

数学教育丛书

SX

数学方法论

郑毓信 著



★广西教育出版社

数学教育丛书

主 编 马忠林

数 学 方 法 论

郑毓信 著

广西教育出版社

数 学 方 法 论

郑毓信 著



广西教育出版社出版

(南宁市鲤湾路8号)

广西新华书店发行 南宁地区印刷厂印刷

※

开本 850×1168 1/32 8.5 印张 插页 4 199 千字

1991 年 7 月第 1 版 1995 年 8 月第 2 次印刷

印数：2, 501—4, 500 册

ISBN 7-5435-1338-2/G·1041 定价：9.70 元

总 序

马 忠 林

《数学教育丛书》的出版,标志着我国数学教育研究进入了一个新时期。

中国是数学发祥地之一。远在公元6世纪我国古算家已完成了《算经十书》这样的伟大著作,成为长达近二千年流传着的算学教材,作为我国数学教育(初期)媒介,起着巨大作用,直至清末算学教育也仍以此为鉴。我国早期的数学教育,实际上是来自田园、作坊、家庭,其教学形式不外是父教子、师带徒的个别传授。后来才进而发展为私塾、家馆及学社式的教学,这可称之为数学教育的萌芽时期。这一时期的数学教育,严格地说,只是一种教学行为。因为它并没有明确的教育制度、教学目的,甚至缺乏必要的教学手段等。

18世纪欧洲工业革命以后,西方传教士东来中国,设立教会学校,西算开始输入中国。至本世纪初,我国改学堂为学校,数学也被列入教学课程,开始使用翻译的西书及国人编纂的数学教科书,开始讲究教学方法,教学组织形式也已由个别教育改为班级制的集体教育,这就更有利于大量地培养懂科学和数学的人才。数学教育的这种进步,是可喜的。但仍有其很大局限性,因为人们还不甚了解数学教育的重要性,教学基本上是注入式的,在这种教育制度下只能培养出死记硬背知识的“书生”。这时期,除教科书外,很少有可供教师和学生阅读、参考的读物。此可谓近代

数学教育的特点。

本世纪初期,由于社会、经济、科学技术的不断发展和进步,传统的数学教育已不适应客观的需要,教育改革已提到日程上来了。首先,在本世纪初英国皇家理科大学教授培利(J. Perry)在他的以“数学教育”为题的讲演中,提倡数学的实用性,批判了英国保守的传统教育。继之,德国的克莱茵(F. Klein)、法国的波莱尔(Borel)、美国的穆尔(Moore)等相继响应培利的革新数学教育的倡议,并提出种种改良数学教育方案。后来人们把这次向传统数学教育挑战的改革称为培利——克莱茵运动。此可谓数学教育改革的先声。

更大的数学教育改革运动,是本世纪60年代的数学教育现代化运动(新数学运动)。其涉及面之广,改革程度之深,是前所未有的。一举突破了传统数学教育的旧框框,企图编写理想的、新的教材,实行新的教学组织形式。改革虽不能说完美成功,但一改过去长期沉寂的数学教育,进行新的尝试与实践,还是难能可贵的。

到本世纪60年代,数学教育的重要性已引起世人的瞩目。1969年国际数学教育委员会(ICMI,成立于1908年)恢复了组织,并于同年在里昂(法)召开了战后第一次国际数学教育会议(ICMEI)。并相继在艾克西特(英)、卡尔斯洛赫(西德)、伯克利(美)、阿德里德(澳)、布达佩斯(匈)召开了会议,广泛开展国际交流,研讨数学教育的改革。会议中心议题,通常为“如何适应变革着的社会的数学教育”。正如现任国际数学教育会议主席法国南巴黎大学教授卡汉(Kahane)所说:“世界不啻是一个数学教育实验室,ICME实为一个交流经验基地。”国际数学教育界多年来的交流,成果累累。

建国以来,我国国民经济迅速发展,与此相应,党和政府一贯重视科学、重视教育,数学教育进行了多次改革,中学数学教

学大纲已作了六次修订,编写了多 教材,研讨教学方法,改革教育制度,教学质量不断提高。

近 10 年来,我国数学界还开展了频繁的国际数学交流,不但了解了外国的数学教育改革的情况,而且结合我国实际取其长、弃其短,对数学教育进行了大力的改革。

数学教育界同仁近 10 年来,在党的领导下,做出了巨大努力,进行了有效的工作,在教育制度、教材、教学方法各方面进行多种实验,有些取得了可喜成果。当前数学教育改革的研究,已深入到理论研究领域。各级研究会及学报、杂志发表了大量很好的研究文章,出版了多种专著,数学教育已初步形成系统化、科学化,能指导数学教学实际的一门科学——数学教育学。从事这门科学的研究队伍规模之大和研究成果之丰,在我国数学教育史上是前所未有的。所以说,我国数学教育研究,进入了一个新时期。

在系统研究我国数学教育的历史和现状之后,我们深感前人在数学教育方面留下来的资料,远远不能适应数学教育与研究之所需。有鉴于此,我们就非常需要加强学科理论基础建设工程。因此,把我国现阶段的一些研究成果分专论汇集起来,作为数学教育丛书出版,把它作为文化财富奉献给吾侪同仁,留给后人,的确是一件有意义的事。勿庸讳言,这套丛书的出版,在我国还是初创。其内容可能不够成熟,但我们希望它在现阶段,能供读者有所参考,有得到读者的培植,使它在读者关怀下发挥些微作用。如果读者在阅读中,还能有些收获,则更是作者、编者、出版者深感荣幸和欣慰的。

广西教育出版社,从事业职责出发,付出巨大努力出版这套丛书,这是值得称赞的。

多年来渴望此类教育丛书出版,兹当它得以面世之际,赘数言以为序。

目 录

绪论 数学方法论的内容、性质和意义	(1)
第一章 波利亚的数学启发法	(11)
1. 1 四种具体的解题模式	(12)
1. 2 怎样解题	(22)
1. 3 数学中的合情推理	(38)
1. 4 对于波利亚的“超越”——“问题解决” 现代研究简介	(52)
第二章 数学发现的逻辑与关系映射反演方法	(62)
2. 1 拉卡托斯的数学发现的逻辑	(62)
2. 2 化归原则与关系映射反演方法	(76)
2. 3 其他的研究	(97)
第三章 数学抽象的方法与抽象度分析法	(112)
3. 1 数学抽象的定性分析	(113)
3. 2 数学抽象的若干方法论原则	(120)
3. 3 抽象度分析法	(146)
第四章 数学美与数学直觉	(155)
4. 1 庞加莱论数学美与数学直觉	(156)
4. 2 数学中的美学方法	(169)
4. 3 数学直觉的特性及数学直觉能力的培养	(193)

第五章 数学活动论	(201)
5. 1 数学活动的客体成分.....	(202)
5. 2 数学传统.....	(217)

第六章 数学文化论	(229)
6. 1 数学发展的动力.....	(229)
6. 2 数学发展的规律.....	(238)

结束语 深入开展数学方法论的研究, 促进数学研究和数学教学	(255)
--	-------

主要参考文献	(259)
---------------------	-------

后 记	(261)
------------------	-------

绪 论

数学方法论的内容、性质和意义

“数学方法论”现今对于我国数学界、特别是数学教育界已不是一个陌生的名称；然而，大多数人却未必知道，这只是一个在中国学术界得到广泛应用的名词，或者说，这在很大程度上即是一个由我国学者首先加以应用的名词，从有关的材料看，徐利治教授在1980年出版的《浅谈数学方法论》中首先采用了这样一个名词。他写道：“数学方法论是研究数学中的发现、发明以及创造性活动的规律和方法”。^①其后，在1983年问世的《数学方法论选讲》中，徐利治教授又给出了如下的定义：“数学方法论主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问。”^②显然，与1980年的定义相比，后一定义包含了更加丰富的内容。事实上，如果按照同一书中提出的关于“宏观的数学方法论”与“微观的数学方法论”的区分，关于数学发展规律的研究属于宏观的数学方法论，关于数学思想方法以及数学中的发现、发明与创新等法则的研究则属于微观的数学方法论。

纵观自1980年以来出版的各种数学方法论的著作和论文，可以发现其中大多数都采用了徐利治先生1983年的定义；然而，就

①《浅谈数学方法论》，辽宁人民出版社，1980年，前言。

②《数学方法论选讲》，华中工学院出版社，1983年，第1页。

数学方法论的系统研究而言,显然又有必要对数学方法论的内容、性质和意义作出进一步的分析。在此,我想谈谈我对这个问题的看法。

一、数学方法与数学模型方法

数学方法论,笼统地说,即是关于数学方法的理论。然而,这里显然又存在着这样的问题:什么是所说的“数学方法”?

就上述问题而言,有的学者曾表达过这样的意见:数学方法不仅指数学的研究方法(包括思想方法),而且也应当包括数学的学习方法和教学方法;另外,在科学方法论的有关论著中,我们则又可以看到关于“数学方法”的如下解释:“把事物的状态、关系和过程用数学语言表达出来,进行推导、演算和分析,以形成对问题的解释、判断和预言”。^①就上述两种观点而言,笔者以为,前者过分地扩大了数学方法论的范围。事实上,现今中国数学教学界较为一致的意见是:数学学习与数学教学分别属于数学学习论与数学教学论的范围,而这两者则又与数学方法论及数学课程论等一起构成了数学教育学的主要内容。另外,科学方法论中所谓的“数学方法”主要是指应用数学去解决实际问题,由于其中的关键在于构造出相应的数学模型,因此,这种方法就可特称为“数学模型方法”。数学模型方法应当被看成数学方法论的一个重要内容,但是,数学方法论的研究则又远远超出了数学模型方法的范围,特别是集中在数学内在的研究方法之上。

^① 孙小礼:《数学·科学·哲学》,光明日报出版社,1988年,第200页。

二、证明的方法与发现的方法

就数学内在的研究方法而言，按照现代科学哲学的传统，对此又可作出“证明的方法”与“发现（发明与创造）的方法”的区分。如众所知，数学具有自己特殊的证明方法，而这又是与所谓的公理化方法直接相联系的，从而，关于数学证明与公理化方法的研究就构成了数学方法论的一个重要内容。

那么，我们又应当怎样来看待数学中的发现（发明与创造）方法呢？这事实上就涉及到了现代数学方法论研究的一个关键问题。具体地说，在人类历史发展中曾有这样一个时期，其间人们曾希望能找到这样一种方法，用之即可有效地解决一切问题。例如，笛卡儿就曾提出过所谓的“万能方法”：第一，把任何问题转化为数学问题；第二，把任何数学问题转化为代数问题；第三，把任何代数问题归结为解方程。另外，莱布尼兹在1666年出版的《论组合术》一书中则提出了这样的思想：所谓发现，就是找出概念的可能的组合，也即“对给定的主词去建立一切可能的谓词，对给定的谓词去建立一切可能的主词”；进而，如果我们能建立这样的符号系统，其中即以数表示最简单的项，并以数的乘积表示由相应的项经由组合所得出的较为复杂的项，那么，在这样的系统中，只要弄清了各个主词的表示数，我们就可通过简单的计算求得它的各个因数，它们所代表的就是这一主词的一切可能的谓词，这样，发现的问题也就较为彻底地得到了解决。

从现在的观点看，上述对于“万能的发现方法”的追求显然是过于简单了。即如并不存在可以把万物点化为黄金的“哲人之石”，能有效地解决一切问题或从事数学发现的“万能方法”也是不存在的。然而，就数学方法论（更为一般地说，就是科学方法

论)的研究而言,人们却又因此由一个极端走向了另一个极端,即认为根本不存在任何关于发现的方法。

从历史的角度看,后一种观念是与逻辑实证主义的“科学观”直接相联系的;逻辑实证主义者明确地指出了“证明(检验)的方法”与“发现的方法”的区分,并认为科学方法论的研究仅限于证明(检验)的方法的范围,而发现的问题则完全属于心理学的范围,对此不可能作出任何理性的或逻辑的分析,从而也就根本不存在任何真正意义上的“发现的方法”。

由于逻辑实证主义在西方学术界中曾长期占据主导地位,因此,关于数学(科学)发现方法的研究就一度陷入了停顿状态。

三、数学启发法的现代复兴

正是在上述的“严峻”形势下,美籍匈牙利数学家波利亚(G. Polya)自觉地承担了“复兴”数学启发法的重任——按照波利亚的解释,所谓启发法即指关于“发现和发明的方法和规律”的研究。波利亚在这一问题上的基本立场是:所谓的“万能方法”是不存在的,但是,“各种各样的规则还是有的,诸如行为准则、格言、指南,等等。这些都还是有用的。”^①特别是,我们可以,而且应当由已有的成功实践去总结出一般的方法或模式,这些方法和模式,在以后类似的情况下,就可起到启发与指导的作用。这样,在上述的两极对立之间,波利亚事实上就开拓了第三种可能性,即我们可以、而且应当去从事对新的研究工作具有启发与指导意义的一般方法或模式的研究。

波利亚是围绕“怎样解题”开展自己的启发法研究的。然而,对于波利亚所说的问题必须作广义的理解。这就如同波利亚本人

^① 波利亚:《数学的发现》,内蒙古人民出版社,1980年,第二卷,第136页。

所指出的：“在这种研究中，我们不应忽视任何一类问题，并且应当找出处理各类问题所共有的特征来；我们的目的应当是找出一般特征而与主题无关。”^①事实上，在波利亚看来，解决问题即是一项基本的人类行为。他写道：“我们大部分有意识的思维都和问题有关。当我们并未沉溺于娱乐或白日做梦时，我们的思想是有方向和有目的的：我们寻找方法，我们试图解决一个问题。”^②另外，就启发法的研究而言，波利亚指出：“现代启发法力求了解解题过程，特别是解题过程中典型有用的智力活动。”^③波利亚并突出地强调了数学启发法的“常识性”及其普遍意义。例如，波利亚指出，这里提出的方法“对于那些认真对待其问题并有某些常识的人来说是很自然的”。另外，波利亚又曾指出，数学启发法的用途“不限于任何题目。我们的问题可以是代数的或几何的，数学的或非数学的，理论的或实际的，……”^④由此可见，波利亚所谓的方法或模式，就是一些十分一般的思想方法或思维模式，尽管它们并不是数学家在自己的研究活动中所必须遵循的规范或准则，但却仍然可以给人以一定的启示和帮助。

对于波利亚的启发法研究应当给予高度的评价。事实上，由上面的讨论可以看出，正是波利亚的工作为数学方法论研究的现代复兴提供了必要的理论基础，并在很大程度上决定了这种研究的性质，即这主要是一种启发性的研究；另外，也就是由于波利亚的工作，“怎样解题”已经成为现代数学方法论研究的一个重要内容。

在波利亚以后，有不少新的研究工作可以看成对于波利亚数学启发法的直接继承和发展。例如，由拉卡托斯 (I. Lakatos) 所倡导的“数学发现的逻辑”以及由徐利治教授所提出的“关系映

①、②、③、④ 波利亚：《怎样解题》，科学出版社，1982年，第130、221—222、130页。

射反演方法 (RMI 方法)”就是对于数学启发法的重要发展。

四、数学抽象的定性分析与定量分析

数学研究究竟是一种发现的活动、还是一种发明的活动？这是在数学方法论的讨论中经常可以听到的一个问题。(与此直接相关的还有以下的问题：数学究竟是一门科学、还是一门艺术？) 坚持“发明说”的人指出，由于数学对象（如 1、2、3，点、线、面等）并非客观世界中的真实存在，而只是抽象思维的产物，因此，这也就从根本上决定了数学研究活动的创造性。与此相反，主张“发现说”的人则往往突出地强调了数学研究的客观性：由于我们并不能任意地创造数学规律，而只能按照数学对象的“本来面貌”去对此进行研究，因此，数学研究就是一种发现的活动。

对上述两种观点进行综合分析，容易看出它们都具有一定的合理成分，从而我们在此似乎就陷入了某种“两难”的处境；然而，由数学抽象的深入分析可以看出，正是数学对象的明确定义造成了其由“主观创造”向“客观实在”的实际转化，因此，重要的问题就不在于如何在“发现说”与“发明说”之间作出选择，而应努力对数学抽象的问题作出透彻的分析。

通过数学哲学与数学方法研究的密切结合，我国学者对数学抽象的问题进行了独立的深入研究，并取得了一些有意义的成果。这首先是关于数学抽象的定性分析，并由此而引出了关于数学抽象的若干方法论原则。例如，徐利治教授及其合作者明确提出了“强抽象”与“弱抽象”的概念，并指明了相应的方法论原则：“关系定性特征化原则”与“特性分离一般化原则”；另外，关于“悖向思维”及其方法论原则的讨论事实上就是对于数学思维“自由性”的直接肯定。其次，所谓的“抽象度分析法”则可看成关于数学抽象的定量分析：能够具体地测定各个“抽象物”的抽象

度、入度、出度及抽象难度，并作出必要的综合分析，我们即可清楚地揭示具有丰富内涵的数学理论的内在结构。

由于数学的研究活动和教学活动主要地都是在抽象的层次上进行的，因此，关于数学抽象的深入分析也就应当被看成数学方法论研究的一个重要内容。

五、数学研究中的非逻辑成分

所谓数学研究中的非逻辑成分，在此是指审美感、直觉及形象思维等。就这些成分的研究而言，法国数学家、物理学家庞加莱（H. Poincare）的有关论述是特别重要的。对此阿达玛（J. Hadamard）在《数学领域中的发明心理学》一书中曾经指出：“关于发明所需要的条件，已被近 50 年来最伟大的天才人物所阐明，他的名字为科学界所熟知，而且整个近代数学都在随着他的脉搏跳动。此人就是亨利·庞加莱。……他在巴黎心理学学会上的著名的庆贺讲演，……给意识和无意识的关系、逻辑和因果的关系等基本问题投射了一束灿烂的光辉。”^①

一般地说，庞加莱在这一问题上的论述其基本意义就在于深入地揭示了数学发明的本质及其与美感和直觉的关系。尽管庞加莱主要是从发明心理学的角度进行阐述的，但是他的论述仍然有着重要的方法论意义。另外，就数学方法论的研究而言，以下的问题显然是更为重要的：在数学研究中我们能否更自觉地去运用审美直觉并总结出相应的方法论原则？我们又应如何去培养或提高数学的直觉能力？围绕上述的问题，我国学者近年来作出了一些有意义的工作，即如关于数学美的客观内容的分析等。尽管这些研究从整体上说仍然是一些初步的工作，但是，由已有的工作

^①《数学领域中的发明心理学》，江苏教育出版社，1989年，第11—12页。

已经可以看出, 数学研究中的非逻辑成分的确应当被看成数学方法论、特别是关于数学发明创造的研究的一个重要内容。

六、数学活动论与数学文化论

对于数学方法论可以从各种不同的角度以及不同的理论高度去进行研究。例如, 前而所提及的一些内容, 如波利亚的数学启发法, 数学抽象的定性分析与定量分析, 以及关于数学创造中的非逻辑成分的研究等, 就都具有各自不同的研究重点。另外, 近年来出现的数学活动论与数学文化论就可以看成从更高的理论层次去进行分析的结果。

所谓数学活动论, 笼统地说, 即是指把数学看成是一种由“语言”、“问题”、“方法”、“命题”及“数学传统”等多种成分组成的复合体。由于这种观点事实上即是把研究的着眼点由数学活动的最终成果扩展到整个活动, 因此, 与那种把数学简单地等同于所接受的命题(定理)和理论的观点相比, 数学活动论就提供了关于数学的一种更为深入和全面的理解。也正因为此, 数学活动论就有着重要的方法论意义。例如, 数学活动论的分析表明, 在现代文明社会中, 各个数学家都是作为“数学共同体”的一员从事自己的研究活动的, 从而也就必然地处于一定的“数学传统”之中, 由此, 从数学活动论的角度去进行分析, 我们就应注意对数学传统的自觉继承和发展, 而这事实上也就包括了数学方法论方面的学习与创新。

所谓数学文化论, 则是指把数学看成是一个由于其内在力量与外部力量的共同作用而处于不断发展与进化之中的文化系统。由于数学文化论仅仅着眼于决定数学发展的各种宏观因素, 并希望能通过历史的考察揭示出数学发展的规律, 因此, 与那种集中于数学的思想方法或数学创造的启发性法则的研究相比, 数学文

化论的研究就达到了更高的理论高度。

至此我们就可以更为明确地提出“微观的数学方法论”与“宏观的数学方法论”的区分：微观的数学方法论主要着眼于数学工作者个人的研究活动，即集中在数学的思想方法及数学发明创造的启发性法则的研究上；宏观的数学方法论则希望通过历史的考察揭示出数学发展的动力与规律。显然，按照这样的区分，数学文化论即就属于宏观的数学方法论的范围。

七、数学方法论的意义

对于数学方法论的意义，我们也可从各种不同的角度或不同的理论高度去进行分析。例如，对于数学发展规律的明确认识显然就可帮助我们努力去创造有利于数学发展的良好环境。另外，就微观的数学方法论而言，我们则又可以从数学研究、数学教学与数学学习这样几个角度去进行分析。

第一、对数学的研究工作来说，数学方法论并不能告诉我们的研究工作者在各个具体的场合应当采用什么样的方法；它的基本意义在于它能促进由对合理方法的天才的、不自觉的运用向有意识的、自觉的应用的转化。即如波利亚所作的那样，我们在此也可转引波尔查诺(B. Bolzano)关于启发法的以下论述：“我根本不认为我在这里能够提出任何早先未曾为所有具有才能的人所察看出的研究过程，并且我也根本不想允诺你们可以从我这里发现这方面的很新颖的任何内容。但是，我将煞费苦心地用清晰的词句来说明所有有才能的人所遵循的研究规则与方法，这些有才能的人在大多数情况下，甚至不知道他们自己是遵循这些规则与方法的。虽然，即使正在做这件事的时候，我也不敢幻想我将会完全成功，但我仍然希望这里所提出的一孔之见会博得某些知音