第十六届全国
水动力学研讨会文集

周连第　邵维文　詹杰民　李怡平　赵峰　主编

海洋出版社

第十六届全国水动力学研讨会文集

Proceedings of the 16th National Conference on Hydrodynamics

周连第　邵维文　詹杰民　李怡平　赵峰　主编

《水动力学研究与进展》编委会
中　国　力　学　学　会
中　国　造　船　工　程　学　会
中　山　大　学
澳　门　大　学
澳　门　科　学　技　术　协　进　会
水动力学国家级重点实验室
上　海　市　力　学　学　会
主　办

海洋出版社

2002 年 · 北京

内容简介

本书是《水动力学研究与进展》编委会、中国力学学会、中国造船工程学会、中山大学、澳门大学、澳门科学技术协进会、水动力学国家级重点实验室、上海市力学学会联合举办的第十六届全国水动力学研讨会文集，共选收论文100多篇，主要反映水动力学基础；计算流体力学；船舶与海洋工程水动力学；水电与河流动力学；海岸、环境与地球物理流体力学；工业流体力学；近代测试设备与技术等方面的新进展、新水平、新面貌，可供有关专业人员和教学人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

第十六届全国水动力学研讨会文集/周连第等主编. －北京：海洋出版社，2002.11
ISBN 7－5027－1757－9

Ⅰ.第… Ⅱ.周… Ⅲ.水动力学－学术会议－文集 Ⅳ.TV131.2－53

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第076789号

责任编辑：方 菁

海洋出版社 出版发行

http://www.oceanpress.com.cn

(100081 北京市海淀区大慧寺路8号)

上海交通大学印刷厂印刷 新华书店发行所经销

2002年11月第1版 2002年11月上海第1次印刷

开本：787×1092 1/16 印张：56.75

字数：1400千字 印数：1～300册

定价：120.00元

目　　次

大会报告

水动力学基础

计算流体力学

船舶与海洋工程水动力学

水电和河流动力学

海岸、环境与地球物理流体力学

工业流体力学

近代测试设备与技术

流体力学广义变分原理临界变分状态的简便消除法

刘高联　　陈　池　　封卫兵

(上海大学力学所，上海 200072)

摘　要　本文在深入分析了第一类、第二类临界变分状态产生根源的基础上，提出了用观察法预测临界变分发生的简单法则，并就其消除方法作了进一步探讨和建议：(1)提出了待定函数法；(2)对预处理法的改进。这些方法具有通用性和简便性，并不限于力学领域。因此，有了这些方法后，第一、第二类临界变分问题就不再给我们构成任何困难了。

关键词　变分原理，临界变分状态，流体力学，有限元法

1　前言

拉氏(Lagrange)乘子法是将变分原理推广到广义变分原理的一个很有效的方法[1,6]。但有时会遇到某些乘子恒等于零的情况，从而就不能导出广义变分原理，这种现象就称为第一类临界变分状态，与之密切相关的还有第二类临界变分状态[3~5]。虽然这种情况很少发生，但仍应当引起我们的充分重视，并设法予以消除。文献[1]首先发现了弹性力学中的临界变分现象，随后，文献[2,3]在流体力学中也发现了这种现象。为了消除这种临界状态，已经提出了各种方法，例如高阶拉氏乘子法[1]、线性组合法[2~4]、罚函数法[3]和预处理拉氏乘子法[5,6]等。必须着重指出，文献[6]提出的第二条路线的拉氏乘子反推法可以从微分方程(组)直接导出变分泛函而决不会发生第一和第二类临界变分状态。正是在其启发下，本文将在深人分析其产生根源的基础上，除创议一个简便的消除临界变分状态的待定函数法(以改正文献[7]的错误)外，还对预处理法作了重大改进。

2　带自由面的重力流体基本运动方程及变分原理

在映象平面 ξ,Ψ 上($\xi=x$，Ψ 为流函数)，二维不可压缩理想重力流体有旋流动的基本方程为[3,4]：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\frac{v}{u}\right)=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \Pi,\ \frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} = -v \tag{2}$$

$$\Pi + \frac{w^2}{2} = B(\Psi) \tag{3}$$

其中 u,v 分别是流速 $\vec{w}$ 在 x,y 向的分量；$B(\Psi)$ 为伯努利常数；$\Pi = \frac{p}{\rho} + gy$；$\Omega$ 为升力函数[4]。

应用文献[6]的系统性推导方法，文献[4]已建立了本问题的下列亚广义变分原理：

$$J_1(\Omega,u,v) = \iint\limits_{(A)} \frac{1}{u}\left[v\frac{\partial \Omega}{\partial \Psi} - \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{w^2}{2} + B\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\Psi - L_\Omega \tag{4}$$

其中 L_Ω 是边界积分项[4]。

不难证明：由 $\delta J_1 = 0$ 得(1)、$(2)_2$式及

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = B - \frac{w^2}{2} \tag{5}$$

为了把(5)式分别变换成$(2)_1$式，必须再用到非变分约束(3)式。注意：后者并不参与变分运算。

为了建立完整的广义变分原理，利用乘子 λ 将(3) 式结合到泛函 J_1 中以构成扩充的泛函 J_1' 如下[1,6]：

$$J_1'(\Omega,u,v,\Pi,\lambda) = J_1 + \iint\limits_{(A)} \lambda(w^2 + 2\Pi - 2B)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\Psi \tag{6}$$

由它的欧拉方程之一可识别 λ：$\lambda = 0$。于是我们遇到了第一类临界变分状态，建立广义变分原理的努力失败。

3　临界变分状态发生的根源及其简便消除法

只要细致深入考察上述泛函表达式(6) 的结构及其欧拉方程就不难发现，拉氏乘子 λ 恒等于零的根本原因在于：约束式(3) 中的未知函数 Π 并未出现在泛函 J_1 中。这就是说，如果须用乘子消去的约束式中含有(且以代数形式)某些在原泛函中并不出现的未知函数，则必然导致该约束式对应的乘子为零，即导致临界变分状态的发生。推而广之，对于同时引用多个拉氏乘子来消除多个约束式的普遍情况，如果存在某个未知函数，它只以代数形式出现在某一个约束式中，而不出现在原泛函和其它约束式中，则与该约束式对应的乘子必为零，即必导致第一类临界变分状态。根据这个简单的规则，我们就很容易用观察法对临界变分的发生进行预测，而不必具体求出扩充泛函的欧拉方程。

4 消除临界状态的待定函数法

临界变分发生的根源既明,则可以对症下药,予以消除。方法便是对泛函进行适当改造,例如文献[7]。但遗憾的是文献[7]的推导及结果有错误。为了改正它,现建议下列待定函数法。现以(6)式为例,加以具体论述。

为此,我们在 J_1' 中增补一项 I_1:

$$I_1=\iint\limits_{(A)}F(\Omega,u,v,\Pi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\Psi \tag{7}$$

为了决定待定函数 F,由 $\delta\bar{J}_1=\delta J_1'+\delta J_1'=0$ 得可识别 λ 和 F 的欧拉方程组如下:

$$\delta v:\frac{1}{u}(\Omega_\Psi+v)+2v\lambda+\frac{\delta F}{\delta v}=0 \tag{8A}$$

$$\delta u:1-\frac{1}{u^2}\left(v\Omega_\Psi-\Omega_\xi+\frac{w^2}{2}+B\right)+\frac{\delta F}{\delta u}+2u\lambda=0 \tag{8B}$$

$$\delta\Omega:\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{u}\right)-\frac{\partial}{\partial\Psi}\left(\frac{v}{u}\right)+\frac{\delta F}{\delta\Omega}=0 \tag{8C}$$

$$\delta\Pi:2\lambda+\frac{\delta F}{\delta\Pi}=0 \tag{8D}$$

$$\delta\lambda:\Pi+\frac{w^2}{2}-B=0 \tag{8E}$$

由(8A)与$(2)_2$式对比知应取:

$$\lambda=\frac{\partial F}{\partial v^2} \tag{9A}$$

将(8B)式同(8E)式对比,知应取

$$\lambda=-\frac{\partial F}{\partial u^2} \tag{9B}$$

将(8C)式同(1)式对比,知应取

$$\frac{\partial F}{\partial\Omega}=0,\ 即\ F=F(u,v,\Pi) \tag{9C}$$

由(8D)、(9A)与(9B)式可导得 F 的可积性条件为：

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u^2}=\frac{\partial\lambda}{\partial v^2} \tag{10A}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u^2}=\frac{\partial\lambda}{\partial \Pi} \tag{10B}$$

设 $\lambda(u,v,\Pi)$ 可作和式的分离变量：

$$\lambda=\lambda_a(u^2)+\lambda_b(v^2)+\lambda_c(\Pi) \tag{11}$$

则代如(10A)式，得：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_a}{\mathrm{d}u^2}=\frac{\mathrm{d}\lambda_b}{\mathrm{d}v^2}$$

由它可看出，两端必须都与 u,v 无关，设其等于一常数 k，于是立即可求得：

$$\lambda_a=ku^2 \quad 及 \quad \lambda_b=kv^2$$

同理由(10B)式可得：$\lambda_c=k\Pi$。故有：

$$\lambda=k(u^2+v^2+\Pi) \tag{12}$$

然后待定函数 F 可决定如下。

将(12)式代入(9B)式，积分之，得：

$$F=-k\left(\frac{u^4}{2}+u^2v^2\Pi u^2\right)+F_1(v^2,\Pi) \tag{13}$$

代入(9A)式，积分得：

$$F_1=-k\left(\frac{v^2}{2}+\Pi\right)v^2+F_1(\Pi) \tag{14}$$

代入(8D)式积分，得

$$F_2=-k\frac{\Pi^2}{2} \tag{15}$$

于是,求得:

$$F = -k\{(u^4 + v^4 + \Pi^2)/2 + u^2v^2 + \Pi w^2\} \tag{16}$$

将(12),(16)式代入泛函 $\bar{J}_I$ 中,得到所需的广义变分原理:$\delta\bar{J}_I = 0$,

$$\bar{J}_I(\Omega, u, v, \Pi) = \iint_{(A)} \{\frac{1}{u}(v\Omega_\Psi - \Omega_\xi + \frac{w^2}{2} + B) + k(w^2 + \Pi)(w^2 + 2\Pi - 2B) -$$

$$k[\frac{u^4 + v^4 + \Pi^2}{2} + u^2v^2 + \Pi w^2]\} d\xi d\Psi - L_a \tag{17}$$

由此可见。我们只要在进行解约变换[6]时,在泛函中增补一个待定函数项,就总可以消除第一类和第二类临界变分[5]。

5 预处理拉氏乘子法的改进

让我们用文献[5]的方法对(6)式进行预处理,首先从(3)式中解出 $w^2/2 = B - \Pi$,代入(6)式消去 J_I 中的 $w^2/2$ 项,得到:

$$J'_I = \iint_{(A)} \{\underbrace{\frac{1}{u}[v\Omega_\Psi - \Omega_\xi - \Pi + 2B]}_{I_0} I_0 + \underbrace{\lambda(w^2 + 2\Pi - 2B)}_{I_\lambda}\} d\xi d\Psi \tag{18}$$

由其欧拉方程之一得:

$$\delta\Pi: \lambda = \frac{1}{2u}$$

可知已消除了第一类临界状态,但代回(18)式后,J'_I 中的(Π)又消失了,这便是文献[5,6]首先发现的第二类临界状态。也就是说,在这种特殊情况下,预处理乘子法失效。

让我们来分析其产生的原因。注意到在(18)式中,(Π)在泛函原始项 I_0 中和在乘子项 I_λ 中是以同一函数形式(线性)出现的,这时 Π 的系数同泛函变分后的 $\delta\Pi$ 项的系数是一样的,所以泛函中含 Π 的项必定会消失,从而导致第二类临界的产生。因此,为了消除此类临界,只须在进行预处理时,应设法避免在 I_0 和 I_λ 中以同一形式出现。为此,可设法改变 I_0 或 I_λ 的形式。例如,我们可从(3)式中解出:

$$\frac{w^2}{2} = \frac{w}{2}\sqrt{2(B - \Pi)} \tag{19A}$$

代入 J_1 中消去 $w^2/2$ 即可。或者在(18)式中，仍保持 I_0 不变，但将 I_λ 改为：

$$I_\lambda = \lambda(w^2 + 2\Pi - 2B)^n, \quad (n > 1) \tag{19B}$$

或

$$I_\lambda = \lambda \cdot \mathrm{sh}(w^2 + 2\Pi - 2B) \tag{19C}$$

等等。

还不难看到，设某未知函数(设为 u)只以代数形式出现在一个约束式中，且它在原泛函表达式(相当于(18)式中的 I_0)和在约束项(相当于 I_0)以同一函数形式(例如 $f(u)$)出现，则虽然识别的 λ 不为零，但将识别后的 λ 代回泛函中后，u 将完全消失，即出现第二类临界变分状态。克服之法仍如上所述(如(19A,B,C)式)，目的是应设法使 u 在 I_0 和 I_λ 中以不同函数形式出现。

6 结束语

本文提出了消除临界变分状态的两个新方法，它们可以直接地推广到具有多个拉氏乘子(即多个约束)的情况中去。这样，就使文献[6]的推导变分原理族的系统性途径更加完整和通用化了。显然，本法具有普适性，并不限于流体力学问题。

参 考 文 献

1 钱伟长. 广义变分原理. 北京：知识出版社，1985.

2 刘高联，林俊粲. 弹性力学广义变分原理的一些普遍形式. 上海力学学会，1983 年年会论文.

3 刘高联. 论水坝溢流等问题广义变分原理的更普遍形式. 中国力学学会第一届水动力学学术论文，1984.

4 Liu G. L. New VP (variational principles) families for direct, inverse and hybrid problems of free surface gravity flow over a spillway, Turbulence Measurements and Flow Modeling, eds, C, J. Chen et al., Hemisphere, New York, 1987, 323～332.

5 Liu G. L. On variational crisis and generalized VP for inverse and hybrid problems of free surface flow. Proc, 6th Asian Congress of Fluid Mech. May 22～26. 1995, Singapore, 745～748.

6 Liu G. L. Derivation and transformation of VP with emphasis on inverse & hybrid problems in fluid mechanics: A systematic approach. Acta Mech. 2000, 140, 73～89.

7 刘高联. 流体力学广义变分原理临界变分状态的简便消除法. 第 5 届全国水动力学学术会议及第 15 届全国水动力学研讨会文集，海洋出版社，2001，1～4

钱塘江河口涌潮数值模拟方法研究

许为厚

(香港科技大学数学系,香港九龙)

潘存鸿　　林炳尧　　毛献忠

(浙江省水利河口研究院,杭州 310020)

摘　要　本文采用基于 Godunov 格式的水位方程法求解包括河床坡降项的浅水流动方程,利用 2000 年 9 月 在钱塘江澉浦至富春江电站的涌潮观测资料[7]进行了算法检验,分析数值模拟结果以后,对钱塘江涌潮宏观规律的认识有所增加。

关键词　钱塘江,涌潮,数值模拟

1　前言

在特殊地形影响下,钱塘江河口形成了闻名于世的涌潮。钱塘江下游杭州湾是个喇叭形河口湾,湾口宽达 100km,至上游 89km 的湾顶澉浦,收缩到 22km,河宽急剧收缩,潮差增大,澉浦比湾口大 75% 以上,最大达 8.93m。另一方面,河床从澉浦开始溯源抬升,在纵剖面上存在一宏大的钱塘江沙坎。水深减小,潮差渐大,浅水效应增强,潮波剧烈变形,最终形成涌潮。

钱塘江一类河口水体流动可以用浅水流动方程描述,因为存在涌潮,因此,除需要满足各物理量守恒等一般条件外,数值模拟的一个关键是强间断的模拟。

如果不考虑河床起伏和摩阻,浅水流动方程类似于气动力学中的欧拉方程。Marshall 和 Mendez[1]直接应用 Godunov 格式求解浅水流动方程对应的齐次方程。近十年来,这种格式已成为求解浅水大梯度流动的重要方法。

事实上,河床必有起伏。忽略这种起伏,即便给定静水的初、边值条件,因各处水深不同,Riemann 解所给出的是流速不为零的非静水解。底坡顶的处理因此成了浅水流动模拟的一个难点。为此,Zhou 等[4]提出“水面梯度法(Surface gradient Method)”,许为厚、潘存鸿提出了“水位方程法 (Water Level Formulation)”。

本文采用基于 Gödunov 格式的水位方程法求解包括河床坡降项的浅水流动方程,利用 2000 年 9 月在钱塘江澉浦至富春江电站的涌潮观测资料[7]进行了算法检验,分析数值模拟结果以后,对钱塘江涌潮宏观规律的认识有所增加。

2 计算方法

2.1 控制方程及其网格变换

$$\begin{cases} \mathrm{d}t = \mathrm{d}\lambda \\ \mathrm{d}x = A\mathrm{d}\xi + L\mathrm{d}\eta \\ \mathrm{d}y = B\mathrm{d}\xi + M\mathrm{d}\eta \end{cases} \tag{1}$$

以后，在 (λ, ξ, η) 空间的矩形单元中，包括河床坡降及摩阻项的非定常二维浅水流动方程为

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} \tag{2}$$

式中

$$E = \begin{bmatrix} h\Delta \\ h\Delta u \\ h\Delta v \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} hI \\ hIu + \frac{1}{2}gh^2M \\ hIv - \frac{1}{2}gh^2L \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} hJ \\ hJu - \frac{1}{2}gh^2B \\ hJv + \frac{1}{2}gh^2A \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(Mb_\xi - Bb_\eta + \Delta S_{fx}) \\ -gh(-Lb_\xi + Ab_\eta + \Delta S_{fy}) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = AM - BL \qquad I = uM - vL \qquad J = vA - uB$$

式中，u, v 分别为 x, y 方向的流速分量；h 为水深；g 为重力加速度；b 为河床高程；S_{fx}，S_{fy} 分别为 x, y 方向的阻力。

2.2 控制方程离散及其算子分裂

在平面 (ξ, η) 上，应用有限体积法，方程(2)即离散为

$$E_{i,j}^{n+1} = E_{i,j}^{n} - \frac{\Delta\lambda}{\Delta\xi_i}\left[F_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}\right] - \frac{\Delta\lambda}{\Delta\eta_i}\left[G_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - G_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right] + \Delta\lambda S_{i,j} \tag{3}$$

式中,下标 i 和 j 分别表示 ξ 和 η 方向的单元序号;上标 n 为时间步长数;$\Delta\xi$ 和 $\Delta\eta$ 分别表示 ξ 和 η 方向的空间步长,即 $\Delta\xi_i = \xi_{i+\frac{1}{2}} - \xi_{i-\frac{1}{2}}$,$\Delta\eta = \eta_{j+\frac{1}{2}} - \eta_{j-\frac{1}{2}}$;$\Delta\lambda$ 为时间步长;F 为穿越 ξ 方向的单元边界 $\xi_{i-\frac{1}{2}}$ 及 $\xi_{i+\frac{1}{2}}$ 的数值通量;G 为穿越 η 方向单元边界 $\eta_{j-\frac{1}{2}}$ 及 $\eta_{j+\frac{1}{2}}$ 的数值通量。

应用 Strang 分裂法,将问题分维求解。对空间分裂成 ξ 和 η 方向,则有

$$E^{n+1} = R^{\xi}_{\frac{\Delta\lambda}{2}} R^{\eta}_{\Delta\lambda} R^{\xi}_{\frac{\Delta\lambda}{2}} E^{n} \tag{4}$$

式中 $R^{\xi}_{\Delta\lambda}$ 和 $R^{\eta}_{\Delta\lambda}$ 分别表示 $\lambda-\xi$ 平面和 $\lambda-\eta$ 平面一维方程的求解算子。如果 $R^{\xi}_{\Delta\lambda}$ 和 $R^{\eta}_{\Delta\lambda}$ 在空间上为二阶精度,则一维方程在空间上也为二阶精度。

2.3 Riemann 解

$\lambda-\eta$、$\lambda-\xi$ 两平面的 Riemann 问题类似。$\lambda-\xi$ 平面中,将 x、y 方向的流速分量 u、v 转换成 ξ、η 方向的流速分量 ω、τ,并略去非齐次项,ξ 方向一维方程的 Riemann 问题可简化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial F}{\partial \xi} = 0 & \lambda > 0 \\ E = (0,\xi)\begin{cases} E_1, & \xi < 0 \\ E_r, & \xi > 0 \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

式中,

$$E = \begin{bmatrix} h\Delta \\ h\Delta\omega \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} h\omega \\ h\omega^2 + \dfrac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

E_l 和 E_r 为常数。

方程(5) 有四种可能的解,即常数解、稀疏波、激波,及滑移线。

2.4 水位方程法

因为河床高程是 χ 的函数,用水深、流速作为变量,将使 Riemann 问题难以求解。为此,采用水位方程法 (WLF),河床高程近似采用相邻单元的平均值问题

$$\bar{b}_{i,i+1} = \frac{1}{2}(b_i + b_{i+1}) \tag{6}$$

代替以后,问题归结成方程(5),仍可用经典方法求解 Riemann 解。

2.5 底坡原项的离散

为保证计算结果的和谐性,对底坡源项还需选取合适的离散方法,使得在计算过程中方程