中算家的代數學研究

許蒓舫著

中國青年出版社

書號253　數理化18　32開本　95千字　186定價類

中算家的代數學研究

著　　者　許　　蒓　　舫

青年·開明聯合組織

出版者　中國青年出版社

北京西總布胡同甲50號

發行者　中國圖書發行公司

印刷者　北京新華印刷廠分廠

印數11,501-16,500　　一九五二年四月第一版

每冊定價5,000元　　一九五二年八月第二版

一九五三年八月第三次印刷

作者的話

代數學在中國的歷史是很悠久的。漢代時，鄭玄解釋周代的'九數'，其中的一種就是方程。關於方程的內容，在魏劉徽重輯的九章算術(公元 263 年)中見到的，是正負數計算和聯立一次方程的解法。這種算法雖不能斷定它起源於周代，但比起印度和歐洲要在第五世紀和十六世紀纔能解決這種問題，要早得多了。

此後，唐王孝通（約 626 年）成立三次方程；宋秦九韶(1244)用'正負開方'解任何高次方程，同六百年後西洋的和渾法類似；宋楊輝(1261)、元朱世傑（約 1300）述二次方程解法多種，並有'以古法演之'的話，可見我們中國的算學家對代數學的研究，是超越西人很遠的。

中國的代數到宋元間而最盛，當時的算家都精於'天元'的算法，朱世傑又推廣而成'四元'，就是高次方程或聯立高次方程應用題的解法。可惜大部分著作都已失傳，因而經元明兩代，竟沒有人知道這些算法。直到清初，梅瑴成在學習西洋代數時，纔發覺中國的天元和西法實在是一樣的。當時認爲代數學的原名有'東來法'的意義，曾有從中國流入西洋的傳說。

除此以外，中算家對級數的研究也很早，六朝時張邱建發明等差級數的算法，宋沈括（十一世紀）的'隙積'、元朱世傑的

‘垛積’‘招差’就是近世的高階等差級數。還有秦九韶用‘大衍求一’解不定方程問題，曾流傳到歐洲，歐美學者稱它做‘中國剩餘定理’；楊輝書中的‘乘方求廉圖’和四百多年後的巴斯加三角形相同，這些也都是很偉大的貢獻。

在這一本小册子裏，把上述的種種作了一個簡略的介紹。青年們讀過以後，可以知道中國的代數學在世界數學史上有着光榮的地位，我們應該繼承着祖先的寶貴遺產，爲建設科學的新中國而繼續努力！

本書取材雖主要是直接採自古書，但也參考近人的著作，像中算史論叢、中國算學史（以上李儼著）、古算考源（錢寶琮著）、中國算學之特色（日本三上義夫著）、數學發達史（張鵬飛著）、數學辭典（趙繚編）等。他山攻錯，得到的幫助很多。特附誌於此，以表謝忱。

許蒓舫 一九五一，一〇

目　　錄

代數的原始形態

一

諸位在初學代數時，熟習了簡易方程式的應用，一定會感覺到非常高興。因爲過去學習算術四則應用問題的解法，曾經喫過許多苦頭，現在有了代數方程式，解起那些算術裏的題目來，可說不費吹灰之力，再也不至於碰壁了。我們看到算術解法完全要用已知數列式計算，代數方程式卻把未知數也列在裏面，前者迂迴曲折，解法千變萬化；後者只要依題直繹成式，解法千篇一律，其間的難易，眞顯着很大的差別哩！

把未知數列在算式裏來解決應用問題，要算中國發明得最早，九章算術的'方程'就是這一種方法。該書雖然把它當作是算術的一部分，其實已經越出了算術的範圍，可說是代數的原始形態。這種方程算法實際同現今代數裏的一次聯立方程式完全類似；其間稍有不同的，古法不用文字來代未知數，僅記每一未知項的係數於一定地位，恰和現今代數中'分離係數法'的略去文字，而以所記係數的次序表出文字的種類一樣。

因爲在方程算法裏必須用到負數，所以九章算術裏已有正負數的計算方法。在西洋數學史裏面談到負數，說是導源於印度，文藝復興前的歐洲數學家，對於負數還不能認識，可見中國對於負數的研究，好算是很早的了。

古書談到方程的，除九章算術外，還有孫子算經和張邱建算經。其中孫子算經的方法與代數聯立方程式的'加減消去法'完全一樣，九章和張邱建兩書則稍有不同。這裏先把正負數的計算作一簡略記述後，再分別把這兩種方法介紹給諸位。

二

正負數的計算，最早見於劉徽註九章算術方程一章第三題中。這裏面只談到正負數的加減而沒有乘除；大概爲了乘法原是累加、除法原是累減，算法已包括在加減裏面的緣故。

九章算術所載的'正負術'，只寥寥三十六個字，不大容易看得懂。現在先把它照抄下來，再逐句加以解釋。

> 同名相除，異名相益，正無入負之，負無入正之。其異名相除，同名相益，正無入正之，負無入負之。

細考術文的意義，前面一半顯然是正負數的減法。'同名相除'就是'求同號二數的差，應該把絕對值相減'，其號遇順減時仍取原號，逆減時則反號，這在原文裏沒有明白指出。'異名相益'就是'求異號二數的差，應該把絕對值相加'，其號與被減數相同，原文也沒有指明。'正無入負之'就是'被減數爲 0，減數爲正，則差爲負'。'負無入正之'就是'被減數爲 0，減數爲負，則差爲正'。

術文的後半段是正負數的加法。'異名相除'的意義是'求異號二數的和，把絕對值相減'，用絕對值大者的號。'同名相

益'是'求同號二數的和，把絕對値相加'，仍用原號。'正無入正之，負無入負之'是'被加數爲 0，加數爲正則和正，加數爲負則和負'。

從上面的解釋看來，古時正負數的計算，同現今代數裏的方法沒有什麼兩樣。

三

九章算術解方程用'直除'的方法，與現今代數聯立方程式的解法略有不同。所謂直除，是從一方程式累減（或累加）另一方程式的意思。下面舉兩個例題，把古代的籌算式同代數的新記法並舉，讀者對照一下就可以明瞭。

【例一】 今有上禾（稻棵）3 秉（一秉即一束），中禾 2 秉，下禾 1 秉，共有實（禾的果實即穀）39 斗。上禾 2 秉，中禾 3 秉，下禾 1 秉，共有實 34 斗。上禾 1 秉，中禾 2 秉，下禾 3 秉，共有實 26 斗。問上中下禾各一秉有實多少？答：上禾 1 秉有實 $9\frac{1}{4}$ 斗，中禾 1 秉有實 $4\frac{1}{4}$ 斗，下禾 1 秉有實 $2\frac{3}{4}$ 斗。（題見九章算術）

列上禾3秉，中禾2秉，下禾1秉，實 39 斗於左行。同法列得中行及右行，如(A)式（古法自右向左依次列三式，今爲便利計，把它對調一下）。

(A)

	左行	中行	右行
上禾秉數	𝍢	𝍡	𝍠
中禾秉數	𝍡	𝍢	𝍡
下禾秉數	𝍠	𝍠	𝍢
共實斗數	𝍫𝍨	𝍫𝍣	𝍪𝍥

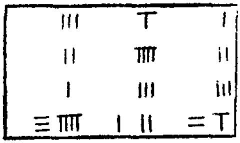
設上禾 1 秉的實爲 x 斗，中禾 1 秉的實爲 y 斗，下禾 1 秉的實爲 z 斗，則依題意列爲聯立方程式如下：

(A)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \cdots\cdots\cdots\cdots (A_1) \\ 2x+3y+z=34 \cdots\cdots\cdots\cdots (A_2) \\ x+2y+3z=26 \cdots\cdots\cdots\cdots (A_3) \end{cases}$$

以左行上禾遍乘中行，如(B)式。

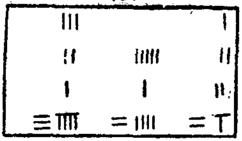
(B)



左行　中行　右行

用直除法從中行累減左行，經二次而頭位減盡，如(C)式。

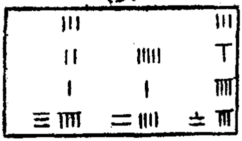
(C)



左行　中行　右行

仿上法以左行上禾遍乘右行，如(D)式。

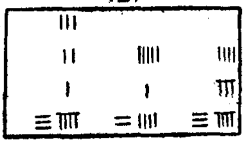
(D)



左行　中行　右行

從右行減左行一次，頭位已盡，如(E)式。

(E)



左行　中行　右行

以(A_1)式首項係數 3 乘(A_2)得

(B)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \cdots\cdots (B_1) \\ 6x+9y+3z=102 \cdots\cdots (B_2) \\ x+2y+3z=26 \cdots\cdots (B_3) \end{cases}$$

從(B_2)減(B_1)二次，得

(C)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \cdots\cdots (C_1) \\ 5y+z=24 \cdots\cdots (C_2) \\ x+2y+3z=26 \cdots\cdots (C_3) \end{cases}$$

又以(C_1)式首項的係數 3 乘(C_3)式，得

(D)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \cdots\cdots (D_1) \\ 5y+z=24 \cdots\cdots (D_2) \\ 3x+6y+9z=78 \cdots\cdots (D_3) \end{cases}$$

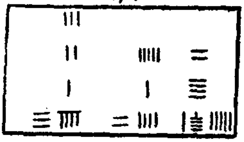
從(D_3)減去(D_1)，得

(E)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \cdots\cdots (E_1) \\ 5y+z=24 \cdots\cdots (E_2) \\ 4y+8z=39 \cdots\cdots (E_3) \end{cases}$$

再以中行中禾遍乘右行，如(F)式。

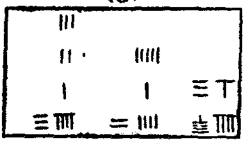
(F)



左行　中行　右行

從右行累減中行，經四次而第二位也盡，如(G)式。

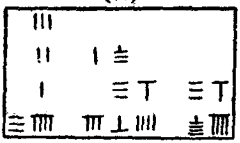
(G)



左行　中行　右行

以右行下禾遍乘中行，如(H)式。

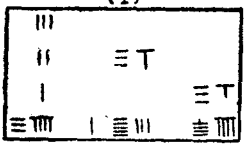
(H)



左行　中行　右行

從中行減右行一次，第三位已盡，以(G)式中行中禾除之，如(I)式。

(I)



左行　中行　右行

再以(E_2)式首項的係數5乘(E_3)式，得

(F)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & \cdots\cdots\cdots(F_1) \\ 5y+z=24 & \cdots\cdots\cdots(F_2) \\ 20y+40z=195 & \cdots\cdots\cdots(F_3) \end{cases}$$

從(F_3)減(F_2)四次，得

(G)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & \cdots\cdots\cdots(G_1) \\ 5y+z=24 & \cdots\cdots\cdots(G_2) \\ 36z=99 & \cdots\cdots\cdots(G_3) \end{cases}$$

以(G_3)式首項的係數36乘(G_2)式，得

(H)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & \cdots\cdots\cdots(H_1) \\ 180y+36z=864 & \cdots\cdots\cdots(H_2) \\ 36z=99 & \cdots\cdots\cdots(H_3) \end{cases}$$

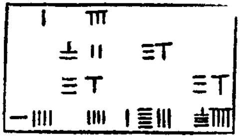
從(H_2)減(H_3)，再以(G_2)首項係數5除，得

(I)

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 & \cdots\cdots\cdots(I_1) \\ 36y=153 & \cdots\cdots\cdots(I_2) \\ 36z=99 & \cdots\cdots\cdots(I_3) \end{cases}$$

以右行下禾遍乘左行，如(J)式。

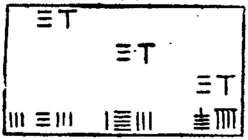
(J)



左行　中行　右行

從左行減右行一次，又累減中行二次，第二、三兩位都盡，以(I)式左行上禾除之，如(K)式。

(K)



左行　中行　右行

三行各以上數爲除數，下數爲被除數，除得商數就是上中下禾各一秉的斗數。

以(I_3)式首項的係數36乘(I_1)式，得

(J)

$$\begin{cases} 108x+72y+36z=1404 & \cdots\cdots(J_1) \\ 36y=153 & \cdots\cdots(J_2) \\ 36z=99 & \cdots\cdots(J_3) \end{cases}$$

從(J_1)式減去(J_2)的二倍及(J_3)，再以(I_1)首項係數3除，得

(K)

$$\begin{cases} 36x=333 & \cdots\cdots(K_1) \\ 36y=153 & \cdots\cdots(K_2) \\ 36z=99 & \cdots\cdots(K_3) \end{cases}$$

$$故\ \begin{cases} x=9\frac{1}{4} \\ y=4\frac{1}{4} \\ z=2\frac{3}{4} \end{cases}$$

從上舉的解法，可見古時的方程算法很是別致，雖較新法略繁，但步驟非常整齊，在使用籌算時可說是很便利的。

【例二】 今有上禾6秉的實，去掉1斗8升，等於下禾10秉的實。下禾15秉的實，去掉5升，等於上禾5秉的實。問上下禾各1秉有實多少？答：上禾1秉有實8升，下禾1秉有實3升。（題見九章算術）

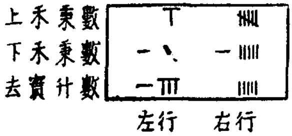
列上禾6秉正，下禾10秉負，實18升正於左行；又列上禾5秉負，下禾15秉正，實5升正於右行，如(A)式（負數的籌式，九章用顏色分別，現在

設上禾1秉的實爲x升，下禾1秉的實爲y升，依題意得聯立方程式

$$\begin{cases} 6x-18=10y \\ 15y-5=5x \end{cases}$$

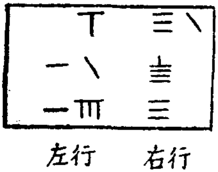
爲便利計，仿宋法在末位加一斜劃)。

(A)



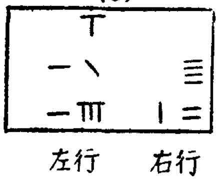
以左行上禾遍乘右行，如(B)式。

(B)



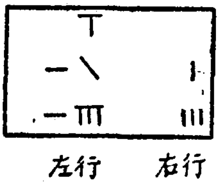
從右行累加左行，經五次而頭位盡，如(C)式。

(C)



右行上數爲除數，下數爲被除數，除得商數爲下禾1秉的實，如(D)式。

(D)



移項，整理，得

(A)

$$\begin{cases} 6x-10y=18 & \cdots\cdots(A_1) \\ -5x+15y=5 & \cdots\cdots(A_2) \end{cases}$$

以(A_1)式首項的係數6乘(A_2)式，得

(B)

$$\begin{cases} 6x-10y=18 & \cdots\cdots(B_1) \\ -30x+90y=30 & \cdots\cdots(B_2) \end{cases}$$

在(B_2)式內加上(B_1)式，經五次後得

(C)

$$\begin{cases} 6x-10y=18 & \cdots\cdots(C_1) \\ 40y=120 & \cdots\cdots(C_2) \end{cases}$$

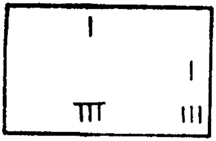
去(C_2)左邊的係數，得

(D)

$$\begin{cases} 6x-10y=18 & \cdots\cdots(D_1) \\ y=3 & \cdots\cdots(D_2) \end{cases}$$

又以所得數乘左行下禾,從左行末位減之,再以頭位除,得上禾1乘的實,如(*E*)式。

(E)



左行　　右行

以(D_2)右邊的3乘(D_1)的第二項係數,從右邊18減之,再以第一項係數6除之,得

(*E*)

$$\begin{cases} x=8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E_1) \\ y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (E_2) \end{cases}$$

在上舉的解法中,有$(-30)+(+6)=-24$,$(+90)+(-10)=+80$,$(+18)-(-30)=+48$ …… 的正負數加減法,又有$(-5)\times(+6)=-30$的乘法。

四

孫子算經的方程解法同現今代數的方法一樣。現在用古法籌算舉一例於下。

【例】 今有甲乙二人持錢各不知數。甲得乙中半(即$\frac{1}{2}$),可滿48,乙得甲太半(即$\frac{2}{3}$),亦滿48。問甲乙二人原持錢各多少?答:甲錢36,乙錢24。

列2甲、1乙、錢96於左行,又列2甲、3乙、錢144於右行,如(*A*)式。

(A)

甲
乙
共錢

左行　　右行

設甲原持錢爲x,乙原持錢爲y,則釋題意可得聯立方程式

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=48 \\ \frac{2}{3}x+y=48 \end{cases}$$

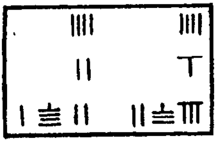
化簡得

(*A*)

$$\begin{cases} 2x+y=96 \cdots\cdots\cdots\cdots (A_1) \\ 2x+3y=144 \cdots\cdots\cdots\cdots (A_2) \end{cases}$$

以左行頭位2乘右行,上得4甲,中得6乙,下得錢288。以右行頭位2乘左行,上得4甲,中得2乙,下得錢192,如(B)式。

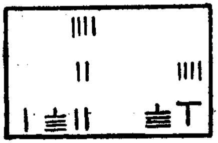
(B)



左行 右行

從右行減去左行,右上空,如(C)式。

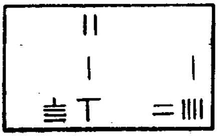
(C)



左行 右行

右行上數爲除數,下數爲被除數,得商數24爲乙錢,又把左行還原,如(D)式。

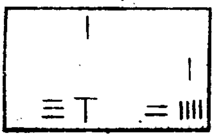
(D)



左行 右行

用右行所得數減左下96,餘72爲被除數,上位2爲除數,除得商數36爲甲錢,如(E)式。

(E)



左行 右行

以(A_1)(A_2)的首項係數交換乘兩式,得

(B)

$$\begin{cases} 4x+2y=192 & \cdots\cdots(B_1) \\ 4x+6y=288 & \cdots\cdots(B_2) \end{cases}$$

從(B_2)減去(B_1),得

(C)

$$\begin{cases} 4x+2y=192 & \cdots\cdots(C_1) \\ \qquad 4y=96 & \cdots\cdots(C_2) \end{cases}$$

去(C_2)左邊的係數,又以2除(C_1),得

(D)

$$\begin{cases} 2x+y=96 & \cdots\cdots(D_1) \\ \qquad y=24 & \cdots\cdots(D_2) \end{cases}$$

從(D_1)減去(D_2),再以2除,得

(E)

$$\begin{cases} x \qquad =36 & \cdots\cdots(E_1) \\ \qquad y=24 & \cdots\cdots(E_2) \end{cases}$$

從五家共井說到不定方程

一

中國古算書中的問題，普通每一個題目只有一種答案，自從張邱建算經創立‘百雞’的問題，纔有了‘一題數答’的先例。後來宋秦九韶發明‘大衍求一術’，每一問題更可有無窮的答案。但細考張氏以前的算書，在九章算術方程一章裏面發見有‘五家共井’一題，書中雖僅舉一答，其實答案多到無窮，可說是百雞及求一的先導，這裏先來把它敍述一下。

魏劉徽註九章算術方程章的第十三個問題說：‘今有五家共井，若用甲家的繩2條，乙家的繩1條接起來弔水，恰可抵到水面；若用乙家的繩 3 條，須添丙家的繩 1 條，接起來亦逮水面；又若用丙繩4條接丁繩1條，或丁繩5條接戊繩1條，或戊繩6條接甲繩1條，結果都是一樣。問五家的繩長及井深各多少？答：井深 721 寸，甲繩長 265 寸，乙繩長 191 寸，丙繩長 148 寸，丁繩長 129 寸，戊繩長 76 寸。’

上題用新法代數來解，計有未知數六個，但方程式僅得五式，是一個不定方程式問題。

設甲、乙、丙、丁、戊繩的長順次各爲 x、y、z、u、v 寸，井深爲 w 寸，則依題意列爲方程式：

$$2x+y=w \cdots\cdots (1)$$

$$3y+z=w \cdots\cdots (2)$$

$$4z+u=w\cdots\cdots(3)$$
$$5u+v=w\cdots\cdots(4)$$
$$6v+x=w\cdots\cdots(5)$$

若用加減法依次把上列的方程式相消，結果只能求得其中任何二未知數的比，而不能確定每一未知數的值。

九章算術裏沒有詳述解法，只說‘如方程以正負術入之’。我們根據方程古法及正負數計算法，知道它的解法與代數類似，現在用阿拉伯數字代籌式，並加說明如下。

先列數五行如(A)式，以(1)行首位2乘(5)得(B)，減去(1)得(C)。次以(2)行二位3乘新得的(5)得(D)，加以(2)得(E)。又以(3)行三位4乘(5)得(F)，減去(3)得(G)。再以(4)行四位5乘(5)得(H)，加以(4)得(I)。最後以所得(5)行中的上數721乘(4)，減去(5)，以5除，同法求〔$(3)\times721-(4)$〕$\div4$，〔$(2)\times721-(3)$〕$\div3$，〔$(1)\times721-(2)$〕$\div2$，得(J)式。

	(A) (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(B) (5)	(C) (5)	(D) (5)	(E) (5)
甲綆(卽 x)	2	0	0	0	1	2	0	0	0
乙綆(卽 y)	1	3	0	0	0	0	−1	−3	0
丙綆(卽 z)	0	1	4	0	0	0	0	0	1
丁綆(卽 u)	0	0	1	5	0	0	0	0	0
戊綆(卽 v)	0	0	0	1	6	12	12	36	36
井深(卽 w)	1	1	1	1	1	2	1	3	4

(F) (5)	(G) (5)	(H) (5)	(I) (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(J) (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0	0	0	2	0	0	0	0	721	0	0	0	0
0	0	0	1	3	0	0	0	0	721	0	0	0
4	0	0	0	1	4	0	0	0	0	721	0	0
0	−1	−5	0	0	1	5	0	0	0	0	721	0
144	144	720	0	0	0	1	721	0	0	0	0	721
16	15	75	1	1	1	1	76	265	191	148	129	76

這一個(J)式所表示的與用代數方法求得的結果一樣,即

$$\begin{cases}721\,x=265\,w\\721\,y=191\,w\\721\,z=148\,w\\721\,u=129\,w\\721\,v=\ \ 76\,w\end{cases}\qquad \text{或}\qquad \begin{cases}x:w=265:721\\y:w=191:721\\z:w=148:721\\u:w=129:721\\v:w=\ \ 76:721\end{cases}$$

原書假定 $w=721$,故得 $x=265, y=191, z=148, u=129, v=76$, 其單位用寸。其實這一個問題的答案決不止一種,因為用 721 的任何倍數作 w 的值,都可求得 x、y……的對應值,且可用任何單位,所以答案多到無窮。

劉徽在這一個問題的註解裏面有'舉率以言之'的話,又清戴震校訂該書後,認為:這一個問題裏面連長度的單位都沒有,怎樣可以定答數的單位呢?他主張改題中的問句為'問井深、繩長的比率各怎樣?'這一個見解是很對的。

二

上舉五家共井的問題,好算是中國最早的不定方程問題,但因方程式中缺'常數項',故可用普通方程算法解得任何兩未知數的比,與普通不定方程不同。

又考孫子算經'物不知數'一題,書中僅舉一答,其實也有無數答案,是不定方程而含常數項的,不能用普通方程算法來解。原題如下:

今有物不知數,三三數之賸二(就是累次減去三,最後餘二;也就是以三除原數,餘二),五五數之賸三,七七數之賸二。問物幾何?答:二十三。