



教育部高职高专规划教材

高等数学应用基础

► 赵益坤 侯静 胡顺田 主编



化学工业出版社
教材出版中心

013
330

教育部高职高专规划教材

高等数学应用基础

赵益坤 侯静 胡顺田 主编



化学工业出版社
教材出版中心

·北京·

(京)新登字 039 号

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学应用基础/赵益坤, 侯静, 胡顺田主编.
北京: 化学工业出版社, 2005.6
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-7222-8

I. 高… II. ①赵…②侯…③胡… III. 高等数学-
高等学校: 技术学院-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 063190 号

教育部高职高专规划教材
高等数学应用基础
赵益坤 侯静 胡顺田 主编
责任编辑: 张双进 程树珍
责任校对: 陈静
封面设计: 于兵

*

化学工业出版社 出版发行
教材出版中心
(北京市朝阳区惠新里 3 号, 邮政编码 100029)
购书咨询: (010) 64982530
(010) 64918013
购书传真: (010) 64982530
<http://www.cip.com.cn>

新华书店北京发行所经销
北京市昌平振南印刷厂印刷
三河市海波装订厂装订
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 27 字数 635 千字
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-7222-8
定 价: 36.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

出版说明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来,在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下,各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看,具有高职高专教育特色的教材极其匮乏,不少院校尚在借用本科或中专教材,教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此,1999年教育部组织制定了《高职高专教育专门课程基本要求》(以下简称《基本要求》)和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》(以下简称《培养规格》),通过推荐、招标及遴选,组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师,成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍,并在有关出版社的积极配合下,推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版500种,用5年左右时间完成。这500种教材中,专门课(专业基础课、专业理论与专业能力课)教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求,在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上,充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位,调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础,突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下,专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2~3年的时间,在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上,充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验,解决新形势下高职高专教育教材的有无问题;然后再用2~3年的时间,在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上,通过研究、改革和建设,推出一大批教育部高职高专规划教材,从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材,并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作,不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001年4月3日

前 言

根据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写。编写过程中根据高职高专数学教学的特点,结合高职高专学校高等数学教学现状、特点及职业教育的特色,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来高职高专院校数学课程教学改革的成功经验,切实贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,在数学概念和重要知识点的引入时,力求形象化、直观化、通俗化。适度淡化了数学理论的证明,强化了几何说明;还注意了与目前高中数学相衔接,尽量避免内容上的重复。体现了重能力、重应用、重素质、求创新的总体思路。

本书内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、行列式、矩阵与线性方程组、拉普拉斯变换共九章。全书内容分模块、分层次编排。一元函数微积分为基础模块,基础模块各章中微积分在经济中应用的概念、术语和实例等内容用“*”号标注,供工程类、经济类各专业选用。其余各模块为应用模块,供不同专业选用。其中,“拉普拉斯变换”一章,专供自动化、仪表等专业学习。鉴于高等数学的学习需要用到较多的代数、几何、三角等初等数学知识,书后附有初等数学常用公式和希腊字母表,供学生学习时查用;还附有习题答案,供学生学习时参考。

本教材的基础模块参考学时为70~80学时,应用模块另加学时。全本精简扼要、条理清楚、深入浅出、通俗易懂,例题、习题难易适度。由于本书分层次编排,既照顾了文、理兼收的专业和数学基础较差的学生,也照顾到了希望专接本的学生。因此,适用于各类高职高专院校、成人高校及本科院校开办的二级职业技术学院和民办高校两年制或三年制(少学时)工程类、经济管理类各专业。

全书由赵益坤教授策划并组织实施。本书主编为赵益坤、侯静、胡顺田;副主编为曹勃、王磊、阎保平、马成东。参加编写的有白瑞云、王力加、王书田。

由于水平有限,书中难免会出现缺点和错误,敬请读者多提宝贵意见。

编 者

2005.6

内 容 提 要

本教材根据教育部《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，结合高职高专学校高等数学教学特点与现状以及当前教学改革的实际编写，切实贯彻了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则。内容包括：极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、行列式、矩阵与线性方程组、拉普拉斯变换共九章。书后附有初等数学常用公式、希腊字母表和习题参考答案。

全书内容分模块、分层次编排。一元函数微积分为基础模块，其中微积分在经济中的应用和实例用“*”号标注，供工程类、经济管理类各专业选用。其余各模块为应用模块，供不同专业选用。全书精简扼要、条理清楚、深入浅出、通俗易懂，例题、习题难易适度，适用于各类高职高专院校、成人高校及本科院校开办的二级职业技术学院和民办高校两年制或三年制（少学时）工程类、经济管理类各专业。

目 录

第一章 极限与连续	1
第一节 函数	1
一、函数概念	1
二、基本初等函数	6
三、复合函数、初等函数	9
四、建立函数关系举例	10
* 五、常用经济函数	10
习题 1-1	12
第二节 极限	13
一、函数的极限	13
二、数列的极限	17
三、无穷小量与无穷大量	19
四、极限的运算	21
五、无穷小的比较	23
习题 1-2	24
第三节 两个重要极限	25
一、极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	25
二、极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	27
* 三、复利公式	28
习题 1-3	29
第四节 函数的连续性	29
一、函数连续性的概念	29
二、函数的间断点	31
三、初等函数的连续性	33
四、闭区间上连续函数的性质	34
习题 1-4	36
复习题一	37
本章知识精要	38
第二章 导数与微分	41
第一节 导数的概念	41
一、变化率问题举例	41
二、导数的定义	42
三、求导举例	43

四、导数的几何意义	45
五、可导与连续的关系	46
习题 2-1	47
第二节 函数的和、差、积、商的求导法则	47
习题 2-2	49
第三节 复合函数的求导法则	50
习题 2-3	52
第四节 反函数和隐函数的导数	53
一、反三角函数的导数	53
二、隐函数的导数	54
三、对数求导法	55
习题 2-4	55
第五节 高阶导数 由参数方程所确定的函数的导数 *	56
一、高阶导数的概念	56
二、二阶导数的力学意义	58
* 三、由参数方程所确定的函数的导数	58
习题 2-5	60
第六节 微分及其应用	61
一、微分的概念	61
二、微分的运算	63
三、微分在近似计算中的应用	65
习题 2-6	67
复习题二	67
本章知识精要	68
第三章 导数的应用	71
第一节 中值定理	71
一、罗尔定理	71
二、拉格朗日定理	71
三、柯西定理	72
习题 3-1	73
第二节 罗彼塔法则	73
一、 $\frac{0}{0}$ 型未定式	73
二、 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	74
三、其他类型的未定式	75
习题 3-2	76
第三节 函数的单调性 曲线的凹凸及拐点	76
一、函数的单调性	76
二、曲线的凹凸与拐点	78

习题 3-3	80
第四节 函数的极值及其求法	80
一、函数极值的定义	80
二、函数极值的判定和求法	81
习题 3-4	83
第五节 函数的最大值和最小值	83
习题 3-5	86
* 第六节 导数在经济分析中的应用	87
一、边际分析	88
二、弹性分析	89
习题 3-6	90
第七节 函数图形的描绘	90
一、曲线的水平渐近线和垂直渐近线	90
二、函数图像的描绘	91
习题 3-7	93
复习题三	94
本章知识精要	95
第四章 不定积分	98
第一节 不定积分的概念	98
一、原函数	98
二、不定积分	100
三、不定积分的几何意义	101
习题 4-1	101
第二节 积分的基本公式和法则 直接积分法	102
一、积分基本公式	102
二、积分的基本运算法则	103
三、直接积分法	104
习题 4-2	106
第三节 第一类换元积分法	106
习题 4-3	111
第四节 第二类换元积分法	112
习题 4-4	117
第五节 分部积分法	118
习题 4-5	121
第六节 简易积分表及其使用	121
习题 4-6	123
复习题四	123
本章知识精要	124
第五章 定积分及其应用	127
第一节 定积分的概念	127

一、两个实例	127
二、定积分的定义	129
三、定积分的几何意义	131
习题 5-1	132
第二节 定积分的性质	133
习题 5-2	136
第三节 牛顿-莱布尼兹公式	136
* 一、积分上限函数	137
二、牛顿-莱布尼兹公式	138
习题 5-3	140
第四节 定积分的换元法与分部积分法	140
一、定积分的换元法	140
二、定积分的分部积分法	142
习题 5-4	143
第五节 定积分的应用	144
一、定积分在几何上的应用	144
* 二、定积分在物理上的应用	150
* 三、定积分在经济上的应用	153
习题 5-5	154
第六节 无限区间上的广义积分	155
习题 5-6	156
复习题五	156
本章知识精要	157
第六章 常微分方程	160
第一节 微分方程的基本概念	160
习题 6-1	162
第二节 一阶微分方程	162
一、可分离变量的微分方程	163
二、一阶线性微分方程	164
习题 6-2	168
* 第三节 一阶微分方程应用举例	168
习题 6-3	171
* 第四节 二阶线性微分方程及其解的结构	172
一、二阶线性微分方程的概念	172
二、二阶线性齐次微分方程解的结构	172
三、二阶线性非齐次方程解的结构	173
习题 6-4	174
* 第五节 二阶常系数齐次线性微分方程	174
习题 6-5	176
* 第六节 二阶常系数非齐次线性微分方程	177

一、 $f(x)=e^{ax}P_n(x)$	177
二、 $f(x)=a\cos\omega x+b\sin\omega x$	179
习题 6-6	181
复习题六	181
本章知识精要	182
第七章 行列式	184
第一节 行列式的概念	184
一、二阶行列式	184
二、三阶行列式	185
三、 n 阶行列式	186
习题 7-1	188
第二节 行列式的性质	188
习题 7-2	191
第三节 克莱姆法则	192
习题 7-3	193
复习题七	193
本章知识精要	194
第八章 矩阵与线性方程组	196
第一节 矩阵及其运算	196
一、矩阵的概念	196
二、矩阵的运算	198
习题 8-1	203
第二节 矩阵的初等变换 矩阵的秩	203
一、矩阵的初等变换	203
二、矩阵的秩	206
习题 8-2	208
第三节 逆矩阵	208
一、逆矩阵的概念	208
二、逆矩阵的性质	209
三、逆矩阵的求法	209
四、用逆矩阵解线性方程组	212
习题 8-3	213
第四节 线性方程组解的判定	213
一、非齐次线性方程组	213
二、齐次线性方程组解的讨论	216
习题 8-4	217
* 第五节 向量与线性方程组解的结构	218
一、 n 维向量及其相关性	218
二、线性方程组解的结构	223
* 习题 8-5	228

复习题八.....	228
本章知识精要.....	230
*第九章 拉普拉斯变换	233
第一节 拉氏变换的基本概念和性质.....	233
一、拉氏变换的基本概念.....	233
二、拉氏变换的性质.....	235
习题 9-1	240
第二节 拉氏变换的逆变换.....	240
习题 9-2	242
第三节 拉氏变换应用举例.....	242
一、解微分方程.....	242
二、解积分方程.....	243
三、力学上的应用.....	244
四、电学上的应用.....	244
习题 9-3	245
复习题九.....	245
本章知识精要.....	246
附录 1 简易积分表	247
附录 2 初等数学常用公式	255
附录 3 希腊字母表	260
习题参考答案	261

第一章 极限与连续

极限是数学中的一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础。本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性问题。

第一节 函 数

一、函数概念

1. 函数的定义

定义 设 D 是一个实数集。如果对属于 D 的每一个数 x ，按照某个对应关系 f ， y 都有确定的值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$ 。 x 叫做自变量，数集 D 叫做函数的定义域，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的值域。

在函数的定义中，如果对于每一个 $x \in D$ ，都有惟一的 $y \in M$ 与它对应，那么这种函数就称为单值函数，否则就称为多值函数。

例如，由方程

$$x^2 + y^2 = r^2$$

所确定的以 x 为自变量的函数为

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad (1)$$

可以看出，对于区间 $[-r, r]$ 上的每一个 x 值，由式 (1) 可以确定 y 的一个值（当 $x = \pm r$ 时）或两个值（当 $-r < x < r$ 时），所以，式 (1) 是多值函数，其中， $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 和 $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ 是式 (1) 的两个单值支。

今后若无特殊说明，所研究的函数都是指单值函数。

在函数的定义中，并没有要求自变量变化时函数值一定要变，只要求对于自变量 $x \in D$ 都有确定的 $y \in M$ 与它对应。因此，常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因为当 $x \in R$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C 。

2. 函数的定义域

研究函数时，必须注意函数的定义域。在考虑实际问题时，应根据问题的实际意义来确定定义域。对于用数学式子表示的函数，它的定义域可由函数表达式本身来确定，即要使运算有意义。例如：

- ① 在分式中，分母不能为零；
- ② 在根式中，负数不能开偶次方根；
- ③ 在对数式中，真数要大于零；

④ 在反三角函数式中, 要符合反三角函数的定义域;

⑤ 如果函数表达式中含有分式、根式、对数式或反三角函数式, 则应取各部分定义域的交集.

例 1 求下列函数的定义域:

$$\textcircled{1} y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}; \quad \textcircled{2} y = \lg \frac{x}{x-1}; \quad \textcircled{3} y = \arcsin \frac{x+1}{3}.$$

解 $\textcircled{1} y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+2}.$

因为 $4-x^2 \neq 0$, 所以 $x \neq \pm 2$;

因为 $x+2 \geq 0$, 所以 $x \geq -2$.

因此 函数的定义域为 $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

$$\textcircled{2} y = \lg \frac{x}{x-1}.$$

因为 $\frac{x}{x-1} > 0$, 所以 $x > 1$ 或 $x < 0$.

故 函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

$$\textcircled{3} y = \arcsin \frac{x+1}{3}.$$

因为 $-1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1$,

所以 $-3 \leq x+1 \leq 3$, $-4 \leq x \leq 2$.

故 函数的定义域为 $[-4, 2]$.

两个函数只有当它们的定义域和对应关系完全相同时, 才认为它们是相同的.

例如, 函数 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ 与 $y = 1$, 它们的定义域和对应关系都相同, 所以它们是相同的函数.

又如, 函数 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y = x+1$, 它们的定义域不同, 所以它们是不同的函数.

3. 函数与函数值的记号

已知, y 是 x 的函数可以记为 $y = f(x)$, 但在同一个问题中, 如需要讨论几个不同的函数, 为区别清楚起见, 就要用不同的函数记号来表示. 例如, 以 x 为自变量的函数也可表示为

$$F(x), \varphi(x), y(x), S(x) \text{ 等.}$$

函数 $y = f(x)$ 当 $x = x_0 \in D$ 时, 对应的函数值可以记为 $f(x_0)$.

例 2 若 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$, 求 $f(2)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f(a)$, $f(a+b)$.

解 $f(2) = 0$; $f(-2) = \frac{|-4|}{-1} = -4$; $f(0) = \frac{|-2|}{1} = 2$; $f(a) = \frac{|a-2|}{a+1}$;

$$f(a+b) = \frac{|a+b-2|}{a+b+1}.$$

4. 函数的表示法

表示函数的方法, 常用的有公式法、表格法和图像法三种. 本书所讨论的函数常用公式法表示.

有时,会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

例如:函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数. 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \sqrt{x}$; 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x$. 它的图像如图 1-1 所示.

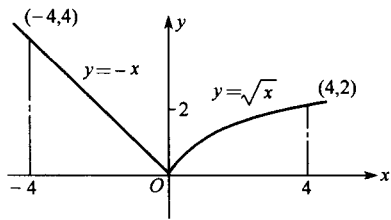


图 1-1

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为分段函数.

求分段函数的函数值时,应把自变量的值代入相应取值范围的表示式进行计算.

例如,在上面的分段函数中,

$$\begin{aligned} f(4) &= \sqrt{4} = 2; \\ f(-4) &= -(-4) = 4. \end{aligned}$$

5. 反函数

定义 设有函数 $y = f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M . 如果对于 M 中的每一个 y 值 ($y \in M$), 都可以从关系式 $y = f(x)$ 确定惟一的 x 值 ($x \in D$) 与之对应, 那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数, 它的定义域为 M , 值域为 D .

习惯上,函数的自变量都以 x 表示,所以,反函数也可表示为 $y = f^{-1}(x)$.

函数 $y = f(x)$ 的图像与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

6. 函数的几种特性

(1) 函数的奇偶性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于任一 $x \in D$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 如果对于任一 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$, $f(x)$ 既非奇函数, 也非偶函数, 则称其为非奇非偶函数.

例如, $f(x) = x^3$ 是奇函数. 因为, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

$f(x) = x^2$ 是偶函数. 因为, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

又如, $f(x) = \sin x$ 是奇函数. 因为, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$.

$f(x) = \cos x$ 是偶函数. 因为, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有 $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

$f(x) = \sin x + \cos x$ 是非奇非偶函数. 因为 $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 它既不恒等于 $f(x)$, 也不恒等于 $-f(x)$.

奇函数的图像对称于原点. 设 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 如果点 $A [x, f(x)]$ 在 $y = f(x)$ 的图像上, 则和它对称于原点的点 $A' [-x, -f(x)]$ 也在 $y = f(x)$ 的图像上 (图 1-2).

偶函数的图像对称于 y 轴. 设 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 如果点 $A [x, f$

(x) 在 $y=f(x)$ 的图像上, 则和它对称于 y 轴的点 $A'' [-x, f(x)]$ 也在 $y=f(x)$ 的图像上 (图 1-3).

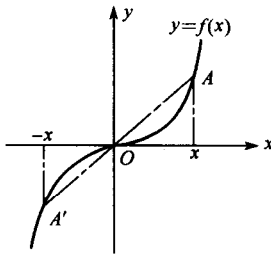


图 1-2

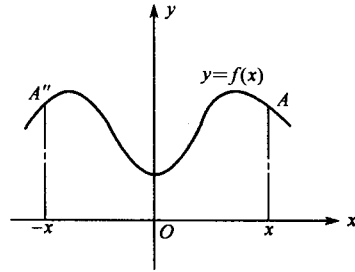


图 1-3

(2) 函数的单调性

定义 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而增大, 即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调增加的, 区间 (a, b) 称函数 $f(x)$ 的单调增加区间. 单调增加的函数, 它的图像沿横轴正向而上升 (图 1-4).

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而减小, 即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是单调减少的, 区间 (a, b) 称函数 $f(x)$ 的单调减少区间. 单调减少的函数, 它的图像沿横轴正向而下降 (图 1-5).

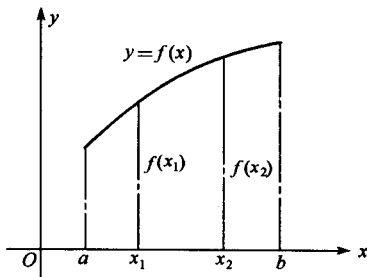


图 1-4

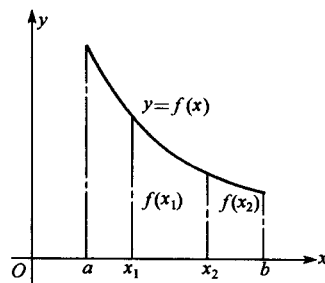


图 1-5

上述定义也适用于其他有限区间和无限区间的情形.

在某一区间内单调增加或单调减少的函数都称为这个区间内的单调函数, 该区间叫做这个函数的单调区间.

例如, 由图 1-6 可知, 函数 $y=x^2$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 而在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的, 它在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

又如, 由图 1-7 可知, 函数 $y=\log_a x$ ($a > 1$) 在定义域 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的, 函数 $y=\log_a x$ ($0 < a < 1$) 在定义域 $(0, +\infty)$ 内是单调减少的, 所以, 它们在定义域 $(0, +\infty)$ 内都是单调函数.

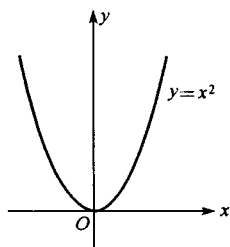


图 1-6

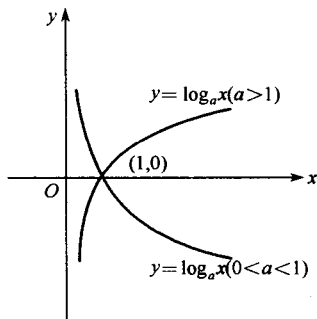


图 1-7

(3) 函数的有界性

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义. 如果存在一个正数 M , 使得对于区间 (a, b) 内的一切 x 值, 对应的函数值 $f(x)$ 都有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界; 如果这样的数 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界.

上述定义也适用于闭区间的情形.

例如, 函数 $f(x) = \sin x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为对于一切 $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq 1$ 都成立, 这里 $M=1$.

又如, 函数 $f(x) = \arctan x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的, 因为对于一切 $x \in \mathbb{R}$, $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ 都成立, 这里 $M = \frac{\pi}{2}$.

再如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 因为对于区间 $(0, 1)$ 内一切 x , 不存在正数 M , 使 $|\frac{1}{x}| \leq M$ 成立. 但是 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 内是有界的, 因为对于区间 $[1, 2]$ 上的一切 x , 都有 $|\frac{1}{x}| \leq 1$ 成立, 这里 $M=1$ (图 1-8).

显然, 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内是有界的, 那么它的图像在 (a, b) 内必介于两平行线 $y=\pm M$ 之间 (图 1-9).

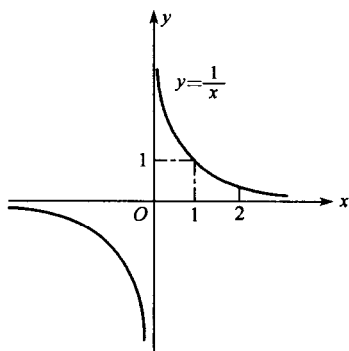


图 1-8

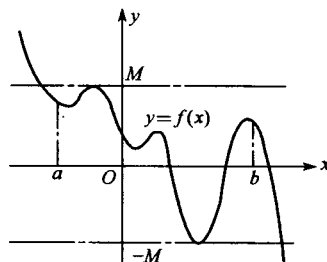


图 1-9