



# 第十六届全国 水动力学研讨会文集

周连第 邵维文 詹杰民 李怡平 赵峰 主编



海军出版社

# 第十六届全国水动力学研讨会文集

Proceedings of the 16th National Conference on Hydrodynamics

周连第 邵维文 詹杰民 李怡平 赵峰 主编

《水动力学研究与进展》编委会  
中国力学学会  
中国造船工程学会  
中山大学  
澳门大学  
澳门科学技术协进会  
水动力学国家级重点实验室  
上海市力学学会  
主办

海洋出版社

2002年·北京

## 内 容 简 介

本书是《水动力学研究与进展》编委会、中国力学学会、中国造船工程学会、中山大学、澳门大学、澳门科学技术协进会、水动力学国家级重点实验室、上海市力学学会联合举办的第十六届全国水动力学研讨会文集,共选收论文 100 多篇,主要反映水动力学基础;计算流体力学;船舶与海洋工程水动力学;水电与河流动力学;海岸、环境与地球物理流体力学;工业流体力学;近代测试设备与技术等方面的新进展、新水平、新面貌,可供有关专业人员和教学人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

第十六届全国水动力学研讨会文集/周连第等主编. —北京:海洋出版社,2002.11

ISBN 7-5027-1757-9

I.第… II.周… III.水动力学—学术会议—文集 IV.TV131.2-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 076789 号

责任编辑:方 菁

海洋出版社 出版发行

<http://www.oceanpress.com.cn>

(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)

上海交通大学印刷厂印刷 新华书店发行所经销

2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月上海第 1 次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:56.75

字数:1400 千字 印数:1~300 册

定价:120.00 元

海洋版图书印、装错误可随时退换

# 目次

## 大会报告

- 流体力学广义变分原理临界变分状态的简便消除法 ..... 刘高联 陈池 封卫兵 (1)
- 钱塘江河口涌潮数值模拟方法研究 ..... 许为厚 潘存鸿 林炳尧等 (7)
- 超大型浮式结构的水弹性力学问题 ..... 刘应中 (17)
- Surface Fluctuation in a Hydraulic Jump ..... K. M. Mok S. C. Ng K. K. leong (27)
- Measurement of Mean Flow and Turbulence Structure of Open-channel Flow through  
Simulated Flexible Vegetations by Ultrasonic Velocity Profiler .....  
..... C. W. Li Y. P. Chen (34)
- 右转车流对主干道的“挤压”干扰效应 ..... 雷丽 董力耘 戴世强 (41)
- 两层流体中大直径桩柱的水动力特性 ..... 尤云祥 缪国平 包春辉 (49)
- 含入射波时任意三维浮体之全非线性流场模拟 ..... 李宗翰 林言弥 (56)
- 粒子流的直接数值模拟 ..... 邵雪明 林建忠 余钊圣 (70)
- 海上油气长线混输方法评述 ..... 郑之初 赖英旭 (78)

## 水动力学基础

- 分层流体中运动点源诱生的内波及其表面效应 ..... 魏岗 乐嘉春 苏晓冰等 (87)
- 分层流体中圆柱绕流的数值计算 ..... 张军 洪方文 张志荣等 (96)
- Jacobi 椭圆函数展开法在求解非线性浅水波动问题中的应用 ..... 施小民 (105)
- 圆截面水槽中的表面波 ..... 刘敏嘉 陶明德 (110)
- 非均匀来流绕流管束流动数值模拟 ..... 黄杰 王为民 张德义等 (116)
- 柱状粒子在湍流场中扩散的研究 ..... 高振宇 林建忠 (122)
- 宏观物质模型和物质元——流体和变形体的形式定义和基本特征 ..... 杨本洛 (131)
- 无规运动和流体力学的一般动力学方程——流动中流体的动量输运机制和湍流模式  
理论的物理基础 ..... 杨本洛 (146)
- Navier-Stokes 方程和广义层流——流体力学的第一类动力学方程及其应用条件 .....  
..... 杨本洛 (173)
- 涡与 Euler——流场的局部有序结构、流体力学第二类动力学方程与相关现象分析 .....  
..... 杨本洛 (189)
- 海洋生产平台系泊运动中的倍周期分岔与混沌响应研究 ..... 杜度 张纬康 (203)
- 泄洪雾化的雨和雾研究 ..... 陈惠玲 李定方 黄颖蕾 (209)
- 变形介质中的三参数非线性渗流 ..... 宋付权 刘慈群 李同桂 (221)
- Simulation of Incompressible Flow Past Three Circular Cylinders .....  
..... Zheng Hongwei Shen Yifan Xu Youheng et al. (228)

## 计算流体力学

|                                    |                    |
|------------------------------------|--------------------|
| VOF 方法中 $F$ 函数的混合计算方法              | 洪方文 赵峰 周连第 (231)   |
| 用 Lattice Boltzmann 方法模拟二维管道连接处的流场 | 王兴勇 索丽生 程永光 (241)  |
| VOF 方法计算密度异重流                      | 邹建锋 黄钰期 应新亚等 (250) |
| 基于 NURBS 的三维物体辐射问题数值计算             | 徐航 邹早建 (258)       |
| 求解高阶 Boussinesq 方程数值方法的研究          | 詹杰民 李毓湘 (265)      |
| 不可微预报系统的广义变分同化方法                   | 黄思训 韩威 (272)       |
| 雷诺方程组的封闭与应用及普朗特紊动切应力和紊动粘滞系数理论计算    | 张玉清 张蕴华 张景霞 (280)  |
| 用虚拟压缩方法模拟自然对流问题                    | 张树海 宋书恒 李树民等 (288) |
| 求解对流扩散方程的局部解析算法                    | 林建国 刘颖 (296)       |
| 叶端间隙对环量影响规律的数值模拟分析                 | 张志荣 赵峰 张军等 (304)   |
| 绕海底管线肩部的三维流动的数值模拟                  | 陈兵 程亮 (313)        |
| 油藏数值模拟的有限元模型                       | 刘振宇 翟云芳 方亮 (320)   |
| 西、北江三角洲洪潮水位变化数值计算                  | 黄东 郑国栋 黄本胜等 (328)  |
| 有限元法在黄河下游平面二维水沙数学模型中的应用            | 刘燕 余欣 韦直林等 (335)   |
| 突然扩散水跃共轭水深研究                       | 卢士强 邹志业 程胜依 (342)  |
| 浅水定常流的伪时间过程                        | 朱军政 曹颖 (350)       |
| 城市防洪排涝非恒定流数值模型研究                   | 倪培桐 江涛 黄健东等 (355)  |
| 潮流的分析和预报                           | 吴明阳 冯玉林 (362)      |

## 船舶与海洋工程水动力学

|                      |                    |
|----------------------|--------------------|
| 螺旋桨水动力效率与噪声的优化方法     | 魏以迈 (375)          |
| “大湖型”散货船船型研究         | 胡平 陈伟民 杨波 (384)    |
| 高速小型燕式首外旋浅蜗尾登陆线型研发   | 林钧 谭永祥 殷铁成 (391)   |
| 船舶微气泡减阻试验研究          | 蔡成法 詹德新 (396)      |
| 微气泡减阻理论分析与数值计算       | 曹春燕 詹德新 王家楣 (405)  |
| 根据船舶运动数据实时估测船体波浪载荷   | 许劲松 (411)          |
| 集装箱船波浪载荷的计算研究        | 詹志鹤 陈有芳 (419)      |
| 波浪中大幅横摇运动的安全池研究      | 伍晓榕 李远林 (426)      |
| 海底埋设管道受冲刷后局部允许悬空长度分析 | 李林普 陈海欧 刘锦昆等 (433) |
| 深海采矿系统运动和动力学分析计算     | 杨显成 孙伯起 益其乐 (438)  |

## 水电和河流动力学

- 国内大江大河水流挟沙力经验公式的研究及软件应用 ..... 吴文浩 李旻 孙爱军等 (447)
- 洛阳绕城高速公路洛河特大桥水文分析 ..... 夏传星 武彩萍 李远发等 (456)
- 明渠流量的研究现状和进展 ..... 徐俊林 陈红勋 马峥 (462)
- 水流冲刷深度的模拟及预测 ..... 张丽琼 赵棣华 沈学汶 (469)
- 东深供水太园反虹涵进出口水流试验研究 ..... 陈灿辉 李一平 (477)
- 河滩种树的水流归槽长度计算 ..... 石月珍 黄本胜 周著等 (482)
- 黄河潼关河段射流清淤的作用 ..... 姜乃迁 李文学 张翠萍等 (489)
- 三峡水利枢纽临时船闸改建冲沙闸水力学研究 ..... 丰清权 刘乃义 陈辉 (495)
- 临淮岗枢纽新建深孔闸水力计算 ..... 梁斌 汪霞 西汝泽等 (502)
- 钱塘江河口洪水特性 ..... 徐有成 黄世昌 周建敏 (508)
- 金堤河治理后干流行洪能力变化分析 ..... 尚红霞 申冠卿 李小平等 (515)
- 淮干正淮段行洪区废弃效果试验研究 ..... 杨兴菊 虞邦义 吴其保 (522)
- 淮河干流行洪区行洪效果研究 ..... 葛国兴 虞邦义 徐迎春等 (530)
- 台阶式溢洪道水力特性研究的新进展(1) ..... 田嘉宁 李建中 (536)
- 台阶式溢洪道水力特性研究的新进展(2) ..... 田嘉宁 角哲也 李建中 (546)
- 解放村水库新建溢洪道水力学试验研究 ..... 勾兆莉 武彩萍 宋莉莹等 (557)
- 黄河河口拦门沙对泄洪排沙的影响 ..... 郑春梅 王开荣 (564)
- 王窑水库泥沙问题分析 ..... 焦恩泽 林秀芝 荆新爱 (570)
- 黄河河口泥沙处理途径及其评价 ..... 王开荣 郑春梅 郑玉成等 (577)
- 珠江河口不同粒径泥沙分级模拟的方法研究 ..... 包芸 任杰 (583)
- 非均匀沙推移质的级配和输沙率计算 ..... 王涌涛 倪汉根 陈海涛 (589)
- 小浪底水库异重流输沙能力初步分析 ..... 林秀芝 荆新爱 吴秀英 (593)
- 小浪底水库运用初期黄河下游河道减淤效果研究 ..... 江恩惠 赵连军 黄晓霞等 (599)
- 小浪底枢纽泄流孔口淤堵后冲刷试验研究 ..... 侯志军 王德昌 和瑞勇 (605)
- 分水江水利枢纽工程消能型式的研究 ..... 陆芳春 包中进 徐刚 (610)
- 断面平均河底高程计算方法探讨 ..... 茹玉英 郑春梅 (616)
- 影响尾矿坝浸润线的因素分析 ..... 路美丽 崔莉 (620)
- 化学灌浆法背河堵漏技术 ..... 余咸宁 王卫红 田治宗 (626)
- 管涌、漏洞抢护新技术——软体袋围井 ..... 王卫红 刘恒 余咸宁等 (633)
- 渭河下游河道汛期输沙水量初步分析 ..... 张翠萍 (638)
- 小浪底水库运用初期高村以上河段过流能力变化的初步研究 ..... 孙赞盈 齐璞 苏运启等 (642)
- 试论长江河口的界定 ..... 金忠贤 顾锦祥 (649)

## 海岸、环境与地球物理流体力学

|                                                     |                    |
|-----------------------------------------------------|--------------------|
| 变分同化方法在热带气旋路径预测中的应用的研究:理论方面及数值试验.....               | 项杰 伍荣生 黄思训 (653)   |
| 黄海冷水团环流的线性理论 .....                                  | 张庆华 夏萌 曲媛媛 (659)   |
| 南海表层水温时间延迟模式研究初步 .....                              | 魏恩泊 田纪伟 宋金宝 (669)  |
| 斜向波与均匀开孔沉箱作用的理论研究 .....                             | 李玉成 滕斌 刘洪杰 (675)   |
| 斜向波作用于直立堤上的波浪力 .....                                | 俞聿修 胡金鹏 李本霞等 (683) |
| 斜向波作用下直堤波浪力的纵向分布 .....                              | 李本霞 俞聿修 胡金鹏等 (690) |
| 正向及斜向不规则波作用下的 20 万吨级以上船舶对码头的作用—兼论缆绳张力<br>及其布置 ..... | 蒋庆 王巨轮 张宁川 (698)   |
| 随机波浪场中潜式沉箱群的水动力特征 .....                             | 张宁川 黄国兴 蒋庆等 (705)  |
| 复杂水动力条件下大型开敞式码头轴线之确定 .....                          | 张宁川 黄国兴 蒋庆等 (714)  |
| 二阶非线性海浪波高分布 .....                                   | 宋金宝 魏恩泊 (721)      |
| 用波浪弥散关系确定波长的方法 .....                                | 王正林 李孟国 (729)      |
| 浅水长波运动的数值模拟计算 .....                                 | 曾一非 (735)          |
| 缓变长波对弱非线性短波列的抑制 .....                               | 安淑萍 乐嘉春 (741)      |
| 油污染物在波浪作用下的扩散传输规律 .....                             | 陈虹 林建华 (748)       |

## 工业流体力学

|                                        |                    |
|----------------------------------------|--------------------|
| 厢式货车井字型格栅法减阻节能的数值模拟 .....              | 杜广生 王德昌 周连第 (752)  |
| 偏心环空轴向流的级数解方法 .....                    | 杨自栋 顾国庆 (757)      |
| 深层高压气藏动态分析方法 .....                     | 杨知盛 尹洪军 刘淑云 (763)  |
| 双流体模型在油气混输管线计算中的应用 .....               | 张德义 王为民 黄杰等 (767)  |
| 胜坨油田特高含水期影响提高水驱采收率的因素及水动力学调整措施分析 ..... | 李兆敏 马德泉 吕翔慧 (773)  |
| 用模拟技术寻求合理的布井方案 .....                   | 赵碧华 曲海潮 郑春江等 (779) |
| 泡沫流体冲砂洗井计算机模型 .....                    | 王渊 李兆敏 王德新等 (789)  |
| 龙滩水电站水轮机水力性能研究 .....                   | 刘胜柱 罗兴琦 (796)      |
| 轴伸斜流式水轮机设计研制 .....                     | 张礼达 余波 陈维森等 (802)  |
| 抽水蓄能电站拦污栅条寿命的试验分析 .....                | 崔莉 王涌涛 马媛玲 (806)   |

## 近代测试设备与技术

|                                                  |                                       |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------|
| Experimental Facility for Gravity Currents ..... | K. M. Mok K. K. leong Harry Yeh (816) |
| 基于片激光照明的水中运动微气泡尺度和数量测量 ... 赵峰 洪方文 尤唯平等 (823)     |                                       |
| 湍流速度增量的概率密度函数 .....                              | 钱俭 (830)                              |
| 管路系统内紊流与非定常流的计算机仿真与预测研究 .....                    | 何永森 刘邵英 (836)                         |
| 旋转矩形截面螺旋管内对流传热特性的研究 .....                        | 章本照 陈华军 (843)                         |
| 强化管内单相流体流动阻力与传热特性及性能评价的研究 .....                  |                                       |
| ..... 杨冬 陈听宽 罗毓珊 (851)                           |                                       |
| 水溶采矿中浮羽流的实验和数值模拟 .....                           | 何丹 杨骏六 吴乘胜等 (860)                     |
| 碱水驱油集中型数学模型 .....                                | 刘慈群 杨玠 (865)                          |
| 水轮机导叶端面间隙流动的数值模拟和实验研究 .....                      | 廖伟丽 李建中 (871)                         |
| 图像处理技术及其在水电站泄洪雾化研究中的应用 .....                     | 魏国强 胡敏良 (877)                         |
| 水库异重流挟沙能力试验研究 .....                              | 李书霞 张俊华 石标钦等 (881)                    |
| 水轮机调节系统实时仿真实验台的建立 .....                          | 余波 张礼达 吉雷等 (885)                      |
| 镍基渗层螺旋翅片管的强化传热试验研究——阻力特性以及接触热阻 .....             |                                       |
| ..... 孙奉仲 黄新元 史月涛等 (890)                         |                                       |
| 水轮机尾水管部分负荷工况运行非定常涡旋流动数值分析 .....                  |                                       |
| ..... 诸葛伟林 刘光临 蒋劲等 (895)                         |                                       |

# 流体力学广义变分原理临界 变分状态的简便消除法

刘高联 陈 池 封卫兵

(上海大学力学所, 上海 200072)

**摘 要** 本文在深入分析了第一类、第二类临界变分状态产生根源的基础上, 提出了用观察法预测临界变分发生的简单法则, 并就其消除方法作了进一步探讨和建议: (1) 提出了待定函数法; (2) 对预处理法的改进。这些方法具有通用性和简便性, 并不限于力学领域。因此, 有了这些方法后, 第一、第二类临界变分问题就不再给我们构成任何困难了。

**关键词** 变分原理, 临界变分状态, 流体力学, 有限元法

## 1 前言

拉氏(Lagrange)乘子法是将变分原理推广到广义变分原理的一个很有效的方法<sup>[1,6]</sup>。但有时会遇到某些乘子恒等于零的情况, 从而就不能导出广义变分原理, 这种现象就称为第一类临界变分状态, 与之密切相关的还有第二类临界变分状态<sup>[3~5]</sup>。虽然这种情况很少发生, 但仍应当引起我们的充分重视, 并设法予以消除。文献[1]首先发现了弹性力学中的临界变分现象, 随后, 文献[2,3]在流体力学中也发现了这种现象。为了消除这种临界状态, 已经提出了各种方法, 例如高阶拉氏乘子法<sup>[1]</sup>、线性组合法<sup>[2~4]</sup>、罚函数法<sup>[3]</sup>和预处理拉氏乘子法<sup>[5,6]</sup>等。必须着重指出, 文献[6]提出的第二条路线的拉氏乘子反推法可以从微分方程(组)直接导出变分泛函而决不会发生第一和第二类临界变分状态。正是在其启发下, 本文将在深入分析其产生根源的基础上, 除创议一个简便的消除临界变分状态的待定函数法(以改正文献[7]的错误)外, 还对预处理法作了重大改进。

## 2 带自由面的重力流体基本运动方程及变分原理

在映象平面  $\xi, \Psi$  上( $\xi = x$ ,  $\Psi$  为流函数), 二维不可压缩理想重力流体有旋流动的基本方程为<sup>[3,4]</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{u} \right) - \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \frac{v}{u} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \Pi, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} = -v \quad (2)$$

$$\Pi + \frac{w^2}{2} = B(\Psi) \quad (3)$$

其中  $u, v$  分别是流速  $\vec{w}$  在  $x, y$  向的分量;  $B(\Psi)$  为伯努利常数;  $\Pi = \frac{p}{\rho} + gy$ ;  $\Omega$  为升力函数<sup>[4]</sup>。

应用文献[6]的系统性推导方法, 文献[4]已建立了本问题的下列亚广义变分原理:

$$J_1(\Omega, u, v) = \iint_{(A)} \frac{1}{u} \left[ v \frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} - \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{w^2}{2} + B \right] d\xi d\Psi - L_n \quad (4)$$

其中  $L_n$  是边界积分项<sup>[4]</sup>。

不难证明: 由  $\delta J_1 = 0$  得(1)、(2)<sub>2</sub>式及

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = B - \frac{w^2}{2} \quad (5)$$

为了把(5)式分别变换成(2)<sub>1</sub>式, 必须再用到非变分约束(3)式。注意: 后者并不参与变分运算。

为了建立完整的广义变分原理, 利用乘子  $\lambda$  将(3)式结合到泛函  $J_1$  中以构成扩充的泛函  $J_1'$  如下<sup>[1, 6]</sup>:

$$J_1'(\Omega, u, v, \Pi, \lambda) = J_1 + \iint_{(A)} \lambda (w^2 + 2\Pi - 2B) d\xi d\Psi \quad (6)$$

由它的欧拉方程之一可识别  $\lambda: \lambda = 0$ 。于是我们遇到了第一类临界变分状态, 建立广义变分原理的努力失败。

### 3 临界变分状态发生的根源及其简便消除法

只要细致深入考察上述泛函表达式(6)的结构及其欧拉方程就不难发现, 拉氏乘子  $\lambda$  恒等于零的根本原因在于: 约束式(3)中的未知函数  $\Pi$  并未出现在泛函  $J_1$  中。这就是说, 如果须用乘子消去的约束式中含有(且以代数形式)某些在原泛函中并不出现的未知函数, 则必然导致该约束式对应的乘子为零, 即导致临界变分状态的发生。推而广之, 对于同时引用多个拉氏乘子来消除多个约束式的普遍情况, 如果存在某个未知函数, 它只以代数形式出现在某一个约束式中, 而不出现在原泛函和其它约束式中, 则与该约束式对应的乘子必为零, 即必导致第一类临界变分状态。根据这个简单的规则, 我们就很容易用观察法对临界变分的发生进行预测, 而不必具体求出扩充泛函的欧拉方程。

## 4 消除临界状态的待定函数法

临界变分发生的根源既明,则可以对症下药,予以消除。方法便是对泛函进行适当改造,例如文献[7]。但遗憾的是文献[7]的推导及结果有错误。为了改正它,现建议下列待定函数法。现以(6)式为例,加以具体论述。

为此,我们在  $J_1$  中增补一项  $I_1$  :

$$I_1 = \iint_{(A)} F(\Omega, u, v, \Pi) d\xi d\Psi \quad (7)$$

为了决定待定函数  $F$ , 由  $\delta \bar{J}_1 = \delta J_1' + \delta J_1'' = 0$  得可识别  $\lambda$  和  $F$  的欧拉方程组如下:

$$\delta v: \frac{1}{u}(\Omega_v + v) + 2u\lambda + \frac{\delta F}{\delta v} = 0 \quad (8A)$$

$$\delta u: 1 - \frac{1}{u^2} \left( u\Omega_v - \Omega_\xi + \frac{u^2}{2} + B \right) + \frac{\delta F}{\delta u} + 2u\lambda = 0 \quad (8B)$$

$$\delta \Omega: \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{u} \right) - \frac{\partial}{\partial \Psi} \left( \frac{v}{u} \right) + \frac{\delta F}{\delta \Omega} = 0 \quad (8C)$$

$$\delta \Pi: 2\lambda + \frac{\delta F}{\delta \Pi} = 0 \quad (8D)$$

$$\delta \lambda: \Pi + \frac{u^2}{2} - B = 0 \quad (8E)$$

由(8A)与(2)<sub>2</sub>式对比知应取:

$$\lambda = \frac{\partial F}{\partial v^2} \quad (9A)$$

将(8B)式同(8E)式对比,知应取

$$\lambda = -\frac{\partial F}{\partial u^2} \quad (9B)$$

将(8C)式同(1)式对比,知应取

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = 0, \text{ 即 } F = F(u, v, \Pi) \quad (9C)$$

由(8D)、(9A)与(9B)式可求得  $F$  的可积性条件为:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial v^2} \quad (10A)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial \Pi} \quad (10B)$$

设  $\lambda(u, v, \Pi)$  可作和式的分离变量:

$$\lambda = \lambda_a(u^2) + \lambda_b(v^2) + \lambda_c(\Pi) \quad (11)$$

则代如(10A)式,得:

$$\frac{d\lambda_a}{du^2} = \frac{d\lambda_b}{dv^2}$$

由它可看出,两端必须都与  $u, v$  无关,设其等于一常数  $k$ ,于是立即可求得:

$$\lambda_a = ku^2 \quad \text{及} \quad \lambda_b = kv^2$$

同理由(10B)式可得:  $\lambda_c = k\Pi$ 。故有:

$$\lambda = k(u^2 + v^2 + \Pi) \quad (12)$$

然后待定函数  $F$  可决定如下。

将(12)式代入(9B)式,积分之,得:

$$F = -k\left(\frac{u^4}{2} + u^2 v^2 \Pi u^2\right) + F_1(v^2, \Pi) \quad (13)$$

代入(9A)式,积分得:

$$F_1 = -k\left(\frac{v^2}{2} + \Pi\right)v^2 + F_2(\Pi) \quad (14)$$

代入(8D)式积分,得

$$F_2 = -k\frac{\Pi^2}{2} \quad (15)$$

于是,求得:

$$F = -k \{ (u^4 + v^4 + \Pi^2)/2 + u^2 v^2 + \Pi w^2 \} \quad (16)$$

将(12), (16)式代入泛函  $J_I$  中,得到所需的广义变分原理:  $\delta J_I = 0$ ,

$$J_I(\Omega, u, v, \Pi) = \iint_{(A)} \left\{ \frac{1}{u} (u\Omega_\Psi - \Omega_\xi + \frac{w^2}{2} + B) + k(w^2 + \Pi)(w^2 + 2\Pi - 2B) - \right. \\ \left. k \left[ \frac{u^4 + v^4 + \Pi^2}{2} + u^2 v^2 + \Pi w^2 \right] \right\} d\xi d\Psi - L_a \quad (17)$$

由此可见。我们只要在进行解约变换<sup>[6]</sup>时,在泛函中增补一个待定函数项,就总可以消除第一类和第二类临界变分<sup>[5]</sup>。

## 5 预处理拉氏乘子法的改进

让我们用文献[5]的方法对(6)式进行预处理,首先从(3)式中解出  $w^2/2 = B - \Pi$ ,代入(6)式消去  $J_I$  中的  $w^2/2$  项,得到:

$$J_I = \iint_{(A)} \left\{ \frac{1}{u} [u\Omega_\Psi - \Omega_\xi - \Pi + 2B] I_0 + \lambda (w^2 + 2\Pi - 2B) \right\} d\xi d\Psi \quad (18)$$

$I_0$ 
 $I_1$

由其欧拉方程之一得:

$$\delta \Pi : \lambda = \frac{1}{2u}$$

可知已消除了第一类临界状态,但代回(18)式后,  $J_I$  中的  $\lambda$  又消失了,这便是文献[5,6]首先发现的第二类临界状态。也就是说,在这种特殊情况下,预处理乘子法失效。

让我们来分析其产生的原因。注意到在(18)式中,(在泛函原始项  $I_0$  中和在乘子项  $I_1$  中是以同一函数形式(线性)出现的,这时  $\Pi$  的系数同泛函变分后的  $\delta \Pi$  项的系数是一样的,所以泛函中含  $\Pi$  的项必定会消失,从而导致第二类临界的产生。因此,为了消除此类临界,只须在进行预处理时,应设法避免在  $I_0$  和  $I_1$  中以同一形式出现。为此,可设法改变  $I_0$  或  $I_1$  的形式。例如,我们可从(3)式中解出:

$$\frac{w^2}{2} = \frac{w}{2} \sqrt{2(B - \Pi)} \quad (19A)$$

代入  $J_1$  中消去  $w^2/2$  即可。或者在(18)式中,仍保持  $I_0$  不变,但将  $I_1$  改为:

$$I_\lambda = \lambda(w^2 + 2\Pi - 2B)^n, \quad (n > 1) \quad (19B)$$

或

$$I_\lambda = \lambda \cdot \text{sh}(w^2 + 2\Pi - 2B) \quad (19C)$$

等等。

还不难看到,设某未知函数(设为  $u$ )只以代数形式出现在一个约束式中,且它在原泛函表达式(相当于(18)式中的  $I_0$ )和在约束项(相当于  $I_1$ )以同一函数形式(例如  $f(u)$ )出现,则虽然识别的  $\lambda$  不为零,但将识别后的  $\lambda$  代回泛函中后,  $u$  将完全消失,即出现第二类临界变分状态。克服之法仍如上所述(如(19A,B,C)式),目的是应设法使  $u$  在  $I_0$  和  $I_1$  中以不同函数形式出现。

## 6 结束语

本文提出了消除临界变分状态的两个新方法,它们可以直接地推广到具有多个拉氏乘子(即多个约束)的情况中去。这样,就使文献[6]的推导变分原理族的系统性途径更加完整和通用化了。显然,本法具有普适性,并不限于流体力学问题。

## 参 考 文 献

- 1 钱伟长. 广义变分原理. 北京:知识出版社,1985.
- 2 刘高联,林俊棠. 弹性力学广义变分原理的一些普遍形式. 上海力学学会,1983年年会论文.
- 3 刘高联. 论水坝溢流等问题广义变分原理的更普遍形式. 中国力学学会第一届水动力学学术论文,1984.
- 4 Liu G. L. New VP (variational principles) families for direct, inverse and hybrid problems of free surface gravity flow over a spillway, Turbulence Measurements and Flow Modeling, eds, C. J. Chen et al., Hemisphere, New York, 1987, 323~332.
- 5 Liu G. L. On variational crisis and generalized VP for inverse and hybrid problems of free surface flow. Proc. 6th Asian Congress of Fluid Mech. May 22~26, 1995, Singapore, 745~748.
- 6 Liu G. L. Derivation and transformation of VP with emphasis on inverse & hybrid problems in fluid mechanics: A systematic approach. Acta Mech. 2000, 140, 73~89.
- 7 刘高联. 流体力学广义变分原理临界变分状态的简便消除法. 第5届全国水动力学学术会议及第15届全国水动力学研讨会文集,海洋出版社,2001,1~4

# 钱塘江河口涌潮数值模拟方法研究

许为厚

(香港科技大学数学系, 香港九龙)

潘存鸿 林炳尧 毛献忠

(浙江省水利河口研究院, 杭州 310020)

**摘 要** 本文采用基于 Godunov 格式的水位方程法求解包括河床坡降项的浅水流动方程, 利用 2000 年 9 月在钱塘江澉浦至富春江电站的涌潮观测资料<sup>[7]</sup>进行了算法检验, 分析数值模拟结果以后, 对钱塘江涌潮宏观规律的认识有所增加。

**关键词** 钱塘江, 涌潮, 数值模拟

## 1 前言

在特殊地形影响下, 钱塘江河口形成了闻名于世的涌潮。钱塘江下游杭州湾是个喇叭形河口湾, 湾口宽达 100km, 至上游 89km 的湾顶澉浦, 收缩到 22km, 河宽急剧收缩, 潮差增大, 澉浦比湾口大 75% 以上, 最大达 8.93m。另一方面, 河床从澉浦开始溯源抬升, 在纵剖面上存在一宏大的钱塘江沙坎。水深减小, 潮差渐大, 浅水效应增强, 潮波剧烈变形, 最终形成涌潮。

钱塘江一类河口水体流动可以用浅水流动方程描述, 因为存在涌潮, 因此, 除需要满足各物理量守恒等一般条件外, 数值模拟的一个关键是强间断的模拟。

如果不考虑河床起伏和摩阻, 浅水流动方程类似于气动力学中的欧拉方程。Marshall 和 Mendez<sup>[1]</sup>直接应用 Godunov 格式求解浅水流动方程对应的齐次方程。近十年来, 这种格式已成为求解浅水大梯度流动的重要方法。

事实上, 河床必有起伏。忽略这种起伏, 即便给定静水的初、边值条件, 因各处水深不同, Riemann 解所给出的是流速不为零的非静水解。底坡顶的处理因此成了浅水流动模拟的一个难点。为此, Zhou 等<sup>[4]</sup>提出“水面梯度法 (Surface gradient Method)”, 许为厚、潘存鸿提出了“水位方程法 (Water Level Formulation)”。

本文采用基于 Godunov 格式的水位方程法求解包括河床坡降项的浅水流动方程, 利用 2000 年 9 月在钱塘江澉浦至富春江电站的涌潮观测资料<sup>[7]</sup>进行了算法检验, 分析数值模拟结果以后, 对钱塘江涌潮宏观规律的认识有所增加。

## 2 计算方法

### 2.1 控制方程及其网格变换

$$\begin{cases} dt = d\lambda \\ dx = Ad\xi + Ld\eta \\ dy = Bd\xi + Md\eta \end{cases} \quad (1)$$

以后,在 \$(\lambda, \xi, \eta)\$ 空间的矩形单元中,包括河床坡降及摩阻项的非定常二维浅水流动方程为

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \quad (2)$$

式中

$$E = \begin{bmatrix} h\Delta \\ h\Delta u \\ h\Delta v \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} hI \\ hIu + \frac{1}{2}gh^2M \\ hIv - \frac{1}{2}gh^2L \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} hJ \\ hJu - \frac{1}{2}gh^2B \\ hJv + \frac{1}{2}gh^2A \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(Mb_\xi - Bb_\eta + \Delta S_{fx}) \\ -gh(-Lb_\xi + Ab_\eta + \Delta S_{fy}) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = AM - BL$$

$$I = uM - vL$$

$$J = uA - vB$$

式中, \$u, v\$ 分别为 \$x, y\$ 方向的流速分量; \$h\$ 为水深; \$g\$ 为重力加速度; \$b\$ 为河床高程; \$S\_{fx}, S\_{fy}\$ 分别为 \$x, y\$ 方向的阻力。

### 2.2 控制方程离散及其算子分裂

在平面 \$(\xi, \eta)\$ 上,应用有限体积法,方程(2)即离散为

$$E_{i,j}^{n+1} = E_{i,j}^n - \frac{\Delta \lambda}{\Delta \xi} [F_{i+1/2,j}^{n+1/2} - F_{i-1/2,j}^{n+1/2}] - \frac{\Delta \lambda}{\Delta \eta} [G_{i,j+1/2}^{n+1/2} - G_{i,j-1/2}^{n+1/2}] + \Delta \lambda S_{i,j} \quad (3)$$

式中,下标  $i$  和  $j$  分别表示  $\xi$  和  $\eta$  方向的单元序号;上标  $n$  为时间步长数; $\Delta\xi$  和  $\Delta\eta$  分别表示  $\xi$  和  $\eta$  方向的空间步长,即  $\Delta\xi = \xi_{i+\frac{1}{2}} - \xi_{i-\frac{1}{2}}$ ,  $\Delta\eta = \eta_{j+\frac{1}{2}} - \eta_{j-\frac{1}{2}}$ ;  $\Delta\lambda$  为时间步长; $F$  为穿越  $\xi$  方向的单元边界  $\xi_{i-\frac{1}{2}}$  及  $\xi_{i+\frac{1}{2}}$  的数值通量; $G$  为穿越  $\eta$  方向单元边界  $\eta_{j-\frac{1}{2}}$  及  $\eta_{j+\frac{1}{2}}$  的数值通量。

应用 Strang 分裂法,将问题分维求解。对空间分裂成  $\xi$  和  $\eta$  方向,则有

$$E^{n+1} = R_{\frac{\Delta\eta}{2}}^{\xi} R_{\Delta\lambda}^{\eta} R_{\frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi} E^n \quad (4)$$

式中  $R_{\Delta\lambda}^{\eta}$  和  $R_{\Delta\xi}^{\xi}$  分别表示  $\lambda - \xi$  平面和  $\lambda - \eta$  平面一维方程的求解算子。如果  $R_{\Delta\lambda}^{\eta}$  和  $R_{\Delta\xi}^{\xi}$  在空间上为二阶精度,则一维方程在空间上也为二阶精度。

### 2.3 Riemann 解

$\lambda - \eta$ 、 $\lambda - \xi$  两平面的 Riemann 问题类似。 $\lambda - \xi$  平面中,将  $x, y$  方向的流速分量  $u, v$  转换成  $\xi, \eta$  方向的流速分量  $\omega, \tau$ ,并略去非齐次项, $\xi$  方向一维方程的 Riemann 问题可简化为

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0 & \lambda > 0 \\ E = (0, \xi) \begin{cases} E_l, & \xi < 0 \\ E_r, & \xi > 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

式中,

$$E = \begin{bmatrix} h\Delta \\ h\Delta\omega \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} h\omega \\ h\omega^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

$E_l$  和  $E_r$  为常数。

方程(5)有四种可能的解,即常数解、稀疏波、激波,及滑移线。

### 2.4 水位方程法

因为河床高程是  $\chi$  的函数,用水深、流速作为变量,将使 Riemann 问题难以求解。为此,采用水位方程法(WLF),河床高程近似采用相邻单元的平均值问题

$$\bar{b}_{i,j+1} = \frac{1}{2}(b_i + b_{i+1}) \quad (6)$$

代替以后,问题归结成方程(5),仍可用经典方法求解 Riemann 解。

### 2.5 底坡源项的离散

为保证计算结果的和谐性,对底坡源项还需选取合适的离散方法,使得在计算过程中方程