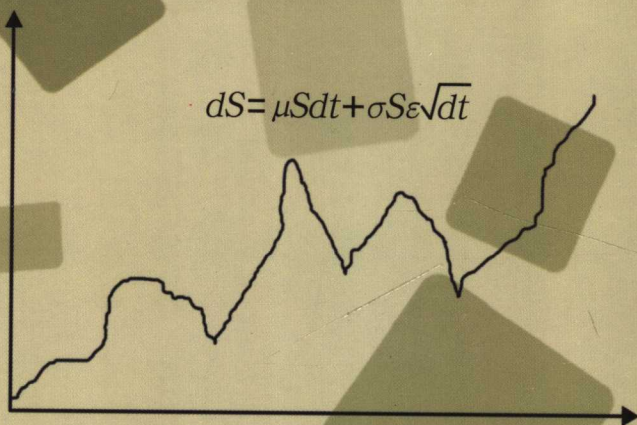



# 数理金融分析

——基础原理与方法

SHULI JINRONG FENXI

张永林 著



 经济科学出版社

# 数理金融分析

—— 原理、模型与方法

作者：[作者姓名]



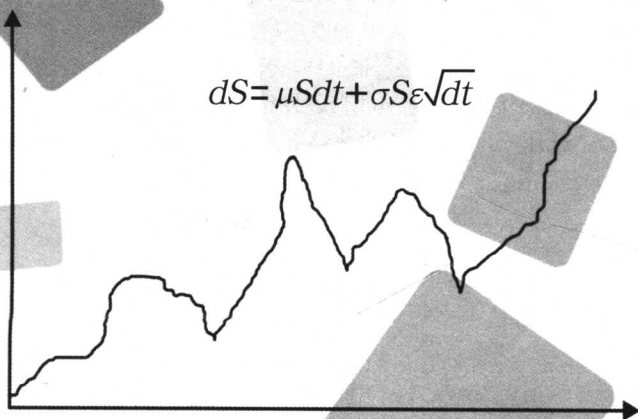
清华大学出版社


# 数理金融分析

——基础原理与方法

HULI JINRONG FENXI

张永林 著



 经济科学出版社

## 图书在版编目 (CIP) 数据

数理金融分析：基础原理与方法 / 张永林著. —北京：  
经济科学出版社，2007. 2

ISBN 978 - 7 - 5058 - 6047 - 6

I. 数… II. 张… III. 金融学：数理经济学—数学分析  
IV. F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 006536 号

责任编辑：卢元孝 王蜀伟

责任校对：王肖楠

版式设计：徐翠荣

技术编辑：潘泽新

### 数理金融分析

——基础原理与方法

张永林 著

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址：北京海淀区阜成路甲 28 号 邮编：100036

总编室电话：88191217 发行部电话：88191540

网址：[www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮件：[esp@esp. com. cn](mailto:esp@esp.com.cn)

天宇星印刷厂印刷

华丰装订厂装订

880×1230 32 开 9.75 印张 250000 字

2007 年 2 月第一版 2007 年 2 月第一次印刷

印数：0001—4000 册

ISBN 978 - 7 - 5058 - 6047 - 6 / F · 5308 定价：18.00 元

(图书出现印装问题，本社负责调换)

(版权所有 翻印必究)

## 内 容 简 介

本书是数理金融学的基础性著作，内容涵盖了现代货币金融理论，消费（包括家庭理财）与投资（包括公司理财）理论，金融市场与资产组合理论，各种资产（期货、证券、期权和债券）的定价理论，金融风险理论，现代金融学研究的方法和模型以及金融实务的数学分析方法，等等。

本书可供高等院校经济、管理和应用数学专业师生使用，尤其适合本科高年级和研究生一年级学生使用。本书也是经济和金融专业从业人员的业务参考书。

本书每章末思考题的答案可以在网上查阅，网址：[www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)。

# 前 言

## 1. 现代金融学研究的方法

时间和不确定性是影响金融行为的核心要素。金融学的根本任务,是解决在不确定环境下,如何在时间上(现在和未来;短期和长期;单时期和多时期;静态和动态)最优配置资源,以及分析经济组织(家庭和个人;厂商和公司;金融中介和市场)在配置中的作用。现代金融学从范围上来说要研究和解决四个方面的问题<sup>①</sup>:市场效率分析(包括市场结构理论);收益和风险分析(包括各种定价理论);金融中介分析;家庭和企业(公司)金融分析(也被称作金融组织理论)。罗伯特·C·莫顿认为,现代金融学的研究范围包括公司和家庭理财、金融中介、资本市场和投资理论。这二者没有实质的区别。数理金融学(Mathematical Finance)一方面是现代数学和计算科学在这些领域中的运用,一方面是多学科结合而形成的交叉学科。

现在,数理分析和计量分析已经不再只被当作方法论来掌握和运用,更被作为经济和金融的技术去研究、创新和发展<sup>②</sup>。其典型代表是保险精算,各种市场分析软件、金融价格计算软件和企业财务管理软件。它们现在都是金融高技术。保险精算师和金

---

① 《新帕尔格雷夫经济学大辞典》第二卷,经济科学出版社1996年版,第345页。

② 这方面的工作请见: Marek Capinski and Tomasz Zastawniak, *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*, Springer, 2003.

融分析师拥有的是金融技术。特别是，在现代经济高度发达的金融市场上，不再只是一般金融资产的交易，而是金融产品的供给和需求。金融中介机构所提供的不再是传统意义上的服务，而是生产金融工具和衍生产品。金融中介生产理论<sup>①</sup>研究了这些生产的成本与收益。金融产品的生产和金融工具的创新，依靠的不是方法而是技术。金融工程就是研究这些金融产品生产的高端技术。这些金融高技术今天不仅成了当代西方经济和金融研究的制高点，更是成为西方金融管理者的专利。在今天经济全球化的时代，金融市场、金融业和金融技术的发展水平是一个国家经济发展水平的标志。

今天，人们已经认识到了我们国家在金融研究、金融管理和金融服务方面的落后现状，好在青年学子们是追求新知识和科学真理的生力军，代表着希望和未来。现在，金融数学类的课程和书籍受到普遍欢迎。从事金融业的人士也广泛运用数理和计量的思维方法和分析技术去解决市场交易问题。

数理金融学是一门新兴的交叉学科，是目前非常活跃和快速发展的前沿学科。1900年法国巴黎大学文理学院的博士研究生路易斯·巴舍利耶写了《投机理论》一文，用概率论方法研究了期权问题。结果这篇比爱因斯坦相对论还早5年的开天之作却在半个多世纪里默默无闻。然而在不到10年的时间里（1990～1997年），诺贝尔经济学奖竟两次授予了马科维茨、夏普和米勒，莫顿和斯科尔斯。他们都是巴舍利耶的学生。因此莫顿满怀敬意地指出：从巴舍利耶到现代连续时间金融之间的联系是直接的，不容置疑的。

20世纪60年代，金融研究中的基本模型还只是以马科维茨和托宾的均值—方差分析，以及夏普—林特纳—莫辛的资本资产定价分析为主。这些模型也仅仅是一般均衡分析框架下最优化理

<sup>①</sup> 见罗伯特·C·莫顿：《连续时间金融学》，中国人民大学出版社2005年版。

论的运用而已，而到了布莱克和斯科尔斯的期权定价公式，就把自然科学中的维纳—布朗过程和随机扩散方程都用上了。在最近的 20 多年中，非线性分析和扩散理论在金融风险和市场波动的研究方面更是大展宏图。以非线性分析为主体的现代计量金融学已经成型。基于一般均衡体系的优化分析、基于维纳—布朗运动的随机过程分析（现在也被称为非均衡分析，但还不成熟）和基于时间序列概念的计量分析，是现代金融学的主流研究方法。

人们常说，在科学研究中，优美的并不一定实用（尤其是对数学往往有这种偏见），而实用的也不一定优美。但是，在现代金融研究中，实用和优美达到了和谐与统一。

## 2. 数学与现代金融学

今天，金融学已经成为一门高度分析性的学科，数学和计算科学是必备的条件（莫顿和萨缪尔森语）。金融数学和金融工程已经交叉在一起，数量方法和分析技术在金融中的普遍使用使得数学和金融密不可分。因此，我们这里先向读者特别推荐目前这方面比较权威性的三本新书：（1）Robert James Elliott, P. Ekkebard Kopp, *Mathematics of Financial Markets*, Springer, 1998。（2）Marek Capinski and Tomasz Zastawniak, *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*, Springer, 2003。（3）Ales Cerny, *Mathematical Techniques in Finance*, Princeton, 2004。

至今，新古典一般均衡体系仍然是经济学的主流方法。当然，新古典一般均衡体系也是现代金融学的研究基础。虽然今天博弈论的地位日益提高，但它似乎是在完善着新古典经济学的一般均衡分析，真正有别于新古典方法论的是基于维纳—布朗运动的随机过程分析和基于时间序列概念的计量分析。资本资产定价模型和研究家庭理财的消费—投资模型都是运用新古典一般均衡分析。以期权定价为代表的资产定价分析，尤其是在未定权



益（现在有一个趋势就是，把债券等也纳入了未定权益的范畴，所以，未定权益是个广义的资产概念）的价值分析中，传统的新古典一般均衡分析已经力不从心，然而，随机过程分析却能得心应手，游刃有余。在经济学中，随机过程分析和时间序列分析目前也只是在有关动态经济增长的研究中使用，而在现代金融学的研究中，它们二者却几乎到处都是领跑的先行者。以至于让人们感到，今天金融学的研究和发展已经走到了经济学的前边。至少在方法论上存在这个事实。

从数学方法来说，维纳—布朗运动的随机过程属于应用数学，扩散理论以及分型理论都属于非线性分析数学。这些现代数学的知识在物理和化学等自然科学的研究中目前也并不比在金融研究中领先。像泛函分析、拓扑学、时间序列分析和随机微分方程这些基础数学和应用数学现在已经是金融风险研究、资本市场理论和市场波动分析的主导工具。这绝不是金融学家们在炫耀自己。在真正自由和竞争的社会，形式主义、空论和说教是没有市场的。

数理分析方法和工具不是只为了追求形式的严谨和精确，以及论证上的严格和有力，而是为了揭示深刻机理和本质，是因果关系的科学研究。我们仅以均值—方差分析方法为例。它把传统的消费—投资组合（以物品和财富为变量的冯·诺依曼—摩根斯顿效用函数）最优化分析转化为最小方差组合分析，后者不仅把风险纳入了内生模型，更有价值的是它们可以通过线性规划方法把不确定市场上的风险资产组合实际解出来（见 6.3 内容）。在经济学和金融学中，只要能在理论上把传统的外生变量转化为内生分析，这就是个非常了不起的贡献，更不用说再把这些由外生变量构成的最优组合实际求解出来了。

20 世纪 80 年代，传统金融学者无论从理论上还是在实践中，只是认识到金融中介起着家庭和厂商代理人的作用，提供包

括资金转账等在内的交易服务<sup>①</sup>。但是到了 90 年代，随着现代金融业的发展，金融学家们发现，金融中介机构和企业一样，也向投资者发行证券来筹措运营资本。但是，它们又与企业 and 公司不同，中介机构仅仅持有金融资产，更重要的是它们在出售金融产品的同时也创造了新的债务。由此导致了公司债务定价和未定权益分析这个非常热门的研究方向的迅速兴起，而基于维纳—布朗运动的随机过程分析则是这个研究方向的主要方法和工具（本书第 5 章附录 5 有专门介绍）。

当一个理论被写入教材的时候，这个研究方向及其内容就已经被人们确认并且成熟。现在，基于未定权益分析的金融中介生产理论已经进入高等学校的教学课程。

如果说像家庭和企业这些经济主体的选择还不难联想到数学模型分析的话，那么，把金融中介也进行数学模型分析则是相当困难的工作，而且恰恰是现代数学分析使得全新的金融中介理论得以确立。这不能不说数学方法和分析技术如今已经无孔不入，它们主导了现代金融学的所有研究领域。

### 3. 数理金融学的发展与展望

(1) 现代金融学，从 20 世纪 50 年代到 70 年代是新古典理论体系的发展和成熟期，其代表是托宾、莫迪利亚尼、马科维茨和夏普的资产组合理论及其资产定价分析。从 70 年代到 80 年代，主要是以 Black-Scholes 公式为代表的衍生资产定价理论发展阶段。80 年代以后，重点则进入了金融市场、金融创新和金融中介的研究，其中以金融中介创新为代表。如果人们注意考察和分析就会发现，这是非常明显不同的三个发展阶段。资产组合理论是把经济学的一般均衡分析运用到金融研究中，运用均值—

---

<sup>①</sup> 《新帕尔格雷夫经济学大辞典》第二卷，经济科学出版社 1996 年版，第 364 页。

方差模型把风险和不确定性处理为内生变量，从而解决了不同资产之间的收益与风险问题。期权等衍生资产定价理论是在不要求市场出清的情况下，运用维纳—布朗运动模型解决了各种衍生资产的定价问题。这两个阶段的金融研究都没有考虑金融市场的成本和中介行为。现在，金融市场的交易成本、金融产品创新和中介服务是研究的重点。其中，金融中介是研究的核心，因为金融工具的创新和市场交易都要通过中介活动来完成。

现代的研究发现，金融中介不只是一般的交易服务，还是金融产品的生产机构。金融中介的这些经济性活动不能用传统的企业生产理论来研究，它们的成本与收益不同于厂商的分析，因此，这就给现代金融学提出了巨大挑战。这也理所当然地成为数理金融学的现代使命和责任。

(2) 均值—方差分析中的线性相关原理有三个基本点，即市场一般均衡、大概率事件和资产相关性。尽管通过大数定律和中心极限定理，采用均值的做法把风险分散了（比较高深一些的研究把它们称之为著名的鞅方法），其实，这是合理而不合现实的研究。且不说市场一般均衡假设在现实中难以满足，就是大概率事件这一点也让风险和不确定性在投资中的影响大煞风景。因为风险和不确定性恰恰是由独立事件和少数特殊情况造成的。极端事件才是真正金融学意义上的不确定性和风险（见 2.4 和 2.5）。统计与非线性分析就是针对小概率事件和极端事件来对症下药。有关金融风险的研究价值不必赘述，现在，这方面的前沿性工作都要运用统计方法和非线性分析。

(3) 新古典一般均衡理论是相对价值论，即市场上任何资源和商品的价格都是相对决定和变化的。这个原理有三个等价的数理表达：存在唯一的价格向量使超额需求函数为零；需求方程存在唯一的超平面；市场上任意两种商品的价格线性相关。金融学尤其吸收了最后一种。资产组合和资产定价都是指相关的不同资产，而且它们的价值最终都存在线性关系。这就忽略了没有相关

性的投资问题。不相关资产的风险和收益分析是现代金融学的难点内容。特别是，由于不相关性和非线性是导致不确定性与市场波动的内因，而它们又不能运用传统的均衡分析进行研究和解决，于是，扩散方程和分形理论等非线性分析就派上了用场，有了用武之地。

(4) 以托宾、马科维茨和夏普为代表的资产定价理论，其基础是新古典一般均衡体系，着眼点是家庭和个人的消费与投资，采取的方法是传统最优化模型。以卢辛格、布莱克、斯科尔斯和莫顿为代表的期权定价理论，其着眼点是金融市场和金融资产，采用的模型方法是维纳—布朗随机过程。如果仔细考察就会发现，古典的金融学和传统的新古典一般均衡理论都一直把不确定性和风险当作外生因素，而以资产定价理论为核心的新古典金融学把它们纳入了均衡分析模型，当作内生变量来处理。这既是对传统金融学的创新，也是对新古典理论的重大发展。期权和套利定价理论在不要求市场出清的条件下，没有通过均衡分析，而是用随机过程的维纳—布朗运动方程把不确定性和风险纳入了定价公式，开辟了现代金融研究的新路。这两种代表性的金融研究有一个共同点就是，它们都把金融中介和市场当作了外生存在的和无成本的服务。

罗斯 (Ross, 1976 和 1983)、米勒 (Miller, 1978)、布里登 (Breedon, 1978) 和杜马 (Dumas, 1991) 等提出并研究了未定权益定价理论和金融中介生产学说。这两项既独立又联系的工作，其艰巨性和困难性可想而知。前者的首要任务是想统一股票、期权和债券等金融证券资产，建立广义的未定权益定价理论，同时，也为金融中介生产理论提供基础。后者的目的是，把现代金融中介的功能、性质和作用，从传统的产品识别、交易服务和风险管理等方面的制度性活动创新为生产衍生证券的经济性活动。为此他们提出了零交易成本的金融中介生产理论，首先突破衍生证券的生产成本这一关。在这些工作中，像随机过程和非

线性分析是不可缺少的，维纳—布朗方程和随机微积分仍然是主力军。

如果未定权益分析和金融中介生产学说的结合取得成功，不仅人们对金融中介和金融市场的传统认识要发生重大转变，也可能导致金融学的大变革。

(5) 新古典经济学借鉴自然科学能量守恒规律和物理学作用力平衡原理，建立了边际分析和一般均衡体系。现代金融学又借鉴物理热动力学和化学动力学中的布朗运动，以及自然科学中的维纳过程建立了期权定价理论和模型。这确实是自然科学给经济学和金融学的启迪。

现在，数理金融学、金融工程学和金融计量学这三个学科都刚刚兴起，尽管很不成熟，但却方兴未艾，因为它们是现代金融研究的高新技术。

#### 4. 本书的框架结构

本书内容涵盖了现代货币金融理论，消费（包括家庭理财）与投资（包括公司理财）理论，金融市场与资产组合理论，各种资产（期货、证券、期权和债券）的定价理论，金融风险理论，现代金融研究的方法和模型，以及金融实务的数学分析方法，等等。其框架是：

(1) 金融理论的核心，是研究在不确定的未来的环境中，如何在时间上有效地配置家庭和经济组织的资源。本书第1章的内容是数理金融学与金融学的基础和经典分析。

新古典经济学的传统做法是把家庭、偏好和财富作为金融研究的外生因素。但是，这些因素在经济组织的金融分析中却可以是内生因素，因此，这就使家庭的最优理财行为成为研究金融经济体系的自然切入点。家庭既是消费者，又是投资者。家庭的这些金融行为体现了他们的双重性：作为消费者，家庭可以把财富和收入在消费、储蓄和其它需要之间进行分配；作为投资者，家

庭可以在未来收入的现在投资机会中做出选择。在这两种不同性质的决策中，各项内容都是相互关联的，最优的消费储蓄比例和最优的投资组合彼此影响。特别是包括了含有概率分布的多种资产以后所得到的家庭最优消费—投资组合方程——即欧拉方程，与莫迪利亚尼和弗里德曼生命周期理论（见 1.6）；与马科维茨和托宾的均值—方差原理（见 1.4），都具有相同的结构。尤其是把模型扩展为动态分析以后所得到的家庭资产需求方程（见 1.2）和最优消费—投资组合原理为资本资产定价分析奠定了基础（见 1.5）。

(2) 在完成了对家庭最优投资行为的基本讨论之后，本书在第 2 章转向金融资本市场和现代金融工具的讨论与介绍。其中包括了金融风险、资产组合和市场效率这些基本方面的数理金融分析问题。这章内容是新古典分析为现代金融研究的奠基。

金融经济学的一般均衡研究和阿罗—德布罗完全证券市场模型是现代金融学的理论基础。如果没有对这些理论的深刻理解，起码有两个基本方面的金融问题难以清楚：金融中介的作用实质和金融市场结构效率性的特殊内涵。如果对这两个方面的基本问题不搞清楚，那么，对金融资产的概念及其价值的含义也吃不透（见 2.3）。正是因为现实的金融市场不满足阿罗—德布罗完全证券市场模型的假设，才使金融中介得以存在。金融中介是交易成本最低的服务者，金融资产是减少市场摩擦、传递经济信息和集中市场规模的未定权益。也正是因为实际的金融市场不具备完全竞争的一般均衡条件，才使有效性市场假说和套利原理具有了特殊的重要意义（见 2.7 和附录 2）。

在现代金融市场的理论中，资产概念的广义性含义不仅为金融资产的各种价值研究奠定了基础，也为金融工具的创新提供了理论支持。因为以衍生证券为代表的金融工具才真正把风险内生了。金融市场的一般均衡状态是对广义资产的收益和价格而言的。金融中介组织开发的金融产品有效地集中了市场信息，累计

和吸收了个人风险资本，通过资产多样性而规避了风险（见 2.4 和 2.5）。

(3) 有了对金融市场的宏观把握和基本问题的系统了解，接下来就要进入现代金融学和数理金融研究的中心部分：资产定价分析。

资本市场的运营和资本资产的供求定价，是数理金融分析的中心内容。其思想是，使用相近的替代物为金融契约和工具定价。经典的资本资产定价分析，其中心任务是证券价格的线性化，即把资产或资产组合的均衡预期收益和风险度量统一在线性方程中（如附录 3）。这种线性定价原理既是数理金融和应用金融学的基本方法，也是实证计量金融分析的重要基础。本书第 3 章所讨论的资本资产定价模型是现代金融市场一般均衡关系的具体描述，即：市场的消费需求和投资需求是线性相关的；风险资产和无风险投资是线性相关的；投资预期收益和风险度量是线性相关的。这些线性相关性的数理语言就是所谓的超平面。

资本资产定价模型的深刻意义在于，它们从微观层面揭示了各种资产之间的均衡关系和资本市场上资产需求的内在机理，为研究风险和收益这个最基本的金融问题奠定了思想原理和方法基础。通过均值—方差分析方法把不确定性和风险与资产收益统一在一个线性方程中，这是资本资产定价理论对现代金融学的突破性发展和里程碑性的贡献（见 3.2 和 3.4，也有人称为金融学的第一次革命）。

(4) 期权等衍生资产或衍生证券的价值分析是现代金融学的重点和难点，当然也是中心内容。本书浓墨重彩地讨论了这部分内容。

本书第 4 章的期权定价和套利定价从广义上也是研究资产定价（目前国内著述的数理金融都是围绕着资产定价模型），但是，它们有自己的独特之处。基于维纳—布朗随机过程的期权定价模型已经为现代金融学的研究开辟了另一条道路（有人称为是金融

学的第二次革命)。

以 Black-Scholes 公式为标志的资产定价理论预示着现代金融研究的非均衡(注意,本书所谓非均衡是指市场非出清)分析体系逐渐成形。期权研究中的统计与非线性分析,金融市场分形理论与混沌理论,资产定价的随机过程分析,这三者一起奏响了现代金融学的非均衡分析进行曲。

维纳—布朗运动的随机过程分析源自物理热动力学和化学动力学,目前,它被广泛用于动态经济增长和现代金融研究中。由于维纳—布朗运动具有每一个结果都独立于它前面的结果,能够以数据统计来进行预测,并且概率结果可以进行计算等特征,而这些特征与期权等未定权益资产的价格动态变化相符,因此,它被用来解决动态资产价值问题。给定任一股票价格,不必知道股票的预期收益,就可以计算出期权的价格;依据当前观测到的股票价格,人们对股票的预期收益可能会持有异议,但对期权价格的判断则一致。这就是 Black-Scholes 期权定价公式的本质含义。这个含义超越并突破了传统思维。因为,依据期权的定义它们是一种金融合约,即衍生资产,因此它们的价值与标的资产价值和收益应该是相关的。然而,在 Black-Scholes 期权定价公式中就是没有股票的预期收益。

以 Black-Scholes 期权定价理论为代表的现代非均衡分析打破了因果论的思维方式。不确定性、不相关性和极端独立事件其实是不存在显示的因果关系。

第4章从期权研究切入,引出了套利理论。套利是资产价值和期权价值不存在线性关系,而无套利则是线性关系成立(见4.6)。无套利的市场有效性理论是完备市场一般均衡理论的替代。

市场有效性理论翻译成最通俗的语言就是:投资者所知道的价格是一个接近市场认为是公平的价格;具有不同财富的投资者都能够彼此有效自愿地交易;当资本市场的供求发生不平衡时,



投资者不会恐慌和混乱。

本书介绍的 APT 模型还是新古典经济学的工作。现在，基于拓扑学的分形理论和非线性分析正在引领着资本市场流动性和分割性理论的研究。

(5) 第 5 章以利率这个金融分析的最基本变量为主线，通过利率期限结构理论讨论了债券定价模型和价格计算方法，然后介绍统一证券和衍生资产的未定权益理论。其中，未定权益定价与金融中介理论是现代前沿性工作。

未定权益分析 (Contingent-Claims Analysis, 简称 CCA), 动态投资分析, 和布莱克—斯科尔斯 (Black-Scholes) 期权定价理论, 这三者形成了现代金融学的分析基础。特别是, 未定权益分析把公司理财和金融中介这些金融实务也纳入了研究模型, 通过公司资本结构和利率期限结构理论研究企业的利率风险、债务结构和企业的市场价值 (见附录 5)。另外, 未定权益定价模型提供了衍生证券等未定权益产品存在的新原因, 并且确定了金融中介机构供给这些衍生金融工具的成本。这对于现代金融的发展太有意义了。因为金融中介不仅一直是金融学的四大方面内容之一, 而且更是现代金融研究要解决的重点和难点。以未定权益分析为基础的金融中介生产理论发现并且提出, 现代的金融市场不只是一般的金融交易和服务, 还有衍生产品和金融工具的需求与供给; 金融中介组织不只是提供交易服务, 还生产衍生品和创新金融工具。这不仅转变了人们对传统金融市场和金融中介的认识, 也为金融工程和金融中介的发展提供了理论基础。

20 世纪 50~60 年代, 金融学围绕着资本资产定价这个中心进行研究, 取得了均值一方差分析这样的突破。70 年代前后围绕着期权定价这个中心进行工作, 取得了 Black-Scholes 公式这样的突破。现在, 未定权益定价是个突破口, 维纳—布朗随机过程分析和非线性分析是主要工具。用未定权益分析来统一金融中介、家庭理财和公司资本结构的研究是个雄心勃勃的想法, 但