

遇到难题不要怕
我们帮你来解答
Aosaijinpai



奥数华数 难题解题手册

小学五年级

总主编 陶晓永



北京出版社出版集团
北京教育出版社

目 录

第一章 数的整除特征	(1)
赛点向导	(1)
赛点解密	(1)
一、能被 2、3、5 整除的数的特征	(1)
二、能被 4 或 25 整除的数的特征	(3)
三、能被 8 或 125 整除的数的特征	(5)
四、能被 9 整除的数的特征	(8)
五、能被 7 整除的数的特征	(11)
六、能被 11 整除的数的特征	(12)
七、能被 13 整除的数的特征	(15)
赛点趣题	(19)
第二章 带余数的除法	(20)
赛点向导	(20)
赛点解密	(20)
一、已知被除数及余数,求除数	(20)
二、已知除数及余数,求被除数	(22)
三、剩余问题	(25)
四、带余数的除法综合应用题	(27)
赛点趣题	(29)
第三章 最大公约数与最小公倍数	(31)
赛点向导	(31)
赛点解密	(31)
一、公约数与最大公约数	(31)
二、最大公约数在几何中的应用	(34)
三、公倍数与最小公倍数	(37)
四、最小公倍数的实际应用	(40)
赛点趣题	(42)
第四章 奇数与偶数	(44)
赛点向导	(44)
赛点解密	(44)



一、奇偶数的判断	(44)
二、奇偶数的计算题	(47)
三、利用奇偶数解答疑难问题	(50)
赛点趣题	(54)
第五章 质数、合数、分解质因数	(55)
赛点向导	(55)
赛点解密	(55)
一、质数与合数	(55)
二、质数与合数的判定	(58)
三、分解质因数	(60)
四、分解质因数的应用	(63)
五、约数的个数	(65)
赛点趣题	(67)
第六章 分数	(69)
赛点向导	(69)
赛点解密	(69)
一、简单的真分数比较	(69)
二、带有算式的分数比较	(71)
三、数字较大的分数比较	(73)
四、分数的化简	(75)
五、分数的求和	(76)
赛点趣题	(81)
第七章 完全平方数	(82)
赛点向导	(82)
赛点解密	(82)
一、判断完全平方数	(82)
二、完全平方数的应用	(85)
三、完全平方数的求证	(88)
赛点趣题	(90)
第八章 数值的计算技巧	(91)
赛点向导	(91)
赛点解密	(91)
一、小数的计算技巧	(91)
二、较复杂的小数计算技巧	(93)
三、简单分数的计算技巧	(96)

四、较复杂的分数计算技巧	(100)
五、整数的运算技巧	(101)
赛点趣题	(104)
第九章 图形分割	(105)
赛点向导	(105)
赛点解密	(105)
一、简单的图形分割	(105)
二、较复杂的图形分割	(108)
三、图形分割后的面积计算问题	(111)
赛点趣题	(116)
第十章 几何图形面积的计算	(118)
赛点向导	(118)
赛点解密	(118)
一、三角形的面积计算	(118)
二、矩形的面积计算	(124)
三、平行四边形的面积计算	(129)
四、梯形的面积计算	(133)
五、不规则图形的面积计算	(136)
赛点趣题	(143)
第十一章 正方体与长方体	(145)
赛点向导	(145)
赛点解密	(145)
一、正方体与长方体的一般性问题	(145)
二、长方体与立方体的转换问题	(148)
三、立方体与长方体的折叠问题	(150)
四、长方体与正方体的切挖问题	(153)
赛点趣题	(159)
第十二章 行程问题	(160)
赛点向导	(160)
赛点解密	(160)
一、较简单的相遇问题	(160)
二、较复杂的相遇问题	(163)
三、追及问题	(166)
四、不同速度的追及问题	(169)
五、相遇追及混合问题	(171)



赛点趣题	(174)
第十三章 牛吃草问题	(175)
赛点向导	(175)
赛点解密	(175)
一、可供几天吃	(175)
二、可供多少头牛吃	(179)
三、牛吃草的其他问题	(182)
赛点趣题	(185)
第十四章 周期问题	(186)
赛点向导	(186)
赛点解密	(186)
一、排列周期问题	(186)
二、周期计数问题	(189)
三、工程中的周期问题	(192)
赛点趣题	(195)
第十五章 时钟问题	(197)
赛点向导	(197)
赛点解密	(197)
一、时针、分针的位置问题	(197)
二、时间计算问题	(200)
三、较复杂的时间计算	(203)
赛点趣题	(207)
第十六章 逻辑推理	(209)
赛点向导	(209)
赛点解密	(209)
一、排中律推理法	(209)
二、同一律推理法	(211)
三、矛盾推理法	(214)
赛点趣题	(218)
第十七章 解应用题	(220)
赛点向导	(220)
赛点解密	(220)
一、流水行船问题	(220)
二、水中追及问题	(224)
三、火车过桥问题	(226)

四、较复杂的火车过桥问题	(229)
五、工程问题	(232)
六、盈亏问题	(237)
七、利用不定方程解应用题	(239)
赛点趣题	(244)
第十八章 容斥原理	(245)
赛点向导	(245)
赛点解密	(245)
一、简单的容斥问题	(245)
二、稍复杂的容斥问题	(247)
三、容斥原理的引申应用	(249)
赛点趣题	(253)
第十九章 二进制	(254)
赛点向导	(254)
赛点解密	(254)
一、二进制与十进制的互化	(254)
二、二进制的应用	(257)
赛点趣题	(260)
第二十章 抽屉原理	(262)
赛点向导	(262)
赛点解密	(262)
一、已知“苹果”和“抽屉”	(262)
二、求的是“苹果”还是“抽屉”	(264)
赛点趣题	(267)
第二十一章 排列与组合	(269)
赛点向导	(269)
赛点解密	(269)
一、排列	(269)
二、组合	(271)
三、排列组合的应用	(275)
赛点趣题	(279)

第一章 数的整除特征



赛点向导

数的整除性问题,内容丰富,应用广泛,它既是小学数学的重要学习内容,又因思维技巧性强而在数学竞赛中频频出现。要学好数的整除问题,就必须找到数的整除特征规律。



赛点解密

一、能被 2、3、5 整除的数的特征



精典例题

四位数 $1A8B$ 能同时被 2、3、5 整除,问这个四位数是多少?

【思路导航】要使 $1A8B$ 能同时被 2 和 5 整除,个位数字只能是 $B=0$;又要使 $1A80$ 能被 3 整除,所以各位数字之和 $1+A+8+0=9+A$ 应能被 3 整除。可以看出,当 A 取 0、3、6、9 时,各位数字之和 $9+A$ 可以被 3 整除。所求的四位数是 1080、1380、1680、1980。

答:这个四位数是 1080、1380、1680、1980。



举一反三

★ 迁移题 1 一个三位数能被 3 整除,去掉它的末位数后,所得的两位数是 17 的倍数,这样的三位数中,最大是几?

【分析与解】 据题意,这个数的前两位应是 17 的两位数的倍数中最大的。

$\because 17 \times 6 = 102$ 为三位数。

$\therefore$ 在两位数中,是 17 的倍数的数中最大的为 $17 \times 5 = 85$ 。

魔法棒

① 个位上是 0、2、4、6、8 的整数都能被 2 整除。

② 个位上是 0 或者 5 的整数都能被 5 整除。

③ 若一个整数各位数字之和能被 3 整除,则这个整数能被 3 整除。



∴ 所求数的前两位数字只能为 85。

又∵ 这个三位数能被 3 整除, 且 $8+5=13$,

∴ 所求数的个位数字为 2, 5, 8 时, 该数能被 3 整除, 为使该数最大, 其个位数字应为 8,

∴ 这样的数中, 最大是 858。

答: 最大是 858。

★ 迁移题 2 将自然数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 依次重复写下去组成一个 2005 位数, 试问这个数能否被 3 整除?

【分析与解】 ∵ $1+2+3+\cdots+9=45$, 3 能整除 45。

又∵ 2005 除以 9 余 7,

∴ 故这个 2005 位数的最末 7 位数字是 1234567, $1+2+3+4+5+6+7=28$, 28 不能被 3 整除。

∴ 这个 2005 位数不能被 3 整除。

答: 这个数不能被 3 整除。

★ 迁移题 3 若四位数 $\overline{8a9a}$ 能被 15 整除, 则 a 代表的数字是多少?

【分析与解】 ∵ 15 是 3 和 5 的倍数,

∴ $\overline{8a9a}$ 既能被 3 整除, 也能被 5 整除。

∴ 能被 5 整除的数的个位字是 0 或 5, 能被 3 整除的数的各位数字的和是 3 的倍数。

∴ 当 $a=0$ 时, $8+a+9+a=17$, 不是 3 的倍数。

当 $a=5$ 时, $8+a+9+a=27$, 是 3 的倍数;

∴ a 代表的数字是 5。

答: a 代表的数字是 5。

魔法棒

3 和 5 是两个互质数, 如果一个数能被两个互质数中的每个数整除, 那么这个数也能被这两个互质数的积整除。

★★ 迁移题 4 有 0, 1, 4, 7, 9 五个数字, 从中选出四个数字组成不同的四位数, 如果把其中能被 3 整除的四位数从小到大排列起来, 第五个数的末位数字是几?

【分析与解】 ∵ $0+1+4+7+9=21$ 能被 3 整除,

∴ 从中去掉 0 或 9 选出的两组四个数字组成的四位数都能被 3 整除。

即有 0, 1, 4, 7 或 1, 4, 7, 9 两种选择组成四位数, 由小到大排列为 1047, 1074, 1407, 1470, 1479, 1497, …。

∴ 第五个数的末位数字是 9。

答: 第五个数的末位数字是 9。

★★★ 迁移题 5 某教师发给学生一套有 100 多道题目的“复习题”, 老师说, 请你们回家去做题号能被 2 和 3 整除的题目。同学们发现布置的题在复习题总数中占的比值 x 满足 $\frac{8}{51} < x < \frac{4}{25}$ 。这套复习题共有多少道题?

【分析与解】 由题意共有 100 多道题, 应使 x 范围中分母尽量接近 100, 再结合能被 2 和 3 整除进行计算。

$$\therefore \frac{8}{51} = \frac{16}{102} \quad \frac{4}{25} = \frac{16}{100},$$

$$\therefore \frac{16}{102} < x < \frac{16}{100}.$$

由题目知为 100 多道题, 故可能为 101 道题。

$$\therefore 101 \div (2 \times 3) = 16 \cdots 5$$

∴ 共有 101 道习题。

答: 这套题共有 101 道。

二、能被 4 或 25 整除的数的特征



精典例题

在 $\square$ 内填上适当的数字, 使六位数 32417 $\square$ 能被 4 或 25 整除。

【思路导航】 先假设 32417 $\square$ 的个位数字为 x , 那么 $32417\square = 324100 + 7x$ ($7x$ 表示十位数字是 7, 个位数字为 x 的两位数)。

$$\therefore 324100 = 3241 \times 100, 100 = 4 \times 25,$$

∴ 4 和 25 都能整除 100, 根据整除的性质 324100 能被 4, 25 整除。

$$\therefore 32417x \text{ 能被 4 或 25 整除,}$$

$$\therefore 7x \text{ 就一定不能被 4 或 25 整除。}$$

魔法棒

通过这个例题, 我们得到一个数能被 4 或 25 整除的特征是:

如果一个自然数的末两位数能被 4 或 25 整除, 那么这个自然数就能被 4 或 25 整除, 否则这个数就不能被 4 或 25 整除。



$$\therefore \begin{cases} 7x \text{ 要能被 } 4 \text{ 整除, } x \text{ 只能是 } 2 \text{ 和 } 6。 \\ 7x \text{ 要能被 } 25 \text{ 整除, } x \text{ 只能是 } 5。 \end{cases}$$

$\therefore 72$ 和 76 都是 4 的倍数,

$\therefore$ 六位数 $32417\boxed{2}$ 和 $32417\boxed{6}$ 能被 4 整除。

$\therefore 75$ 是 25 的倍数,

$\therefore 32417\boxed{5}$ 能被 25 整除。

答:在 $\square$ 内填上 2 或 6 能被 4 整除,在 $\square$ 内填上 5 能被 25 整除。



举一反三

★ **迁移题 1** 有这样的两位数,它的两个数字的和能被 4 整除,而且比这个两位数大 1 的数,它的两个数字之和也能被 4 整除。所有这样的两位数的和是多少?

【分析与解】 符合条件的两位数的两个数字之和能被 4 整除,而且比这个两位数大 1 的数它的两个数字之和也能被 4 整除,如果十位数不变,则个位增加 1 ,其和便不能整除 4 ,因此个位数一定是 9 ,这种两位数有: $39, 79$ 。

所以,所求的和是 $39 + 79 = 118$ 。

答:所有这样的两位数的和是 118 。

★★ **迁移题 2** 在 685 后面补上三个数字,组成一个六位数,使它能分别被 $3, 4, 5$ 整除,且使这个数尽可能小。

【分析与解】 这个六位数分别被 $3, 4, 5$ 整除,故它应满足如下三个条件:

- (1) 各位数字之和是 3 的倍数;
- (2) 末两位数组成的两位数是 4 的倍数;
- (3) 末位数为 0 或 5 。

按此条件很容易找到这个六位数。

不妨设补上三个数字后的数为 $\overline{685abc}$ 。

$\therefore$ 这个六位数被 $4, 5$ 整除, $\overline{bc}$ 被 4 整除,

$\therefore c$ 不能是 5 而只能是 0 , 且 b 只可能是 $2, 4, 6, 8, 0$ 。

又 $\therefore 3 \mid \overline{685abc}$,

$\therefore 3 \mid (6 + 8 + 5 + a + b + 0)$,

$$\therefore \begin{cases} \text{当 } b=2 \text{ 时, } 31(6+8+5+a+2+0), a \text{ 可为 } 0, 3, 6, 9; \\ \text{当 } b=4 \text{ 时, } 31(6+8+5+a+4+0), a \text{ 可为 } 1, 4, 7; \\ \text{当 } b=6 \text{ 时, } 31(6+8+5+a+6+0), a \text{ 可为 } 2, 5, 8; \\ \text{当 } b=8 \text{ 时, } 31(6+8+5+a+8+0), a \text{ 可为 } 0, 3, 6, 9; \\ \text{当 } b=0 \text{ 时, } 31(6+8+5+a+0+0), a \text{ 可为 } 2, 5, 8. \end{cases}$$

为了使六位数 $\overline{685abc}$ 尽可能地小, 则 a 应取 0, b 应取 2, c 应取 0。

故能被 3, 4, 5 整除的最小六位数 $\overline{685abc}$ 应为 685020。

答: 所求的数最小为 685020。

★★★ 迁移题 3 求无重复数字, 能被 75 整除的五位数 $\overline{6a3b5}$ 。

【分析与解】 因 $75 = 3 \times 25$, 故这个五位数能被 3 和 25 整除, 根据能被 25 整除, 可求出 b 的值; 再根据能被 3 整除, 求出 a 的值; 最后满足题设中“无重复数字”的条件, 筛选题目答案。

$\therefore 75 = 3 \times 25$, 且 3 与 25 互质,

$\therefore 25 \mid \overline{6a3b5}$, 即 $25 \mid \overline{b5}$,

$\therefore b = 2$ 或 7 。

当 $b = 2$ 时,

$\therefore 3 \mid \overline{6a3b5}$,

$\therefore 6 + a + 3 + 2 + 5$ 即 $16 + a$ 是 3 的倍数,

$\therefore a = 2, 5, 8$ 。

此时五位数为 62325, 65325, 68325。

当 $b = 7$ 时,

$\therefore 3 \mid \overline{6a3b5}$,

$\therefore 6 + a + 3 + 7 + 5 = 21 + a$ 是 3 的倍数, 所以 $a = 3, 6, 9, 0$ 。

此时五位数为 63375, 66375, 69375, 60375。

$\therefore$ 筛去有重复数字的五位数,

$\therefore$ 无重复数字能被 75 整除的五位数是: 68325, 69375, 60375。

答: 无重复数字能被 75 整除的五位数是: 68325, 69375, 60375。

魔法棒

一个五位数如果能被 75 整除, 能给我们什么启发? $\rightarrow$ 由于 $75 = 3 \times 25$, 应该联想到这个五位数能同时被 3 和 25 整除。

三、能被 8 或 125 整除的数的特征



精典例题

在 $\square$ 中填上合适的数字, 使七位数 $7486\square 7\square$ 能被 125 或 8 整除。

【思路导航】 设七位数的百位数字和个位数字分别为 x, y , 那么 $7486\square 7\square = 7486x7y = 7486000 + x7y$ 。



$$\therefore 7486000 = 7486 \times 1000, 1000 = 8 \times 125,$$

$\therefore 8$ 和 125 都能整除 1000 , 即 8 和 125 都能整除 7486000 。

$\therefore$ 如果 $\overline{x7y}$ 能被 8 或 125 整除, 那么七位数 $\overline{7486x7y}$ 也一定能被 8 或 125 整除。

$\overline{x7y}$ 要能被 125 整除, $\overline{x7y}$ 一定是 125 的倍数。 125 的倍数只能是 $000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875$ 这八种情况, 只有 $375, 875$ 满足要求。

当 $\overline{x7y}$ 是 8 的倍数时, 末三位只能是 $000, 008, 016, 024, 032, 040, \dots, 672, \dots, 776, \dots, 872, \dots, 976, 984, 992$ 这 125 种情况, 只有 $072, 176, 272, 376, 472, 576, 672, 776, 872, 976$ 这十个数满足要求。

$\therefore 375, 875$ 是 125 的倍数,

$\therefore$ 七位数 $\overline{7486\boxed{3}7\boxed{5}}$ 和 $\overline{7486\boxed{8}7\boxed{5}}$ 能被 125 整除。

$\therefore 072, 176, 272, 376, 472, 576, 672, 776, 872, 976$ 是 8 的倍数,

$\therefore \overline{7486\boxed{0}7\boxed{2}}, \overline{7486\boxed{1}7\boxed{6}}, \overline{7486\boxed{2}7\boxed{2}}, \overline{7486\boxed{3}7\boxed{6}}, \overline{7486\boxed{4}7\boxed{2}}, \overline{7486\boxed{5}7\boxed{6}}, \overline{7486\boxed{6}7\boxed{2}}, \overline{7486\boxed{7}7\boxed{6}}, \overline{7486\boxed{8}7\boxed{2}}, \overline{7486\boxed{9}7\boxed{6}}$ 能被 8 整除。

答: 七位数 $\overline{7486072}, \overline{7486176}, \overline{7486272}, \overline{7486376}, \overline{7486472}, \overline{7486576}, \overline{7486672}, \overline{7486776}, \overline{7486872}, \overline{7486976}$ 能被 8 整除; 七位数 $\overline{7486375}, \overline{7486875}$ 能被 125 整除。



举一反三

★ 迁移题 1 在 $\square$ 内填上合适的数字, 使 $\square 679\square$ 能同时被 $8, 3$ 整除。

【分析与解】 设所求的五位数为 $\overline{x679y}$,

$\therefore 8$ 能整除 $\overline{x679y}$,

$\therefore y = 2$ 。

又 $\therefore 3$ 能整除 $\overline{x679y}$,

$\therefore x + 6 + 7 + 9 + 2 = x + 24$ 是 3 的倍数, 即 $x = 0$ (或 3 或 6 或 9)。

$\therefore$ 最高位不能为 0 ,

$\therefore x = 3$ (或 6 或 9)。

所求五位数为 36792 或 66792 或 96792 。



一个数能被 8 或 125 整除的特征是:

如果一个自然数的末三位数能被 8 或 125 整除, 那么这个自然数就能被 8 或 125 整除, 否则这个数就不能被 8 或 125 整除。

答:五位数 36792, 66792, 96792 能同时被 8, 3 整除。

★★ 迁移题 2 在□里填上适当的数字,使六位数 1992□□能同时被 25 和 8 整除。

【分析与解】 要求六位数 1992□□能同时被 25 和 8 整除,先考虑能被 25 整除这个条件。当六位数 1992□□能被 25 整除时,它的十位和个位数字组成的数只能是 00, 25, 50, 75。再考虑第二个条件,1992□□能被 8 整除,当 1992□□能被 8 整除时,它的末三位上数字组成的数必是 8 的倍数,所以六位数的十位与个位□内只能填 0。

1992 00 能同时被 25 和 8 整除。

答:六位数 199200 能同时被 25 和 8 整除。

★★★ 迁移题 3 从 1 数到 10000,在这 10000 个数中,既不能被 8 整除,也不能被 125 整除的数有多少个?

【分析与解】 解答本题的关键是先求出在这 10000 个数中能被 8 和 125 整除的数各有多少个,再从 10000 个数中减去能被 8 和 125 整除的数的个数,再加上既能被 8 整除又能被 125 整除的数的个数,就求出了不能被 8 也不能被 125 整除的数的个数。

魔法棒

这类题目,我们只要用反向思维来分析题目就很简单了,因为我们可以求出能被 8 和 125 整除的数,只要从总数中减去即可得到不能被 8 和 125 整除的数。

观察能被 8 整除的数,如 8, 16, 24, 32, …。在连续自然数列里,每隔 8 个数就有一个数能被 8 整除。因此在 1 ~ 10000 中就有 $10000 \div 8 = 1250$ (个)能被 8 整除的数。同样可以知道在连续自然数的数列里每隔 125 个数就有一个能被 125 整除的数。在 1 ~ 10000 中就有 $10000 \div 125 = 80$ (个)能被 125 整除的数,又因为 $8 \times 125 = 1000$,所以凡是 1000 的倍数,既能被 8 整除,也能被 125 整除,这样就有重复计算两次的数,应从 $1250 + 80$ 个数中减去。

$$\begin{aligned} \text{即 } & 1250 + 80 - 10000 \div 1000 \\ & = 1330 - 10 \\ & = 1320 \text{ (个)} \end{aligned}$$

能被 8 和 125 整除的数共有 1320 个,所以在 1 ~ 10000 这 10000 个数中既不能被 8 整除,也不能被 125 整除的数有 $10000 - 1320 = 8680$ (个)。



答:从1到10000这10000个数中,既不能被8整除也不能被125整除的数有8680个。

四、能被9整除的数的特征



精典例题

在□内填上合适的数字,使五位数3□24□能被9整除。

【思路导航】先设五位数3□24□的千位上、个位上□内的数字分别为 x, y ,那么有:

$$\begin{aligned} 3\square 24\square &= 30000 + x \times 1000 + 200 + 40 + y \\ &= 3 \times (9999 + 1) + x \times (999 + 1) + 2 \times (99 + 1) + 4 \times (9 + 1) + y \\ &= 3 \times 9999 + 999x + 2 \times 99 + 4 \times 9 + 3 + x + 2 + 4 + y \\ &= 9 \times (1111 \times 3 + 111x + 11 \times 2 + 4 \times 1) + (3 + x + 2 + 4 + y) \end{aligned}$$

不论 x 是什么数字,9一定能整除 $9 \times (1111 \times 3 + 111x + 11 \times 2 + 1 \times 4)$ 。如果 $3x24y$ 能被9整除,那么 $(3 + x + 2 + 4 + y)$ 一定能被9整除;反过来,如果 $(3 + x + 2 + 4 + y)$ 能被9整除,那么 $3x24y$ 一定能被9整除。

$3 + x + 2 + 4 + y$ 能被9整除,这个和只能是9、18、27三种情况。当 $3 + x + 2 + 4 + y = 9$ 时, $x = y = 0$;当 $3 + x + 2 + 4 + y = 18$ 时, $x + y = 9$,这时有 $x = 0, 1, 2, 3, \dots, 9$,对应的 $y = 9, 8, 7, \dots, 2, 1, 0$;当 $3 + x + 2 + 4 + y = 27$ 时, $x + y = 18$,这时 $x = y = 9$ 。

$\therefore 9$ 是9的倍数,

$\therefore 3 \square 24 \square$,能被9整除。

$\therefore 18$ 是9的倍数,

$\therefore 3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$, $3 \square 24 \square$ 能被9整除。

$\therefore 27$ 是9的倍数,

$\therefore 3 \square 24 \square$ 能被9整除。

答:五位数39249能被9整除。



一个数能被9整除的特征是:

如果一个数的各个数位上的数字和能被9整除,那么这个数就能被9整除,否则这个数就不能被9整除。



举一反三

★ 迁移题 1 有一个四位数 $\overline{1A43}$ 是 9 的倍数, 求 A 的值。

【分析与解】 $\because$ 四位数 $\overline{1A43}$ 是 9 的倍数,

$\therefore$ 这个四位数的各个数位上的数字之和可能是 9、18、27、 $\dots$ 。

$\therefore \begin{cases} \text{当和是 9 时, } 1+A+A+3=9, \text{ 即 } 2A=5, \text{ 所以 } A=2.5 (\text{舍去}); \\ \text{当和是 18 时, } 1+A+A+3=18, \text{ 即 } 2A=14, A=7; \\ \text{当和是 27 时, } 1+A+A+3=27, A=11.5 > 10 (\text{舍去}). \end{cases}$

$\therefore A$ 的值是 7。

答: A 的值为 7。

★ 迁移题 2 五位数 $\overline{abcde}$ 是 9 的倍数, 其中 $\overline{abcd}$ 是 4 的倍数, 那 $\overline{abcde}$ 的最小值是多少? (不同字母表示不同的数字)

【分析与解】 为使 $\overline{abcde}$ 最小, 从高位起应是最小的数, 应使 $a=1, b=0, c=2$, 因为 $\overline{abcd}$ 为 4 的倍数故 $d=0, 4, 8$, 且 $d=0$ 与 $b=0$ 重复, $d=4$ 时, $\overline{abcde}$ 是 9 的倍数, 则 $e=2$ 与 $c=2$ 重复, 故 $d=8, e=7$ 。

所以 $\overline{abcde}$ 的最小值为 10287。

答: $\overline{abcde}$ 的最小值是 10287。

★★ 迁移题 3 在 $\square$ 里填上适当的数字, 使得六位数 $\square 768 \square \square$ 能同时被 8、9 和 25 整除。

【分析与解】 根据能被 8、9 和 25 整除的数的特征很容易解出此题。

$\because$ 这个六位数能被 25 整除,

$\therefore$ 六位数的末两位数可能是 00、25、50、75。

又 $\because$ 该数能被 8 整除,

$\therefore$ 这个六位数的末三位数应能被 8 整除, 而在 800、825、850、875 中只有 800 满足条件,

$\therefore$ 这个六位数的个位、十位都是 0。

又 $\because$ 这个六位数能被 9 整除,

$\therefore$ 这个六位数的各位数字之和 (不妨设首位为 x) 即 $x+7+6+8+0+0=21+x$ 能被 9 整除, 可推出 x 只能为 6。

$\therefore$ 这个六位数为 676800。

答: 六位数 676800 能同时被 8、9 和 25 整除。



★★ 迁移题 4 六位数 $\overline{15ABC6}$ 能被 36 整除, 而且所得商最小, 问: A 、 B 、 C 的值各是多少?

【分析与解】 $\because \overline{15ABC6}$ 能被 36 整除, 且 $36 = 4 \times 9$, 4 和 9 互质,

$\therefore \overline{15ABC6}$ 被 4 和 9 整除。

(用整除性质: 一个数能被两个数的积整除, 那么这个数就能同时被这两个数整除)

$\because \overline{C6}$ 被 4 整除,

$\therefore C$ 为奇数。

由于商尽量小, 因此被除数可尽量小, 可使 $A=0, B=0$, 但是此时 C 无论取何值, 六位数 $\overline{15ABC6}$ 都不能被 9 整除, 因此 A 与 B 不能同时是 0。

若 $A=0, B=1$, 则 $1+5+0+1+C+6=13+C$ 是 9 的倍数, 所以 $C=5$ 。

故 $A=0, B=1, C=5$ 时商最小。

答: 所得商最小时 A 为 0, B 为 1, C 为 5。

魔法棒

看到 36 就应想到 4 和 9 是互质的, 把 36 转化为 $36 = 4 \times 9$, 然后再根据性质求其解。

★★★ 迁移题 5 一位马虎的采购员买了 72 只桶, 洗衣服时将购货发票洗烂了, 只能依稀看到: 72 只桶, 共 $\square 67.9 \square$ 元 ($\square$ 内的数字洗烂了), 请你帮他算一算, 一共用了多少钱。

【分析与解】 将 $\square 67.9 \square$ 元看做 $\square 679 \square$ 分, 这是 72 只桶的总价, 因为 单价 $\times 72 = \square 679 \square$, 所以 $\square 679 \square$ 能被 72 整除。 $72 = 8 \times 9$, 所以 $\square 679 \square$ 应该能同时被 8 和 9 整除。

如果 $\square 679 \square$ 能被 8 整除, 那么它的末三位一定能被 8 整除, 即 $8179 \square$, 容易算出 $\square$ 内应是 2。因为 $\square 6792$ 能被 9 整除, 所以其各数位上数字之和能被 9 整除。 $\square + 6 + 7 + 9 + 2 = \square + 24$, 显然, $\square$ 中的数只能是 3。

所以这张发票面额是 367.92 元。

答: 一共用了 367.92 元。

魔法棒

这类题将小数转化为整数, 用整除特征很容易求解, 因为买桶的只数总是整数。

五、能被 7 整除的数的特征



精典例题

如果 41 位数 $\underbrace{555\cdots 5}_{20\text{个}5} \square \underbrace{999\cdots 9}_{20\text{个}9}$ 能被 7 整除, 那么中间方格内的数字是几?

【思路导航】 $\because 555 - 555 = 0$ 是 7

的倍数,

$\therefore$ 根据能被 7 整除的数的特征,

555555 也能被 7 整除;

同理 999999 也能被 7 整除,

$\therefore \underbrace{555\cdots 5}_{18\text{个}5}$ 和 $\underbrace{999\cdots 9}_{18\text{个}9}$ 也能被 7 整除,

$\therefore$ 我们可以把这个 41 位数分解成几个数的和, 其中部分数能被 7 整除。

$\because \underbrace{555\cdots 5}_{20\text{个}5} \square \underbrace{999\cdots 9}_{20\text{个}9} = \underbrace{555\cdots 500\cdots 0}_{18\text{个}5} + \underbrace{55}_{23\text{个}0} \square \underbrace{9900\cdots 0}_{18\text{个}0} + \underbrace{999\cdots 9}_{16\text{个}9}$, 等号右边的

三个加数中, 第一个加数和第三个加数都能被 7 整除,

若要 $\underbrace{55\square 99\ 00\cdots 0}_{18\text{个}0}$ 能被 7 整除,

则 $55\square 99$ 能被 7 整除。根据能被 7 整除的数的特征, $\square 99 - 55 = \square 44$ 也能被 7 整除, 可推理得 $\square$ 内应为 6。

答: 中间方格内的数字是 6。



举一反三

★ 迁移题 1 判断 1059282 是否是 7 的倍数。

【分析与解】 把 1059282 分为 1059 和 282 两个数。

$\because 1059 - 282 = 777$, 又 $\because 71777$,

$\therefore 7 \mid 1059282$ 。

因此 1059282 是 7 的倍数。

答: 1059282 是 7 的倍数。



要判断一个数是否是 7 的倍数, 其实就是判断这个数能否被 7 整除。

★★ 迁移题 2 在 $\square$ 内填上合适的数字, 使六位数 $19\square 88\square$ 能被 35 整除。

【分析与解】 设所求的六位数为 $19x88y$,

$\because 35 = 5 \times 7$, 5 和 7 互质,

$\therefore 35$ 能整除 $19x88y$, 则 5、7 能同时整除 $19x88y$, 反过来也成立。