方法.

拓展延伸 某农场计划建一个养鸡场，为了节约材料，鸡场一边靠着原有的一堵墙（墙长为28m），另外的部分用竹篱笆围成. 若用长为 am（$a\leqslant 56$）的竹篱笆围成矩形（如图1）或半圆形（如图2）养鸡场，设矩形的面积为 S_1m²，半圆形的面积为 S_2m²，试比较 S_1 和 S_2 的大小.

解题过程 设矩形的长为 xm，则宽为 $\frac{1}{2}(a-x)$m，

$S_1=\frac{1}{2}(a-x)x=-\frac{1}{2}(x^2-ax)=-\frac{1}{2}(x-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{8}$，

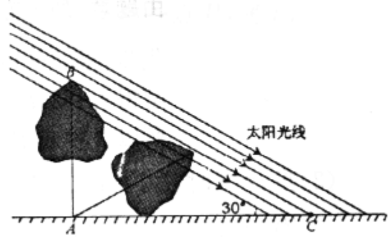
当 $x=\frac{a}{2}$（$a\leqslant 56$）时，S_1 的最大值为 $\frac{a^2}{8}$.

设半圆的半径为 rm，则 $S_2=\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{\pi})^2=\frac{a^2}{2\pi}$. $\frac{a^2}{8}<\frac{a^2}{2\pi}$，$\therefore S_1<S_2$.

【例2】（2005宿迁中考）某数学兴趣小组，利用树影测量树高. 已测出树AB的影长AC为9m，并测出此时太阳光线与地面成30°夹角.

(1)求出树高AB；

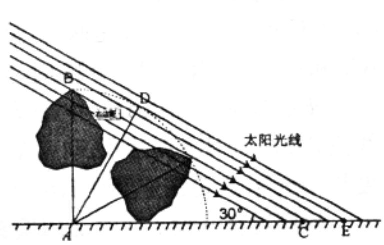
(2)因水土流失，此时树AB沿太阳光线方向倒下，在倾倒过程中，树影长度发生了变化，假设太阳光线与地面夹角保持不变，试求树影的最大长度.（计算结果精确到0.1m，参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$）



思路点拨 第1问是在Rt△ABC中，已知 $AC=9$m，$\angle ACB=30°$，求 AB 的长；第2问中树 AB 是一个动态过程，要使树影的长度最大，就必须过点 A，作 AD 垂直于光线 DE，且 AD 等于树 AB 的长，则影子 AE 最长.

解题过程 (1)在Rt△ABC中，$\angle BAC=90°$，$\angle ACB=30°$，$\because \tan ACB=\frac{AB}{AC}$，

$\therefore AB=AC\cdot\tan ACB=9\times\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 5.2$(m).



(2)以点 A 为圆心，以 AB 为半径作圆弧，当太阳光线与圆弧相切时树影最长，点 D 为切点，$DE\perp AD$ 交 AC 于点 E（如图），在Rt△ADE中，$\angle ADE=90°$，$\angle AED=30°$，

$\therefore AE=2AD=2\times 5.2=10.4$(m).

回味总结 在解决第2问时，所谓树影的长度最大，由光学理论可以知道，当树的长度一定时，光线垂直于树干时，树影子是最长的.

拓展延伸 (1)某数学兴趣小组，利用树影测量树高. 已测出树 AB 的影长 AC 为9m，并测出此时太阳光线与地面成30°夹角. 因水土流失，此时树 AB 沿太阳光线方向倒下，在倾倒过程中，树影长度发生了变化，假设太阳光线与地面夹角保持不变，试求树影的变化情况.

(2)某数学兴趣小组,利用树影测量树高. 已测出树 AB 的影长 AC 为 3m,并测出此时太阳光线与地面成 60°夹角. 因水土流失,此时树 AB 沿太阳光线方向倒下,在倾倒过程中,树影长度发生了变化,假设太阳光线与地面夹角保持不变,试求树影的变化情况.

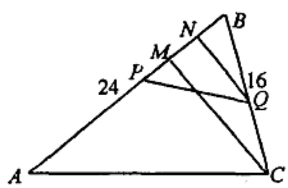
提示(1)只要再求出树影的最小值即可,因为太阳光线与地面成 30°夹角,所以树影长是大于等于树的实际高度,故树影的最小值是树的实际高度,即 $3\sqrt{3}$m≤树影长≤$6\sqrt{3}$m.

(2)先求出树影长的最大值,方法与例题 2 解法一样,求得树高为 $3\sqrt{3}$m,树影长的最大值为 6m,因为太阳光线与地面成 60°夹角,故树影的最小值为 3m,即 3m≤树影长≤6m.

【例 3】(2005 杭州中考)在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=60°$,$BA=24$cm,$BC=16$cm. 现有动点 P 从点 A 出发,沿射线 AB 向点 B 方向运动;动点 Q 从点 C 出发,沿射线 CB 也向点 B 方向运动. 如果点 P 的速度是 4cm/s,点 Q 的速度是 2cm/s,它们同时出发. 求:

(1)几秒钟后,ΔPBQ 的面积是 ΔABC 的面积的一半;

(2)在第(1)问的前提下,P,Q 两点之间的距离是多少.



思路点拨 第 1 问,过点 C 作 ΔABC 的高,求出 ΔABC 的面积,过点 Q 作 ΔPBQ 的高,求出 t 秒钟后 ΔPBQ 的面积,这时,根据题意,可以求得时间 t;第 2 问,通过直角三角形进行求解.

解题过程 (1)设 t 秒后,ΔPBQ 的面积是ΔABC 的面积的一半,则 $CQ=2t$,$AP=4t$.

分别过点 C,点 Q 作ΔABC 和ΔPBQ 的高 CM、QN,则

$CM=16\times\sin60°=8\sqrt{3}$,$QN=(16-2t)\times\sin60°=(8-t)\sqrt{3}$.

所以 ΔABC 的面积为 96,ΔPBQ 的面积为$\frac{1}{2}(24-4t)(8-t)\sqrt{3}$.

由题意,列出方程 $2\times\frac{1}{2}(24-4t)(8-t)\sqrt{3}=96\sqrt{3}$.

化简,得 $t^2-14t+24=0$.

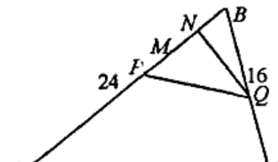
解得 $t_1=2$,$t_2=12$. 经检验,$t_1=2$,$t_2=12$ 均符合题意.

所以 2 秒或 12 秒钟后,ΔPBQ 的面积是ΔABC 的面积的一半.

(2)当 $t=2$ 时,$BQ=12$,$BP=16$,在 RtΔPBQ 中,$QN=BQ\times\sin60°=6\sqrt{3}$,$BN=6$;在 Rt$\Delta PQN$ 中,$NP=10$,所以 $PQ=4\sqrt{13}$;当 $t=12$ 时,$BQ=8$,$BP=24$,同理可求得 $PQ=8\sqrt{7}$.

回味总结 本题可以直接运用三角形的面积公式;另外,点 P 和点 Q 都在射线 AB 和 CB 上运动,所以 t 应该是两解,解题中不要漏解. 如果将本题改为"点 P 和点 Q 都在线段 AB 和 CB 上运动",则 $t=12$ 时,就不符合题意,要舍去.

拓展延伸 在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=60°$,$BA=24$cm,$BC=16$cm. 现有动点 P 从点 A 出发,沿线段 AB 向点 B 方向运动;动点 Q 从点 B 出发,沿线段 BC 也向点 C 方向运动. 如果点 P 的速度是 4cm/s,点 Q 的速度是 2cm/s,它们同时出发. 求出发几秒钟后,ΔPBQ 的面积最大.



解题过程 设 t 秒后,ΔPBQ 的面积为 y,则 $BQ=2t$,$AP=4t$,过点 Q 作 ΔPBQ 的高 QN,则 $QN=2t\times\sin60°=\sqrt{3}t$,所以 ΔPBQ 的面积为 $y=\frac{1}{2}(24-4t)\sqrt{3}t=-2\sqrt{3}t^2+12t=-2\sqrt{3}(t-\sqrt{3})^2+6\sqrt{3}$,出发后秒钟,$\Delta PBQ$ 的面积最大,面积最大为 $6\sqrt{3}$.

【例4】在足球的绿茵场上有两句顺口溜:"冲向球门跑,越近就越好;歪着球门跑,射点要选好". ①"冲向球门跑,越近就越好". 根据图1,因为$\angle MSN$大于$\angle MRN$,并且射程变小,所以球员在点S处射门(球门MN),要比在点R处射门进球的命中率要高;②"歪着球门跑,射点要选好,射点选何处,请你找一找",现已知如图2当一名进攻队员带球延直线CD向对方底线AB挺进时,(因对方防守无法向中路突破),他在何处射门较为有利?

我们把实际问题转化成数学问题叫做数学建模. 把这个实际问题转化成数学问题可以是:在CE上取一点P,使EP是EN和EM的比例中项.

(1)请你根据要求,在图2中作出点P(写出作法,保留作图痕迹,不要求证明);

(2)若只考虑射门角度的大小,忽略射程的远近,在点P处射门较为有利,为什么? 请根据(1)中的作图简要说明.

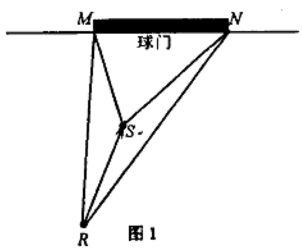


图1

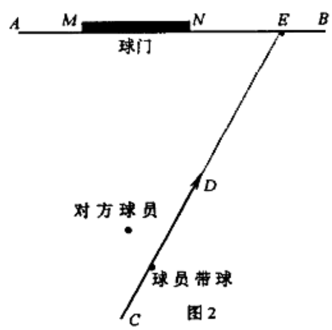


图2

思路点拨 第1问是作过点M,N圆与直线CD相切,切点P是最佳射点,这根据圆周角定理可以论证,射点与球门两端的视角越大,进球的可能性就越大,那么,如何作点M,N与直线CD相切的圆呢? 根据相交弦定理和切割线定理,在CE上取一点P,使EP是EN和EM的比例中项,然后证明过点M,N,P三点圆与直线CD相切于点P.

解题过程

(1)作法:

①在AB的延长线上取一点F,使$EF=EN$,

②以MF为直径作圆,

③过点E作$EG\perp AB$,交圆与点G,

④在EC上取$EP=EG$,

∴点P就是所求作的最佳射点.

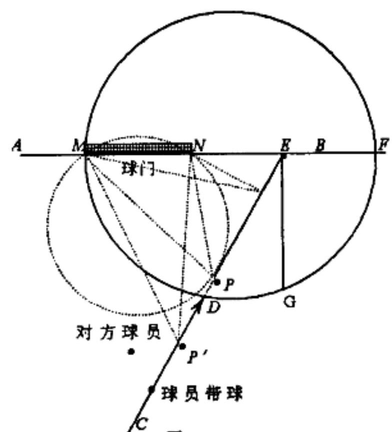


图3

(2)简要说明:

因为①可以证明$\triangle ENP\backsim\triangle EPM$,②从而证明过$M,N$且与$CE$相切的圆切于点$P$,③在$CE$上异与$P$的任意一点$P'$,可证明$\angle MPN$大于$\angle MP'N$.

回味总结 本题运用了圆中的几个重要的知识,它是课本习题的一个升华,怎样作两条线段的比例中项,怎样过两个定点作已知直线的切线,怎样利用一条弧所对的圆内角,圆周角,圆外角三者之间的关系,来解决实际问题等等. 虽然在足球进球的过程中,进球的因素很多,但射点与球门两端所成视角的大小是其中的一个重要因素.

拓展延伸 在例 4 其它条件不变的情况下，如果$\angle MEP=\alpha$，足球球门 $MN=a$m，$EN=b$m，求射点 P 到 MN 的距离．

解题过程 求出 $EP=\sqrt{b(a+b)}$，射点 P 到 MN 的距离为$\sqrt{b(a+b)}\sin\alpha$.

【例 5】(2005 丽水中考)某公园有一个边长为 4m 的正三角形花坛，三角形的顶点 A，B，C 上各有一棵古树．现决定把原来的花坛扩建成一个圆形或平行四边形花坛，要求三棵古树不能移动，且三棵古树位于圆周上或平行四边形的顶点上．

(1)按圆形设计，利用图 1 画出你所设计的圆形花坛示意图；

(2)按平行四边形设计，利用图 2 画出你所设计的平行四边形花坛示意图；

(3)若想新建的花坛面积较大，选择以上哪一种方案合适？请说明理由．

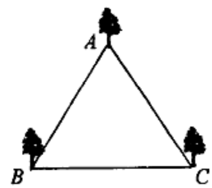


图 1

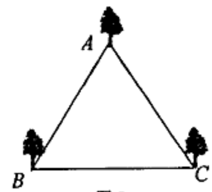


图 2

思路点拨 第(1)小题只要找出$\triangle ABC$ 的外心，然后作圆即可，由于$\triangle ABC$ 是等边三角形，所以$\triangle ABC$ 的外心，内心，重心合一，这样可以作$\triangle ABC$ 的内角平分线或高线或中垂线；第(3)小题先算出圆和平行四边形的面积，然后进行比较．

解题过程

(1)作$\triangle ABC$ 的$\angle A$，$\angle B$ 的平分线，它们相交于点 O；以 O 为圆心，OA 长为半径画圆 O，则点 A，B，C 在圆 O 上．

(2)过点 A 作 $AD\parallel BC$，过点 C 作 $CD\parallel BA$，AD，CD 相交于点 D，则 $ABCD$ 为平行四边形．

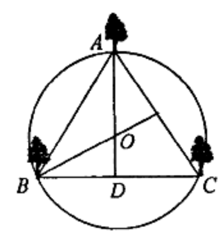


图 3

(3)在 Rt$\triangle BOD$ 中，$\because \cos30^\circ=\dfrac{BD}{OB}$，$\therefore r=CB=\dfrac{BD}{\cos30^\circ}=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\odot O}=\pi r^2=\dfrac{16\pi}{3}\approx16.75(\text{m}^2)$；

又 $S_{平行四边形}=2S_{\triangle ABC}=2\times\dfrac{1}{2}\times4^2\times\sin60^\circ$

$=8\sqrt{3}\approx13.86(\text{m}^2)$；

$\because S_{\odot O}>S_{平行四边形}$ $\therefore$选择建圆形花坛面积较大．

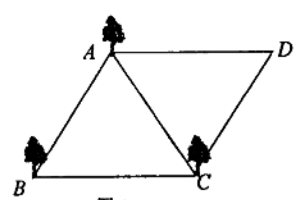


图 4

回味总结 本题中符合条件的圆只有一个，而符合条件的平行四边形共有三个；另外，关于面积的计算，主要是计算圆的面积，平行四边形的面积是等于三角形面积的两倍．

拓展延伸 如果某公园有一个边长分别为 3m，4m，5m 的直角三角形花坛，三角形的顶点 A，B，C 上各有一棵古树．现决定把原来的花坛扩建成一个圆形或平行四边形花坛，要求三棵古树不能移动，且三棵古树位于圆周上或平行四边形的顶点上．若想新建的花坛面积较大，选择以上哪一种方案合适？请说明理由．

解题过程 圆的半径 $r=\dfrac{5}{2}$，则圆的面积$=\pi r^2=\dfrac{25\pi}{4}\approx19.625(\text{m}^2)$；平行四边形的面积$=12(\text{m}^2)$；$\therefore$选择建圆形花坛面积较大．(说明：无论是直角三角形，锐角三角形还是钝角三

角形，在其他条件不变的情况下，选择建圆形花坛面积是较大的．）

【例6】(2005陕西中考)已知：直线 $a/\!/b$，P，Q 是直线 a 上的两点，M，N 是直线 b 上两点．

(1)如图1，线段 PM，QN 夹在平行直线 a 和 b 之间，四边形 $PMNQ$ 为等腰梯形，其两腰 $PM=QN$．请你参照图1，在图2中画出异于图1的一种图形，使夹在平行直线 a 和 b 之间的两条线段相等．

(2)我们继续探究，发现用两条平行直线 a，b 去截一些我们学过的图形，会有两条"曲线段相等"(曲线上两点和它们之间的部分叫做"曲线段"．把经过全等变换后能重合的两条曲线段叫做"曲线段相等")．

请你在图3中画出一种图形，使夹在平行直线 a 和 b 之间的两条曲线段相等．

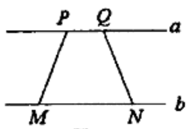


图1

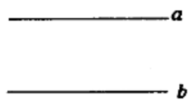


图2

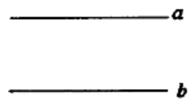


图3

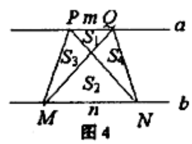
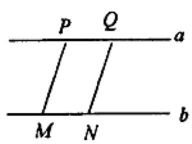


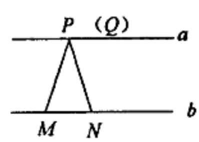
图4

(3)如图4，若梯形 $PMNQ$ 是一块绿化地，梯形的上底 $PQ=m$，下底 $MN=n$，且 $m<n$．现计划把价格不同的两种花草种植在 S_1，S_2，S_3，S_4 四块地里，使得价格相同的花草不相邻．为了节省费用，园艺师应选择哪两块地种植价格较便宜的花草？请说明理由．

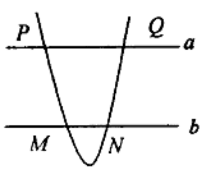
思路点拨 第2问中"曲线段相等"，想到的是圆和抛物线；第3问中，要求相邻两块种价格不同的花草，即需计算 S_1+S_2 与 S_3+S_4 的大小，大的面积种价格便宜的．

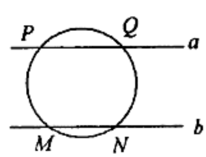
解题过程 (1)图例：





(2)图例：





(3)$\because \triangle PMN$ 和 $\triangle QMN$ 同底等高，

$\therefore S_{\triangle PMN}=S_{\triangle QMN}$．$\therefore S_3+S_2=S_4+S_2$．$\therefore S_3=S_4$．

$\because \triangle POQ\backsim\triangle NOM$，$\therefore \frac{S_1}{S_2}=(\frac{OQ}{OM})^2=\frac{m^2}{n^2}$．$\therefore S_2=\frac{n^2}{m^2}S_1$．

$\because \frac{S_1}{S_3}=\frac{OQ}{OM}=\frac{m}{n}$，$\therefore S_3=\frac{n}{m}S_1$．

$\therefore (S_1+S_2)-(S_3+S_4)=S_1+\frac{n^2}{m^2}S_1-2\cdot\frac{n}{m}S_1=S_1(1+\frac{n_2}{m^2}-2\cdot\frac{n}{m})=S_1(1-\frac{n}{m})^2$．

$\because m>n$，$\therefore (1-\frac{n}{m})^2>0$．$\therefore S_1+S_2>S_3+S_4$．

故园艺师应选择 S_1 和 S_2 两块地种植价格较便宜的花草，因为这两块的的面积之和大于另两块地的面积之和．

回味总结 这是一道探究型应用题，特别是第3问，理解了题意后，要运用相似三角形的知识，求出四块地的面积，再去比较大小．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com