21世纪大学数学精品教材

数学模型与计算

赵东方 著

科学出版社
www.sciencep.com

数学模型与计算

·21世纪大学数学精品教材·

数学模型与计算

赵东方 著

北 京

内 容 简 介

本书针对数学建模的特点，结合实际问题进行叙述，既有建模的例子，又有计算的程序，力求做到通俗易懂，方便自学. 主要内容包括：数学建模概论，Mathematica 软件包介绍，Matlab 基础知识介绍，优化问题与计算，数据拟合与计算，概率统计问题与计算，假设检验与计算，聚类分析与计算，判别分析与计算，线性规划问题与计算，下料问题与计算，Lingo 软件包及其应用，矩阵博奕与计算，Markov 链模型与计算，层次分析法与计算，建模实验例题演示.

本书可作为高等院校理、工、经、管等专业的数学模型及其相关课程教材，也可以作为教研工作者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学模型与计算/赵东方著.—北京：科学出版社，2007
（21 世纪大学数学精品教材）
ISBN 978-7-03-018478-8

Ⅰ.数… Ⅱ.赵… Ⅲ.数学模型－高等学校－教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 009005 号

责任编辑：江 兰／责任校对：董艳辉
责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 2 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2007 年 2 月第一次印刷 印张：21 1/2
印数：1—5 000 字数：500 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

现代社会的发展，需要数学理论与方法，但更需要熟悉各种数学方法，能够与物理学家、工程师等合作，配合解决实际问题的专家. 这种需要也必然引起大学数学教学的改革. 例如，英国牛津大学就有数学建模方面的博士点，而美国人直接将数学建模课程引入理科、理工科大学生的教学中，并设立了一年一次的“大学生数学建模竞赛”，简记为 MCM. 这个竞赛吸引了许多国家的大学生参赛，其国际影响及权威性日益增加. 美国为此有专门的刊物，比如《数学和计算机建模》: Mathematical and Computer Modelling — An International Journal，缩写为 Math.Comput.Modelling，1980 年创刊，开始是季刊，很快改为月刊. 1988 年以前刊名叫 Mathematical Modelling — An International Journal，每隔一年出一次国际数学建模会议纪要(近 1 000 页)作为增刊.

我国从 1989 年开始组织全国大学生数学建模竞赛，取得了很大的成绩，参赛学校与参赛队伍逐年扩大. 现在，全国许多大学都相继开设了数学建模课程，或者是数学实验课程. 许多学校都体会到，本科学生通过数学建模课程的学习，在快速查找资料、熟练使用计算机及其软件包快速计算、应用各种理论和知识解决实际问题、团结合作等方面的综合能力有了极大的提高. 同时，许多同学通过数学建模课程的学习，对科学研究的大致程序、建立模型的一般过程、快速计算的编程技巧有了相当程度的了解，并且得到了系统的训练. 因此，大学数学建模课程的教学与实践，得到了学生与社会的极大认可. 所以，近年来，全国高校参赛数量年年增加，学校类型涉及综合类、理工类、农林类、师范类，甚至高职高专类学校参赛的积极性都非常高，这说明，全国大学生数学建模竞赛为提高大学生的综合能力提供了一个非常好的平台.

一般说来，数学建模是一个过程，主要涉及两个方面：第一，将实际问题转化为理论模型；第二，对理论模型进行计算和分析. 本书主要内容是笔者在科研和教学过程中的心得和体会，特点是针对以上两个方面，结合实际问题进行叙述，既有建模的例子，又有计算的程序，力求做到通俗易懂，尤其是方便读者自学，只要读者认真阅读书中内容，多上机运算，就会有收获.

本书涉及的数学软件包是：Mathematica，Matlab，Lindo，Lingo. 书中介绍了这些软件包的基本知识，以及这些软件包在数学模型计算中的应用(附有详细的软件程序).

书中内容不可能做到面面俱到，如有疏漏，敬请赐教，不胜感谢.

赵东方
2006 年 9 月于武昌桂子山

目　录

第 0 章　数学建模概论

一般说来，数学建模是科学研究过程中的一个环节．我们应当了解科学研究的大致过程以及建模的大概步骤．

科学研究过程就是对客观事物的认识过程，因此它仍然遵循着一般的认识规律，不过它把这个认识过程组织得更加具体、周详、精确．总的说来，可以说是一个科学研究思维的过程．科学研究思维过程包含四大阶段，即发现问题阶段、了解情况阶段、深入思考阶段和实践验证阶段．一项科学研究可以包括这个全过程，也可以是只在其中的一个或一个以上的阶段里进行工作并取得成果．

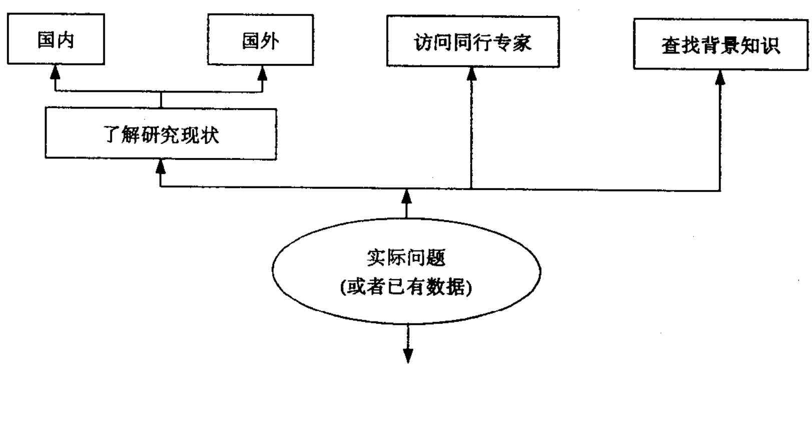
科学研究开始于发现问题．人们在对客观事物的认识上产生了矛盾也就是出现了问题，必须解决这个矛盾或问题，提高认识．为了解决这个矛盾，才需要进行科学研究．所以科学研究的第一步就是善于认清矛盾，或者说善于发现问题．

一个科研工作者有了问题之后，就必然想对这一问题作深入的了解，了解关于这个问题的各方面的情况，了解它的来龙去脉，了解它的多方面的联系，为的是要把这一问题的有关现象或事实弄清楚．

深入思考是在上述的占有丰富资料的基础上进行的．感性的东西并不能自发地变成理性的东西．光是占有材料还不能上升到理论．要想从占有材料中找出带有规律性的理论，还得在占有材料的基础上做一番“去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里”的工作．这工作总的来说就是深入思考，详细分析，它包含着多种形式的脑力加工．

所以，当我们面对一个实际问题进行科学研究时，首先，我们应该针对所要研究的实际问题，去查找其相关的背景知识；其次要了解所要研究问题的研究现状，包括国内的和国外的研究现状；第三，还应该与同行专家等相关人士进行充分的讨论，通过这些调查以后，科研小组提出自己的研究方向与可能的研究路线(注意，并不是所有的想法都能成功地转化为一个理论模型)，然后，建立自己的模型，得到自己的科研成果．

我们用下面的草图来说明：



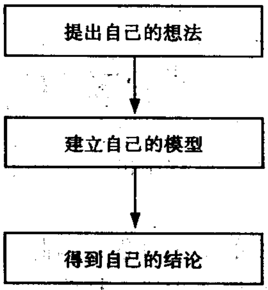


图 0.1

在科学研究过程中，数学建模是其核心．何为数学建模？总的来说，数学建模是一个过程，是一个解决实际问题的过程，它的大致步骤如图 0.2 所示．

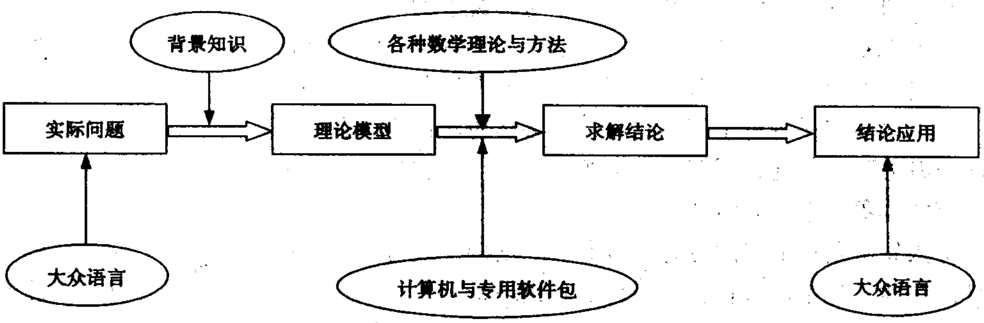


图 0.2

更简单地说，大约是三个步骤：

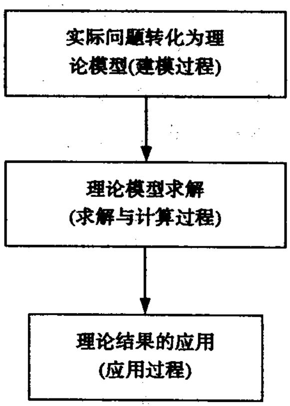


图 0.3

其中，建模过程主要依赖于问题的背景知识和各种理论方法，求解与计算过程在很大程度上要依赖于计算机和各种计算机专用软件包，数学建模过程中尤其要熟练掌握各种数学专用软件包，例如，Mathematica 软件包、Matlab 软件包、Lindo 与 Lingo 软件包以及 SPSS 统计软件包等.

数学建模的过程是解决实际问题的过程，在这个过程中有几个需要特别注意的地方：

实际问题一般都是用普通大众语言叙述的，这就需要我们具有将普通大众语言转化为理论语言、实际问题转化为理论模型、模型求解与计算的能力以及将理论结果转化为大众尽可能听得懂的语言，使得理论结果能够得到充分应用的能力.

我们列举一些简单的例子来作相应的说明.

§ 0.1　大众语言与理论结果相互转化的能力

例 0.1　研究中国象棋的马，无论从何处起跳，回到原地的规律.

解　用大众语言所说的跳马，在数学上是什么含义呢？我们分析一下：

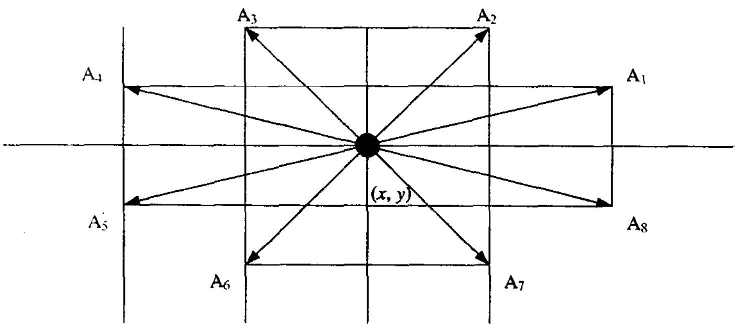


图 0.4

假设马在(x, y)位置，根据规则，它可以跳向 A_1~A_8 共 8 个位置. 我们从图 0.4 看出，所谓的跳马，就是在原来马的位置向量上加一个相应的向量.

A_1：+(2，1)　　A_2：+(1，2)　　A_3：+(−1，2)　　A_4：+(−2，1)

A_5：+(−2，−1)　　A_6：+(−1，−2)　　A_7：+(1，−2)　　A_8：+(2，−1)

那么，假设中国象棋的马从(x, y)位置开始起跳，共用了 m 步跳回原处，其中 A_i 类跳法跳了 x_i 步，化为向量运算则有

$$(x,\ y)+x_1(2,\ 1)+x_2(1,\ 2)+x_3(-1,\ 2)+x_4(-2,\ -1)+x_5(-2,\ -1)$$
$$+x_6(-1,\ -2)+x_7(1,\ -2)+x_8(2,\ -1)=(x,\ y)$$

以及

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=m$$

得到

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-2x_4-2x_5-x_6+x_7+2x_8=0\\x_1+2x_2+2x_3-x_4-x_5-2x_6-2x_7-x_8=0\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=m\end{cases}$$

将以上三式相加，得到

$$4x_1+4x_2+2x_3-2x_4-2x_5-2x_6+0x_7+2x_8=m$$

即 m 是一个偶数. 再将这个数学表达式翻译成普通人能懂的语言：中国象棋的马，无论从哪里起跳，一定是偶数步回到原处，既好懂又好记.

大家还可以得到其他类似结论.

§0.2　用各种可能的方法解决实际问题的能力

例 0.2　(Bode 法则)1772 年，德国天文学家 J Bode(1747~1826)研究了行星到太阳距离形成的模式. 那时已经知道的只有六大行星，也只有六个数据，Bode 将实际数据转化为整数数据，然后研究整数数据的规律，居然有重大发现.

Bode 发明的模式如下表：

表 0.1

行星	真实距离/百万 km	Bode 距离/单位	Bode 模式
水星	57.9	3.87 ≈ 4 单位	0+4=4
金星	108.2	7.23 ≈ 7 单位	3+4=7
地球	149.6	定义为 10 单位	6+4=10
火星	227.9	15.234 ≈ 15 单位	12+4=16
木星	778.3	52.02 ≈ 52 单位	48+4=52
土星	1427.0	95.38 ≈ 96 单位	96+4=100

Bode 认为火星与木星之间有缺项，应该存在一颗行星. 事实上，在火星与木星之间存在一颗小行星，距离太阳 433.8(百万 km)≈28.9973 单位，如表 0.2 所示.

表 0.2

行星	真实距离/百万 km	Bode 距离/单位	Bode 模式
水星	57.9	3.87 ≈ 4 单位	0+4=4
金星	108.2	7.23 ≈ 7 单位	3+4=7
地球	149.6	定义为 10 单位	6+4=10
火星	227.9	15.234 ≈ 15 单位	12+4=16
小行星	433.8	28.9973 ≈ 29 单位	24+4=28
木星	778.3	52.02 ≈ 52 单位	48+4=52
土星	1427.0	95.38 ≈ 96 单位	96+4=100
天王星	2870.0	191.845 ≈ 192 单位	192+4=196
海王星	4497.0	300.6 ≈ 301 单位	384+4=388
冥王星	5907.0	394.85 ≈ 395 单位	768+4=772

例 0.3　(风寒温度模型)天气预报的温度与人们实际感受到的温度(冬天叫风寒温度，夏天叫体感温度)是有区别的. 冬天，当温度接近 0℃时，风寒温度与空气温度和风速有关. 在第二次世界大战期间，美国科学家依据实际数据进行拟合，得到公式如下：设 t 为预报温度、T 为风寒温度(℃)，v 为风速(mph=英里/小时=1.609 334 千米/小时)，则有

$$T = 33 + (0.45 + 0.29\sqrt{v} - 0.02v)(t - 33)$$

(1) 何时 $T=t$?

$$0.45 + 0.29\sqrt{v} - 0.02v = 1 \Rightarrow v = 5.03443，\ v = 150.216\text{(舍去)}$$

取 $v=5$.

(2) $t=2$℃，$v=20$mph 时，$T=-8.7545$℃.

注意，现在使用计算机数学软件包进行数据拟合，已经很方便了.

思考题：读者能否建立自己所在地区的相应模型?

例 0.4　将女子七项全能比赛(通常排在两天内赛完)的比赛成绩换算为点数(分数)，点

数多者为胜．换算公式为

$$P=a(\pm m\pm b)^c$$

其中：P 为点数；m 为运动员的成绩；a，b，c 为待定常数．

无论哪个项目，当 P=1000 时，认为是优秀运动员．

(1) 800 米跑步(m 的单位：s)：

$$P=0.11193(254-m)^{1.88}$$

当 P=1000 时，m=127.64s=2′7″64．

(2) 跳高(m 的单位：cm)：

$$P=1.84523(m-75)^{1.348}$$

当 P=1000 时，m=181.697cm>181cm．

讨论　7 个不同的项目对应不同量纲的 7 种不同的数据，利用一个公式进行换算，换算为同一种分值进行排序，换算公式不能太简单(例如，线性函数比较简单)，也不能太复杂，此例采用的换算函数很有启发性：换算函数是非线性的，但如果不考虑符号，对换算公式取对数，就是线性函数．

§ 0.3　求解与计算的能力

在许多情况下，我们并不一定对问题的实际背景的理论有深刻的了解，但现实生活要求我们在背景知识的指导下，能够熟练使用计算机，编程处理问题，求解并快速计算出结果．

例 0.5　(复活节日期计算法：The Easter Sunday Algorithm)复活节是基督教的一个节日，纪念耶稣基督的复活，定为每年春分后、月圆后的第一个星期天，如果月圆那天就是星期天，则顺延一星期．

2006 年 4 月 16 日(星期天)是复活节．

天文学计算方法如下：x=年份，计算 n 月 p 日(共 10 步)．

表 0.3

步骤	被除数	除数	商	余数
1	x=年份	100	b=	c=
2	$5b+c$	19	—	a=
3	$3(b+25)$	4	r=	s=
4	$8(b+11)$	25	t=	—
5	$19a+r-t$	30	—	h=
6	$a+11h$	319	g=	—
7	$60(5-s)+c$	4	j=	k=
8	$2j-k-h+g$	7	—	m=
9	$h-g+m+110$	30	n=月份	q=
10	$q+5-n$	32	—	p=日期

也许大多数求解者并不一定能够深刻了解以上求解步骤的天文学背景知识，但要有能够用计算机实现以上计算步骤的能力．

解　例如，在 Mathematica 软件包中编程求解 2005~2025 年复活节的日期：

```
Do[{b=Quotient[x,100];
    c=Mod[x,100];
    a=Mod[5b+c,19];
    r=Quotient[3(b+25),4];
    s=Mod[3(b+25),4];
    t=Quotient[8(b+11),25];
    h=Mod[19a+r-t,30];
    g=Quotient[a+11h,319];
    j=Quotient[60(5-s)+c,4];
    k=Mod[60(5-s)+c,4];
    m=Mod[2j-k-h+g,7];
    n=Quotient[h-g+m+110,30];
    q=Mod[h-g+m+110,30];
    p=Mod[q+5-n,32];
    Print[x,"-",n,"-",p]},{x,2005,2025}]
```

执行后得到 2005~2025 年复活节的日期如下：

```
2005-3-27
2006-4-16
2007-4-8
2008-3-23
2009-4-12
2010-4-4
2011-4-24
2012-4-8
2013-3-31
2014-4-20
2015-4-5
2016-3-27
2017-4-16
2018-4-1
2019-4-21
2020-4-12
2021-4-4
2022-4-17
2023-4-9
2024-3-31
2025-4-20
```

例 0.6　(阿基米德群牛问题)公元前 3 世纪下半叶，古希腊科学家阿基米德(Archimedes，公元前 287~前 212 年)在其论著[1]中记载了一个牲畜问题，一般称做“群牛问题”．历史

上对这一问题的研究丰富了初等数论的内容.

原文用诗句写成,大意是:西西里岛草原上有一大群牛,公牛和母牛各有 4 种颜色. 设 W, X, Y, Z 分别表示白、黑、黄、花色的公牛数, w, x, y, z 分别表示白、黑、黄、花色的母牛数, 它们满足:

$$W=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y \qquad X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y \qquad Z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y,$$

$$w=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X+x) \qquad x=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Z+z)$$

$$z=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y) \qquad y=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w)$$

求它们各有多少头?

(1) 不附加条件的群牛问题. 求解方程组:

$$W=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y \qquad X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y \qquad Z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y$$

$$w=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X+x) \quad x=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Z+z) \quad z=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y) \quad y=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w)$$

在 Mathematica 4.1 软件包中编程如下[3]:

```
Solve[{W==(1/2+1/3)X+Y,X==(1/4+1/5)Z+Y,Z==(1/6+1/7)W+Y,
w==(1/3+1/4)(X+x),x==(1/4+1/5)(Z+z),z==(1/5+1/6)(Y+y),
y==(1/6+1/7)(W+w)},{w,x,y,z,W,X,Y,Z}]
```

执行后得到结果:

```
Solve::svars : Equations may not
   give solutions for all "solve" variables.
{{w->360318Z/367903,x->2446623Z/3679030,y->5439213Z/7358060,
  z->175791Z/367903,W->1113Z/790,X->801Z/790,Y->891Z/1580}}
```

其中: Z 是自由变量. 限定 $1\leqslant Z\leqslant 10000000$, 在 Mathematica 软件包中, 继续编程寻找整数解:

```
Do[If[IntegerQ[360318Z/367903]&&IntegerQ[2446623Z/3679030]&&
   IntegerQ[5439213Z/7358060]&&IntegerQ[175791Z/367903]&&
   IntegerQ[1113Z/790]&&IntegerQ[801Z/790]&&
   IntegerQ[891Z/1580],{Print["Z=   ",Z],Break[]}],
{Z,10000000}]
```

执行后得到最小的 Z=7358060, 将其代入方程组:

```
Z=7358060;
Solve[{W==(1/2+1/3)X+Y,X==(1/4+1/5)Z+Y,
  Z==(1/6+1/7)W+Y,w==(1/3+1/4)(X+x),
  x==(1/4+1/5)(Z+z),z==(1/5+1/6)(Y+y),
  y==(1/6+1/7)(W+w)},{w,x,y,z,W,X,Y,Z}]
```

执行后得到结果:

```
{{w->7206360,x->4893246,y->5439213,
  z->3515820,W->10366482,X->7460514,Y->4149387}}
```

即白色母牛 $w=7206360$ 头，黑色母牛 $x=4893246$ 头，黄色母牛 $y=5439213$ 头，杂色母牛 $z=3515820$ 头；白色公牛 $W=10366482$ 头，黑色公牛 $X=7460514$ 头，黄色公牛 $Y=4149387$ 头，杂色公牛 $Z=7358060$ 头.

不附加条件的群牛问题，总数最少为 50389082 头，即大约五千万头.

(2) 附加条件的群牛问题. 求解方程组:

$$W=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y \qquad X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y \qquad Z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y\ ,$$

$$w=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X+x) \quad x=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Z+z) \quad z=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y) \quad y=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w)$$

并且，$(Y+Z)$ 为一个三角数，即 $(Y+Z)=\dfrac{m(m+1)}{2}$，其中：m 是一个正整数. $(W+X)$ 为一个长方形数，即

$$(W+X)=\begin{cases} m*n & \text{较简问题} \\ n^2 & \text{完全问题} \end{cases}$$

① 较简问题. 因为牛的身长与体宽不一样，“较简问题”表示，将牛排成长方形，两边的数目不一样. 有文章说，较简问题求解后牛的总数近 6 万亿头. 我们在 Mathematica 软件包中编程求解如下:

第一步　求解无附加条件的线性方程组:

```
Solve[{W==(1/2+1/3)X+Y,X==(1/4+1/5)Z+Y,Z==(1/6+1/7)W+Y,
 w==(1/3+1/4)(X+x),x==(1/4+1/5)(Z+z),z==(1/5+1/6)(Y+y),
 y==(1/6+1/7)(W+w)},{w,x,y,z,W,X,Y,Z}]
```

执行后得到结果:

```
Solve::svars : Equations may not
   give solutions for all "solve" variables.
```

$$\left\{\left\{w->\frac{360318Z}{367903},x->\frac{2446623Z}{3679030},y=\frac{5439213Z}{7358060},\right.\right.$$
$$\left.\left.z->\frac{175791Z}{367903},W->\frac{1113Z}{790},X->\frac{801Z}{790},Y->\frac{891Z}{1580}\right\}\right\}$$

其中：Z 是自由变量.

第二步　限定 $1\leq Z\leq 1000000000$，在 Mathematica 软件包中，继续编程寻找整数解：

$$\text{Do[If[IntegerQ[}\frac{360318Z}{367903}\text{]\&\&IntegerQ[}\frac{2446623Z}{3679030}\text{]\&\&}$$
$$\text{IntegerQ[}\frac{5439213Z}{7358060}\text{]\&\&IntegerQ[}\frac{175791Z}{367903}\text{]\&\&}$$
$$\text{IntegerQ[}\frac{1113Z}{790}\text{]\&\&IntegerQ[}\frac{801Z}{790}\text{]\&\&IntegerQ[}\frac{891Z}{1580}\text{],}$$
$$\text{\{Print["Z= ",Z]\},\{Z,1000000000\}]}$$

执行后得到下列 135 个 Z 值可以使得其他变量取整数值：

```
Z=7358060, Z=14716120,  Z=22074180, Z=29432240,
Z=36790300, Z=44148360, Z=51506420, Z=58864480,
Z=66222540, Z=73580600, Z=80938660, Z=88296720,
Z=95654780, Z=103012840, Z=110370900, Z=117728960,
Z=125087020, Z=132445080, Z=139803140, Z=147161200,
Z=154519260, Z=161877320, Z=169235380, Z=176593440,
Z=183951500, Z=191309560, Z=198667620, Z=206025680,
Z=213383740, Z=220741800, Z=228099860, Z=235457920,
Z=242815980, Z=250174040, Z=257532100, Z=264890160,
Z=272248220, Z=279606280, Z=286964340, Z=294322400,
Z=301680460, Z=309038520, Z=316396580, Z=323754640,
Z=331112700, Z=338470760, Z=345828820, Z=353186880,
Z=360544940, Z=367903000, Z=375261060, Z=382619120,
Z=389977180, Z=397335240, Z=404693300, Z=412051360,
Z=419409420, Z=426767480, Z=434125540, Z=441483600,
Z=448841660, Z=456199720, Z=463557780, Z=470915840,
Z=478273900, Z=485631960, Z=492990020, Z=500348080,
Z=507706140, Z=515064200, Z=522422260, Z=529780320,
Z=537138380, Z=544496440, Z=551854500, Z=559212560,
Z=566570620, Z=573928680, Z=581286740, Z=588644800,
Z=596002860, Z=603360920, Z=610718980, Z=618077040,
Z=625435100, Z=632793160, Z=640151220, Z=647509280,
Z=654867340, Z=662225400, Z=669583460, Z=676941520,
Z=684299580, Z=691657640, Z=699015700, Z=706373760,
Z=713731820, Z=721089880, Z=728447940, Z=735806000,
Z=743164060, Z=750522120, Z=757880180, Z=765238240,
```

```
Z=772596300, Z=779954360, Z=787312420, Z=794670480,
Z=802028540, Z=809386600, Z=816744660, Z=824102720,
Z=831460780, Z=838818840, Z=846176900, Z=853534960,
Z=860893020, Z=868251080, Z=875609140, Z=882967200,
Z=890325260, Z=897683320, Z=905041380, Z=912399440,
Z=919757500, Z=927115560, Z=934473620, Z=941831680,
Z=949189740, Z=956547800, Z=963905860, Z=971263920,
Z=978621980, Z=985980040, Z=993338100
```

第三步　针对不同的 Z 值，求其他变量的整数值，并且验证是否符合较简问题的附加条件.

(a) 当 Z=7358060 时，有

$$
\begin{aligned}
&\texttt{Z = 7358060;}\\
&\texttt{Solve[\{W == }\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\texttt{X + Y, X == }\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\texttt{Z + Y,}\\
&\quad\texttt{Z == }\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\texttt{W + Y, w == }\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\texttt{(X + x),}\\
&\quad\texttt{x == }\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\texttt{(Z + z), z == }\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\texttt{(Y + y),}\\
&\quad\texttt{y == }\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\texttt{(W + w)\}, \{w, x, y, z, W, X, Y\}]}
\end{aligned}
$$

执行后得到结果：

```
{{w->7206360,x->4893246,y=5439213,
  z->3515820,W->10366482,X->7460514,Y->4149387}}
```

此时 Y+Z=11507447. 是否存在正整数 m，使得 $2(Y+Z)=m(m+1)$？注意，这种正整数 m 如果存在，它一定是 2(Y+Z)和 W+X 的因子. 根据这一特点，在 Mathematica 软件包中编程验算：

```
a=4149387+7358060;b=10366482+746051;
p=Divisors[2a]
Do[If[2a==p[[k]](p[[k]]+1),Print["m=",p[[k]]]],{k,Length[p]}]
```

执行后可知这种 m 不存在.

(b) 可以验证，其他的 134 个 Z 值，同样不满足附加的条件.

注意，在 Mathematica 5.0 软件包中，数字超过百亿就不能计算了，读者有兴趣，可以用另外的程序编程求解.

② 完全问题. $(W+X)=n^2$(长与宽的数目相等)，即将牛排成正方形，两边的数目相等时，称为“完全问题”. 求解完全问题，最后归结为求解二元二次方程不定方程(Pell 方程[3, 4])：

$$x^2-410286423278424y^2=1.$$

这个不定方程的解，已经通过计算机在几分钟之内求出[2, 3]. 在 Mathematica 软件包中编程如下：

第一步　在 Mathematica 4.1 软件包中建立一个求解模块 PellSolve. 首先执行以下