平面几何学
比例及相似形

山地哲太郎　林鶴一著

商务印書館

目　录

第一章 关于比及比例的說明及定理

首先我們来敍述比的基本概念于下:

1. **定义.** 某量 A 是同种类之量 B 的若干倍,则 A 是 B 的**倍量**,B 是 A 的**約量**。

例如一丈是一尺的倍量,而一尺是一丈的約量。

2. **定义.** 二量 A、B,都是量 C 的倍量,则 C 是 A 与 B 的**公約量**,或叫做**公度量**。

例如一升是一斗及一斛的公約量。

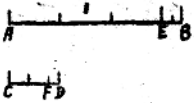
3. **定义.** 有公約量的二量,叫做**可通約量**,沒有公約量的二量,叫做**不可通約量**。

4. 求二直綫 AB、CD 的最大公約量。

解. $AB>CD$,以 CD 的長度为度量單位,由 AB 的 A 端起,依 CD 的長截 AB 为若干段,可能發生二种情形:

(1) AB 恰等于 CD 的若干倍的情形。

例如 $AB=4CD$,則 CD 是所求的最大公約量。

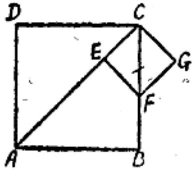


(2) AB 含 CD 的若干倍与残余的情形。

例如 $AB=3CD+EB$。又以 EB 的長度为度量單位,从 CD 的 C 端起,截 CD,得 $CD=2EB+FD$,再以 FD 的長度为度量單位,从 EB 的 E 端起,截 EB,設 $EB=2FD$,則 $CD=5FD$,$AB=17FD$,所求的最大公約量,就是 FD。

这方法，与算术及代数学中的求最大公約数的原理一样。

設二直綫为正方形的一边 BC 及它的对角綫 AC，应用以前的方法，求最大公約量。



正方形的对角綫，不能恰好等于它的一边的若干倍，故以 BC 为度量單位，由 AC 的 A 端起，截 AC 于 E，残余为 CE，过 E 作 AC 的垂綫，这垂綫与 BC 相交于 F，則 $CE==EF=BF$，故从 BC 减去 CE，其残余部分为 CF，由此可知 CE，CF 是第二正方形 $CEFG$ 的一边及对角綫。

于是求第一正方形 $ABCD$ 的一边及对角綫的最大公約量，变为求第二正方形 $CEFG$ 的一边及对角綫的最大公約量，这样輾轉相求，始終是求正方形的一边及对角綫的最大公約量，而沒有終止的时候，这种情形是沒有公約量的。

5．定义． 計算某量，須先决定同种类的量为單位，然后檢定某量含这單位的若干倍，或为这單位的若干分之一的几倍。

某量的測度就是以一單位来計算某量所得的数目。整数及分数，通称为有理数，或叫做尽数，始終量不尽的叫做無理数，或叫做不尽数（不是循环的）。

6．定理 1． 某量能够以一單位来通約，則其測度为有理数。

證明． 以 A 表某量。U 为單位，P 为公約量。

假設 $A=mP$，$U=nP$。（m，n 为正整数）。

因　　$P=\frac{1}{n}U$。　∴　$A=m\left(\frac{1}{n}U\right)=\frac{m}{n}U$。

卽 A 的測度为有理数 $\frac{m}{n}$。

此定理的对偶亦眞，故得系1。

系1. 量的測度，非有理数时，其量与單位不能通約。

系2. 量的測度为有理数时，量与單位能通約。

証明. 單位为 U，量 A 的測度为 $\frac{m}{n}$。 (m, n 为正整数)。

因 $$A=\frac{m}{n}U=m\left(\frac{1}{n}U\right)。$$

以 P 代 $\frac{1}{n}U$，則 $A=m\left(\frac{1}{n}U\right)=mP$，$U=nP$。

$\therefore$ P 为 A 及 U 的公約量。

由此知 A 与 U 为可通約的量。

卽系2的对偶亦眞，故得系3。

系3. 某量与其單位不可通約时，則其測度不是有理数，必为無理数。

以正方形的一边为單位，其对角綫与單位不可通約(見第4节)，故其測度为無理数，現在說明于下：

以 A 代正方形之一边，P 代其对角綫，則有 $2A>P>A$。

用 A 的十分之一为單位时，則 $1.5A>P>1.4A$。

又用 A 的百分之一为單位时，則 $1.42A>P>1.41A$。

又用 A 的千分之一为單位时，則 $1.415A>P>1.414A$。

由上面各式知，P 之測度介于兩个小数之間，卽更用 A 之万分之一，A 之十万分之一，其結果亦同，故可以决定 P 的測度，不能为分数。

換句話說，卽能决定 P 的測度，不能为有理数。

旣非有理数，則为不尽数。这不尽数，就是2的平方根。

这样的不尽数，在实地計算时，無法能求得眞正的数来表示它。

如以 $1.415A$ 代 P，則嫌稍多，若以 $1.414A$ 代 P，則嫌較少，但所略去之数为 $0.001A$，实不足 A 的千分之一。

因为不尽数無法求得眞正之数来表示它，故运算时，卽用不尽数的近似数，較多的，名为过剩近似数，較少的，名为不足近似数 1.5, 1.42,

1.415, 1.4143, 都是不尽数 $\sqrt{2}$ 的过剩近似数, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 都是不尽数 $\sqrt{2}$ 的不足近似数。

7. 定义. 量 A 对于与它同种类的量 B 的比, 即以它乘 B 可得 A 的数。

换句話說, A 对于 B 的比, 即用 B 为單位来計算 A 时, A 的测度。

記 A 对于 B 的比为 $A:B$, 或用分数式 $\frac{A}{B}$。

A 为比的**前項**, B 为比的**后項**。

注意. A 对于 B 的比, 通称为 A 与 B 的比。

8. 定义. 某比与交换其前后項而成的比, 互为**反比**。

如 $A:B$ 与 $B:A$, 即互为反比。

9. 定理 2. 某比与它的反比的积, 等于 1。

設 $\frac{A}{B}=m$ 則 $\frac{B}{A}=\frac{1}{m}$。 $\therefore$ $\frac{A}{B}\times\frac{B}{A}=m\times\frac{1}{m}=1$。

10. 定义. 量 A 与 B 的比, 等于量 C 与 D 的比, 則 A, B, C, D 成**比例**, 或叫做**比例量**。

記比例之法, 有下面三式。

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

$$A:B=C:D$$

$$A:B::C:D$$

A 与 D 为比例的**外項**, B 与 C 为比例的**內項**, D 为 A, B, C 的**第四比例項**。又 A 与 C, B 与 D 为**相对应之項**。

注意. A, B, C, D, 皆为同种类的量, 則比例成立。又 A, B 为同种类的量, 而 C, D 为与 A, B 异种类时, 比例亦能成立。

例如 A, B, C, D 皆为綫段, 能成比例, A, B 为綫段, C, D 为面积时, 亦能成立。

11. 定义. 有同种类的量 A, B, C, 若 A 与 B 的比,等于 B 与 C 的比,则此三量成比例, C 为 A, B 的**第三比例项**, B 为 A, C 的**比例中項**。

注意. 第四比例項与第三比例項的意义有区别,不要誤解。

12. 定理 3. 量 A 与 B 的比, A 及 B 能以同一的單位来計算,其比等于以 B 的測度除 A 的測度所得的商。

証明. 假設 $A=aP$, $B=bP$。

因 $\quad P=\frac{1}{b}B \quad \therefore \quad A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B$。

故依比的定义 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$。

系. 若 A, B, C, D 为比例量, A, B 以同一的單位来計算測度为 a, b。C, D 以同一之單位来計算測度为 c, d, 必有下面的关系。

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}。$$

証明. 比例式为 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, 因 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$, $\frac{C}{D}=\frac{c}{d}$, $\therefore \ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

这最后的式子,是代数学中常用的比例式。

故量之比的研究,得归于測度之比(卽数之比)的研究。

卽代数学中关于数之比的事項,也可以視为关于量之比的事項。

今以代数学中最重要的定理,述之于下:

13. 定理 4. $a, b, c, d, \cdots\cdots$表任意的数,有 I 至 IX 的九种变化如下:

I. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 为 $ad=bc$。

証明. 假設在等式的兩边,同以 bd 乘之,卽得最后一式。

II. 从 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 知 $a \gtreqless b$ 則 $c \gtreqless d$。

証明. $a>b$, 因 $\frac{a}{b}>1$, 則 $\frac{c}{d}>1$。$\therefore\ c>d$。

其余可以用同样方法来証明。

III. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 为 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$。

名为反比定理。

証明. 以假設式子的兩边各除 1, 即得最后的式子。

IV. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 为 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$。

名为更比定理。

証明. 假設式子的兩边, 同以 $\frac{b}{c}$ 乘之, 即得最后的式子。

V. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 为 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$。

名为合比定理。

VI. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 为 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$。

名为分比定理。

VII. 化 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 为 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$。

名为合分比定理。

以上三定理, 由讀者自己証明。

VIII. 設 $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$, 則 $\frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}$。

名为等比定理。

証明. 以 r 代假設之比的值。

从
$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=r。$$

得
$$a=br,\quad a'=b'r,\quad a''=b''r。$$

三式相加, $a+a'+a''=br+b'r+b''r=(b+b'+b'')r$。

$$\therefore\quad \frac{a+a'+a''}{b+b'+b''}=r=\frac{a}{b}。$$

IX. k 为任意的数, $\frac{a}{b}=\frac{ka}{kb}$。

容易証明。

注意．I 至 IX 的变化，是常用的要記住它。

例 題 I

1．設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，求証 $\frac{a}{b}=\frac{ma-nc}{mb-nd}$，($m$, n 为任意数。)

*2．設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 在 a, b, c, d 中 a 为最大，求証 $a+d>b+c$。

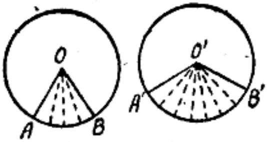
(初学几何学的人，遇有符号 * 的題目可以省略去。)

3．設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，求証 $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$ 及 $\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}$。

4．設 $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$，求証 $A\times b=B\times a$。(A, B 为量而 a, b 为数。)

第二章 中心角

14. 定理 5. 等圆(或同圆)的兩个中心角的比，等于其夾弧的比。



題意. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 为在等圆 O, O' 的中心角，AB, $A'B'$ 为二角所夾的弧。

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}.$$

証明 I. $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 为可通約的情形。

假定 $\angle AOB$ 等于公約量的四倍，$\angle A'O'B'$ 等于公約量的七倍。

$$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{4}{7}.$$

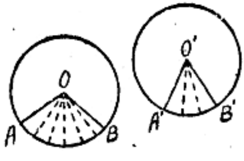
因 $\angle AOB$ 的四等分的角，及 $\angle A'O'B'$ 的七等分的角，等于其公約量，而等圆(或同圆)的兩中心角相等，其所对中心角的弧必相等，故弧 AB, $A'B'$ 所分的一部分皆相等。

$$\therefore\ \frac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}=\frac{4}{7}.$$

从上面二等式，依普通公理 $\dfrac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\dfrac{\text{弧 }AB}{\text{弧 }A'B'}$.

***証明 II.** $\angle AOB$, $\angle A'O'B'$ 为不可通約的情形。

(初学几何学的人，遇有符号 * 的証明，可以省略去。)



假如以 $\angle A'O'B'$ 的三分之一为單位，来計算 $\angle AOB$，比其五倍大，而比其六倍小，則弧 AB 亦比其單位角的弧的

五倍大，而比其單位角的弧的六倍小。

即 $$\frac{5}{3}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{6}{3}。$$

$$\frac{5}{3}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{6}{3}。$$

其次分 $\angle A'O'B'$ 为四等分、五等分、十等分，应用前面的方法，所得的諸結果，而其次弧亦得相同的結果。

以 $\angle A'O'B'$ 的四分之一为單位。

即 $$\frac{6}{4}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{7}{4},\ \frac{6}{4}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{7}{4}。$$

又以 $\angle A'O'B'$ 的五分之一为單位。

即 $$\frac{8}{5}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{9}{5},\ \frac{8}{5}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{9}{5}。$$

又以 $\angle A'O'B'$ 之十分之一为單位。

即 $$\frac{17}{10}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{18}{10},\ \frac{17}{10}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{18}{10},$$

由上面諸結果，知能以下面的代数式来表示。

$$\frac{m}{n}<\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}<\frac{m+1}{n},\ \frac{m}{n}<\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{m+1}{n}。$$ (m, n 为正整数)

这样看来，則兩角的比及兩弧的比，同在分数 $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n}$ 之間，而其差为 $\frac{1}{n}$。

故 $$\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}-\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}<\frac{1}{n}。$$

設 n 之值为極大，則 $\frac{1}{n}$ 之值为極小而接近于零。

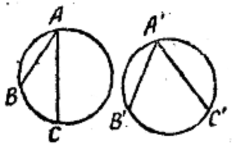
因 $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}$ 及 $\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}$ 同为一定之数，故 $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}-\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}$ 亦为另一个一定之数，$\frac{1}{n}$ 接近于零，而 $\frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}-\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}$ 小于 $\frac{1}{n}$，則这另一个一定数为零可以推想得到。

$$\therefore\ \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}-\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}=0,\ 即\ \frac{\angle AOB}{\angle A'O'B'}=\frac{弧\ AB}{弧\ A'B'}。$$

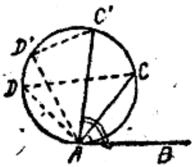
注意. 弦的大小，虽关于对弦的劣角及劣弧的大小，而不能成比例。

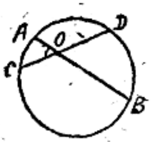
例 题 II

1. 等圆或同圆的两圆周角，与其夾弧能成比例。



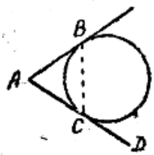
2. 切綫与从切点引出的弦所夾的角，与其角內所夾的弧能成比例。





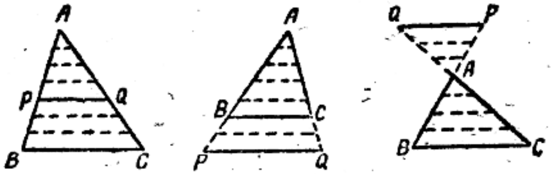
3. 頂点在圓內的角，与此角及其对頂角的二边所夾的弧的和，能成比例，又角的頂点在于圓外則如何。

4. 从圓外的一点引二切綫所夾的角，与依切点所分圓的共轭弧的差，能成比例。



第三章　比例綫

15．定理 6． 与三角形的底边平行的直線，分他二边为等比。



題意． 依 $\triangle ABC$ 的底边 BC，引平行的直線，与他二边 AB，AC（或延長綫）相交于 P，Q，則 $\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{CQ}$。

証明． 設 AP，BP 为其公約量的 m，n 倍，則 $\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n}$，分 AP，BP 为 m，n 等分，过各分点引与底边 BC 平行的直綫，知亦分 AQ，CQ 为 m，n 等分，則 $\frac{AQ}{CQ}=\frac{m}{n}$，故 $\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{CQ}$。

注意． 若 AP，BP 無公約量，可依定理 5 証明之，今省略。

系． 从此定理，得下面的比例式。

[I] $BP:AP=CQ:AQ$（反比）

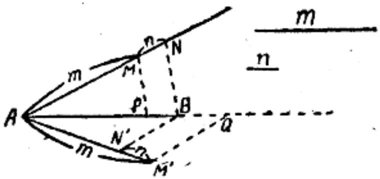
[II] $AP:AQ=BP:CQ$（更比）

[III] $AB:BP=AC:CQ$（合比）

[IV] $AB:AP=AC:AQ$（I 的合比）

16． 直綫 AB，得依定比 $m:n$ 内分或外分。

从 AB 的 A 端，任意引一直綫，在这直綫上，取 M，N 二点，令 $AM=m$，$MN=n$，連結 BN，过 M 引平行于 NB 的直綫，与 AB 相交

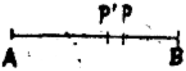


于 P，得比例式为 $AP:PB=m:n$。

又从 AB 的 A 端，任意引一直綫，在此直綫上，取 M', N' 二点，令 $AM'=m$, $M'N'=n$，連結 BN'，过 M' 引平行于 $N'B$ 的直綫，与 AB 相交于 Q，得比例式为 $AQ:BQ=m:n$。

故 P 为內分点，Q 为外分点。

17．定理 7． 依某比內分或外分一定直綫，仅有一个內分点及一个外分点。



題意． 依定比 $m:n$ 內分或外分 AB 直綫，不能有兩个內分点，亦不能有兩个外分点。

証明． I. 內分之情形。

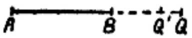
假設 P, P' 为依 $m:n$ 內分 AB 的二点。

則
$$\frac{AP}{BP}=\frac{m}{n},\quad \frac{AP'}{BP'}=\frac{m}{n}。$$

依合比之理 $\dfrac{AP+BP}{BP}=\dfrac{m+n}{n}$, $\dfrac{AP'+BP'}{BP'}=\dfrac{m+n}{n}$。

即 $\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{m+n}{n}$, $\dfrac{AB}{BP'}=\dfrac{m+n}{n}$，依普通公理 $\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{AB}{BP'}$。

故 $BP=BP'$，P 与 P' 不能不重合。



由此知依 $m:n$ 內分 AB，仅有一个內分点。

II. 外分之情形。

假設 Q, Q' 为依 $m:n$ 外分 AB 的二点。

則
$$\frac{AQ}{BQ}=\frac{m}{n},\quad \frac{AQ'}{BQ'}=\frac{m}{n}。$$

依分比之理，$\frac{AQ-BQ}{BQ}=\frac{m-n}{n}$，$\frac{AQ'-BQ'}{BQ'}=\frac{m-n}{n}$。

即 $\frac{AB}{BQ}=\frac{m-n}{n}$，$\frac{AB}{BQ'}=\frac{m-n}{n}$，依普通公理 $\frac{AB}{BQ}=\frac{AB}{BQ'}$。

故 $BQ=BQ'$。Q 与 Q' 不能不重合。

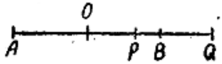
由此知依 $m:n$ 外分 AB，仅有一个外分点。

18. 定义. P, Q 为直綫 AB 的同比內分点及外分点，則此直綫的內分，外分合称为**調和分割**，P, Q 二点，叫做**調和共軛点**，A, P, B, Q 四点，叫做**調和点列**。

注意 1. 記調和点列 A, P, B, Q，通例为 $ABPQ$，或为 $APBQ$，或为 $AB; PQ$。

注意 2. 設直綫 AB 依定比調和分割，內分点为 P，外分点为 Q，AB 之中点为 O，則 P 及 Q 的位置如下：

$$AP:BP=AQ:BQ$$
$$=m:n$$

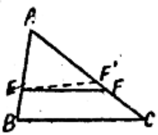


(1) $m>n$，則 P, Q 同在从 O 向 B 的一方。

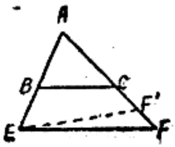
(2) $m<n$，則 P, Q 同在从 O 向 A 的一方。

(3) $m=n$，則 P 重合于 O，而 Q 在兩方的無窮远。

19. 定理 8. 依某比內分或外分三角形的二边，連結內分的二点或外分的二点之直綫，与他一边平行



題意. 依調和分割 $\triangle ABC$ 之二边 AB，AC 于 E, F，則 $\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{CF}$ 而 $EF \parallel BC$。



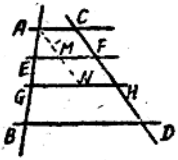
証明. 从 AB 边(或延長綫)上的 E 点引直綫平行于 BC 与 AC 边(或延長綫)相交之点为 F'，則 $\frac{AE}{BE}=\frac{AF'}{CF'}$。

因 $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{AF}{CF}$，∴ $\dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AF'}{CF'}$。

F' 与 F 不能不相合。(定理 7)

故 $EF \parallel BC$。

系. 任意作若干平行綫，截二定直綫为許多綫段，則其相对的二部分的比，皆相等。



題意. AC, EF, GH, BD 四平行綫，截二定直綫 AB, CD 于 A, E, G, B 及 C, F, H, D, 則 $\dfrac{AE}{CF}=\dfrac{EG}{FH}=\dfrac{GB}{HD}$。

証明. 从 A 引直綫与 CD 平行与 EF, GH 交于 M, N, 則 $AM=CF$, $MN=FH$。

因 AG, AN 为 $\triangle AGN$ 之二边，EM 与底边 GN 平行。

依定理 6 $\dfrac{AE}{EG}=\dfrac{AM}{MN}=\dfrac{CF}{FH}$，又依更比定理 $\dfrac{AE}{CF}=\dfrac{EG}{FH}$，

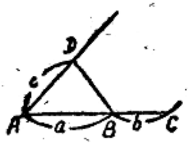
与 $\dfrac{EG}{FH}=\dfrac{GB}{HD}$，∴ $\dfrac{AE}{CF}=\dfrac{EG}{FH}=\dfrac{GB}{HD}$。

注意.

$\dfrac{AE}{CF}=\dfrac{EG}{FH}=\dfrac{GB}{HD}$，或記为 $AE:EG:GB=CF:FH:HD$。

例 題 III

1. 有三直綫 a, b, c, 求其第四比例項。



2. 有二直綫 a, b, 求其第三比例項，