遇到难题不要怕
我们帮你来解答
Aosaijinpai

奥赛金牌

# 奥数华数
# 难题解题手册

## 小学五年级

总主编　陶晓永

北京出版社出版集团
北京教育出版社

# 目　录

# 第一章 数的整除特征

## 赛点向导

数的整除性问题，内容丰富，应用广泛，它既是小学数学的重要学习内容，又因思维技巧性强而在数学竞赛中频频出现。要学好数的整除问题，就必须找到数的整除特征规律。

## 赛点解密

### 一、能被2、3、5整除的数的特征

#### 精典例题

四位数$\overline{1A8B}$能同时被2,3,5整除，问这个四位数是多少？

【思路导航】要使$\overline{1A8B}$能同时被2和5整除，个位数字只能是$B=0$；又要使$\overline{1A80}$能被3整除，所以各位数字之和$1+A+8+0=9+A$应能被3整除。可以看出，当$A$取0,3,6,9时，各位数字之和$9+A$可以被3整除。所求的四位数是1080,1380,1680,1980。

**魔法棒**

①个位上是0,2,4,6,8的整数都能被2整除。

②个位上是0或者5的整数都能被5整除。

③若一个整数各位数字之和能被3整除，则这个整数能被3整除。

答：这个四位数是1080,1380,1680,1980。

#### 举一反三

**★ 迁移题1　一个三位数能被3整除，去掉它的末位数后，所得的两位数是17的倍数，这样的三位数中，最大是几？**

【分析与解】　据题意，这个数的前两位应是17的两位数的倍数中最大的。

$\because 17\times 6=102$ 为三位数。

$\therefore$ 在两位数中，是17的倍数的数中最大的为$17\times 5=85$。

∴所求数的前两位数字只能为85。

又∵这个三位数能被3整除，且$8+5=13$，

∴所求数的个位数字为2,5,8时，该数能被3整除，为使该数最大，其个位数字应为8，

∴这样的数中，最大是858。

**答：**最大是858。

**★ 迁移题2　将自然数1,2,3,4,5,6,7,8,9依次重复写下去组成一个2005位数，试问这个数能否被3整除？**

**【分析与解】**　∵$1+2+3+\cdots+9=45$，3能整除45。

又∵2005除以9余7，

∴故这个2005位数的最末7位数字是1234567，$1+2+3+4+5+6+7=28$，28不能被3整除。

∴这个2005位数不能被3整除。

**答：**这个数不能被3整除。

**★ 迁移题3　若四位数$\overline{8a9a}$能被15整除，则$a$代表的数字是多少？**

**【分析与解】**　∵15是3和5的倍数，

∴$\overline{8a9a}$既能被3整除，也能被5整除。

∵能被5整除的数的个位字是0或5，能被3整除的数的各位数字的和是3的倍数。

> **魔法棒**
>
> 3和5是两个互质数，如果一个数能被两个互质数中的每个数整除，那么这个数也能被这两个互质数的积整除。

∴当$a=0$时，$8+a+9+a=17$，不是3的倍数。

当$a=5$时，$8+a+9+a=27$，是3的倍数；

∴$a$代表的数字是5。

**答：**$a$代表的数字是5。

**★★ 迁移题4　有0,1,4,7,9五个数字，从中选出四个数字组成不同的四位数，如果把其中能被3整除的四位数从小到大排列起来，第五个数的末位数字是几？**

**【分析与解】**　∵$0+1+4+7+9=21$能被3整除，

∴从中去掉0或9选出的两组四个数字组成的四位数都能被3整除。

即有0,1,4,7或1,4,7,9两种选择组成四位数,由小到大排列为1047,1074,1407,1470,1479,1497,…。

∴第五个数的末位数字是9。

**答:**第五个数的末位数字是9。

**★★★ 迁移题5　某教师发给学生一套有100多道题目的“复习题”,老师说,请你们回家去做题号能被2和3整除的题目。同学们发现布置的题在复习题总数中占的比值$x$满足$\frac{8}{51}<x<\frac{4}{25}$。这套复习题共有多少道题?**

**【分析与解】**　由题意共有100多道题,应使$x$范围中分母尽量接近100,再结合能被2和3整除进行计算。

$\because \frac{8}{51}=\frac{16}{102}\quad \frac{4}{25}=\frac{16}{100}$,

$\therefore \quad \frac{16}{102}<x<\frac{16}{100}$。

由题目知为100多道题,故可能为101道题。

$\because 101\div(2\times3)=16\cdots\cdots5$

∴共有101道习题。

**答:**这套题共有101道。

## 二、能被4或25整除的数的特征

### 精典例题

在□内填上适当的数字,使六位数32417□能被4或25整除。

**【思路导航】**先假设32417□的个位数字为$x$,那么$32417□=324100+\overline{7x}$($\overline{7x}$表示十位数字是7,个位数字为$x$的两位数)。

$\because 324100=3241\times100,100=4\times25$,

∴4和25都能整除100,根据整除的性质324100能被4,25整除。

$\because \overline{32417x}$能被4或25整除,

$\therefore \overline{7x}$就一定能被4或25整除。

**魔法棒**

通过这个例题,我们得到一个数能被4或25整除的特征是:

如果一个自然数的末两位数能被4或25整除,那么这个自然数就能被4或25整除,否则这个数就不能被4或25整除。

$\therefore \begin{cases} \overline{7x}\text{要能被 4 整除},x\text{ 只能是 2 和 6。} \\ \overline{7x}\text{要能被 25 整除},x\text{ 只能是 5。} \end{cases}$

$\because$ 72 和 76 都是 4 的倍数,

$\therefore$ 六位数 32417$\boxed{2}$和 32417$\boxed{6}$能被 4 整除。

$\because$ 75 是 25 的倍数,

$\therefore$ 32417$\boxed{5}$能被 25 整除。

**答:**在□内填上 2 或 6 能被 4 整除,在□内填上 5 能被 25 整除。

## 举一反三

**★ 迁移题 1　有这样的两位数,它的两个数字的和能被 4 整除,而且比这个两位数大 1 的数,它的两个数字之和也能被 4 整除。所有这样的两位数的和是多少?**

**【分析与解】**　符合条件的两位数的两个数字之和能被 4 整除,而且比这个两位数大 1 的数它的两个数字之和也能被 4 整除,如果十位数不变,则个位增加 1,其和便不能整除 4,因此个位数一定是 9,这种两位数有:39,79。

所以,所求的和是 39 + 79 = 118。

**答:**所有这样的两位数的和是 118。

**★★ 迁移题 2　在 685 后面补上三个数字,组成一个六位数,使它能分别被 3,4,5 整除,且使这个数尽可能小。**

**【分析与解】**　这个六位数分别被 3,4,5 整除,故它应满足如下三个条件:

(1)各位数字之和是 3 的倍数;

(2)末两位数组成的两位数是 4 的倍数;

(3)末位数为 0 或 5。

按此条件很容易找到这个六位数。

不妨设补上三个数字后的数为$\overline{685abc}$。

$\because$ 这个六位数被 4、5 整除,$\overline{bc}$被 4 整除,

$\therefore$ $c$ 不能是 5 而只能是 0,且 $b$ 只可能是 2,4,6,8,0。

又$\because$ $3|\overline{685abc}$,

$\therefore 3|(6+8+5+a+b+0)$,

$$\therefore \begin{cases} 当\ b=2\ 时, 3\mid(6+8+5+a+2+0), a\ 可为\ 0,3,6,9; \\ 当\ b=4\ 时, 3\mid(6+8+5+a+4+0), a\ 可为\ 1,4,7; \\ 当\ b=6\ 时, 3\mid(6+8+5+a+6+0), a\ 可为\ 2,5,8; \\ 当\ b=8\ 时, 3\mid(6+8+5+a+8+0), a\ 可为\ 0,3,6,9; \\ 当\ b=0\ 时, 3\mid(6+8+5+a+0+0), a\ 可为\ 2,5,8。 \end{cases}$$

为了使六位数$\overline{685abc}$尽可能地小，则 $a$ 应取 0、$b$ 应取 2、$c$ 应取 0。

故能被 3、4、5 整除的最小六位数$\overline{685abc}$应为 685020。

**答**：所求的数最小为 685020。

**★★★ 迁移题 3　求无重复数字，能被 75 整除的五位数$\overline{6a3b5}$。**

**【分析与解】**　因 $75=3\times25$，故这个五位数能被 3 和 25 整除，根据能被 25 整除，可求出 $b$ 的值；再根据能被 3 整除，求出 $a$ 的值；最后满足题设中"无重复数字"的条件，筛选题目答案。

$\because 75=3\times25$，且 3 与 25 互质，

$\therefore 25\mid\overline{6a3b5}$，即 $25\mid\overline{b5}$，

$\therefore b=2$ 或 7。

当 $b=2$ 时，

$\because 3\mid\overline{6a3b5}$，

$\therefore 6+a+3+2+5$ 即 $16+a$ 是 3 的倍数，

$\therefore a=2,5,8$。

此时五位数为 62325，65325，68325。

当 $b=7$ 时，

$\because 3\mid\overline{6a3b5}$，

$\therefore 6+a+3+7+5=21+a$ 是 3 的倍数，所以 $a=3,6,9,0$。

此时五位数为 63375，66375，69375，60375。

$\because$ 筛去有重复数字的五位数，

$\therefore$ 无重复数字能被 75 整除的五位数是：68325，69375，60375。

**答**：无重复数字能被 75 整除的五位数是：68325，69375，60375。

> **魔法棒**
> 一个五位数如果能被 75 整除，能给我们什么启发？→由于 $75=3\times25$，应该联想到这个五位数能同时被 3 和 25 整除。

## 三、能被 8 或 125 整除的数的特征

**精典例题**

在□中填上合适的数字，使七位数 7486□7□能被 125 或 8 整除。

**【思路导航】**设七位数的百位数字和个位数字分别为 $x$、$y$，那么 $7486□7□=\overline{7486x7y}=7486000+\overline{x7y}$。

$\because 7486000 = 7486 \times 1000, 1000 = 8 \times 125$，

$\therefore$ 8 和 125 都能整除 1000，即 8 和 125 都能整除 7486000。

$\therefore$ 如果 $\overline{x7y}$ 能被 8 或 125 整除，那么七位数 $\overline{7486x7y}$ 也一定能被 8 或 125 整除。

$\overline{x7y}$ 要能被 125 整除，$\overline{x7y}$ 一定是 125 的倍数。125 的倍数只能是 000，125，250，375，500，625，750，875 这八种情况，只有 375，875 满足要求。

**魔法棒**

一个数能被 8 或 125 整除的特征是：

如果一个自然数的末三位数能被 8 或 125 整除，那么这个自然数就能被 8 或 125 整除，否则这个数就不能被 8 或 125 整除。

当 $\overline{x7y}$ 是 8 的倍数时，末三位只能是 000，008，016，024，032，040，…，672，…，776，…，872，…，976，984，992 这 125 种情况，只有 072，176，272，376，472，576，672，776，872，976 这十个数满足要求。

$\because$ 375，875 是 125 的倍数，

$\therefore$ 七位数 $7486\boxed{3}7\boxed{5}$ 和 $7486\boxed{8}7\boxed{5}$ 能被 125 整除。

$\because$ 072，176，272，376，472，576，672，776，872，976 是 8 的倍数，

$\therefore$ $7486\boxed{0}7\boxed{2}$，$7486\boxed{1}7\boxed{6}$，$7486\boxed{2}7\boxed{2}$，$7486\boxed{3}7\boxed{6}$，$7486\boxed{4}7\boxed{2}$，$7486\boxed{5}7\boxed{6}$，$7486\boxed{6}7\boxed{2}$，$7486\boxed{7}7\boxed{6}$，$7486\boxed{8}7\boxed{2}$，$7486\boxed{9}7\boxed{6}$ 能被 8 整除。

**答**：七位数 7486072，7486176，7486272，7486376，7486472，7486576，7486672，7486776，7486872，7486976 能被 8 整除；七位数 7486375，7486875 能被 125 整除。

## 举一反三

**★ 迁移题 1　在□内填上合适的数字，使□679□能同时被 8、3 整除。**

**【分析与解】**　设所求的五位数为 $\overline{x679y}$，

$\because$ 8 能整除 $\overline{x679y}$，

$\therefore y = 2$。

又 $\because$ 3 能整除 $\overline{x679y}$，

$\therefore x + 6 + 7 + 9 + 2 = x + 24$ 是 3 的倍数，即 $x = 0$（或 3 或 6 或 9）。

$\because$ 最高位不能为 0，

$\therefore x = 3$（或 6 或 9）。

所求五位数为 36792 或 66792 或 96792。

**答:**五位数36792,66792,96792能同时被8,3整除。

**★★ 迁移题2 在□里填上适当的数字,使六位数1992□□能同时被25和8整除。**

**【分析与解】** 要求六位数1992□□能同时被25和8整除,先考虑能被25整除这个条件。当六位数1992□□能被25整除时,它的十位和个位数字组成的数只能是00,25,50,75。再考虑第二个条件,1992□□能被8整除,当1992□□能被8整除时,它的末三位上数字组成的数必是8的倍数,所以六位数的十位与个位□内只能填0。

1992 $\boxed{0}\boxed{0}$ 能同时被25和8整除。

**答:**六位数199200能同时被25和8整除。

**★★★ 迁移题3 从1数到10000,在这10000个数中,既不能被8整除,也不能被125整除的数有多少个?**

**【分析与解】** 解答本题的关键是先求出在这10000个数中能被8和125整除的数各有多少个,再从10000个数中减去能被8和125整除的数的个数,再加上既能被8整除又能被125整除的数的个数,就求出了不能被8也不能被125整除的数的个数。

**魔法棒**

这类题目,我们只要用反向思维来分析题目就很简单了,因为我们可以求出能被8和125整除的数,只要从总数中减去即可得到不能被8和125整除的数。

观察能被8整除的数,如8,16,24,32,…。在连续自然数列里,每隔8个数就有一个数能被8整除。因此在1~10000中就有10000÷8=1250(个)能被8整除的数。同样可以知道在连续自然数的数列里每隔125个数就有一个能被125整除的数。在1~10000中就有10000÷125=80(个)能被125整除的数,又因为8×125=1000,所以凡是1000的倍数,既能被8整除,也能被125整除,这样就有重复计算两次的数,应从1250+80个数中减去。

即 $1250+80-10000\div1000$

$=1330-10$

$=1320$(个)

能被8和125整除的数共有1320个,所以在1~10000这10000个数中既不能被8整除,也不能被125整除的数有10000-1320=8680(个)。

**答:**从1到10000这10000个数中,既不能被8整除也不能被125整除的数有8680个。

## 四、能被9整除的数的特征

### 精典例题

在□内填上合适的数字,使五位数3□24□能被9整除。

**【思路导航】**先设五位数3□24□的千位上、个位上□内的数字分别为$x$、$y$,那么有:

$$\begin{aligned}3\square24\square &= 30000+x\times1000+200+40+y\\ &=3\times(9999+1)+x\times(999+1)+2\times(99+1)+4\times(9+1)+y\\ &=3\times9999+999x+2\times99+4\times9+3+x+2+4+y\\ &=9\times(1111\times3+111x+11\times2+4\times1)+(3+x+2+4+y)\end{aligned}$$

不论$x$是什么数字,9一定能整除$9\times(1111\times3+111x+11\times2+1\times4)$。如果$\overline{3x24y}$能被9整除,那么$(3+x+2+4+y)$一定能被9整除;反过来,如果$(3+x+2+4+y)$能被9整除,那么$\overline{3x24y}$一定能被9整除。

**魔法棒**

一个数能被9整除的特征是:

如果一个数的各个数位上的数字和能被9整除,那么这个数就能被9整除,否则这个数就不能被9整除。

$3+x+2+4+y$能被9整除,这个和只能是9、18、27三种情况。当$3+x+2+4+y=9$时,$x=y=0$;当$3+x+2+4+y=18$时,$x+y=9$,这时有$x=0,1,2,3,\cdots,9$,对应的$y=9,8,7,\cdots,2,1,0$;当$3+x+2+4+y=27$时,$x+y=18$,这时$x=y=9$。

∵9是9的倍数,

∴3$\boxed{0}$24$\boxed{0}$,能被9整除。

∵18是9的倍数,

∴3$\boxed{0}$24$\boxed{9}$,3$\boxed{1}$24$\boxed{8}$,3$\boxed{2}$24$\boxed{7}$,3$\boxed{3}$24$\boxed{6}$,3$\boxed{4}$24$\boxed{5}$,3$\boxed{5}$24$\boxed{4}$,3$\boxed{6}$24$\boxed{3}$,3$\boxed{7}$24$\boxed{2}$,3$\boxed{8}$24$\boxed{1}$,3$\boxed{9}$24$\boxed{0}$能被9整除。

∵27是9的倍数,

∴3$\boxed{9}$24$\boxed{9}$能被9整除。

**答:**五位数39249能被9整除。

## 举一反三

★ **迁移题 1** 有一个四位数$\overline{1AA3}$是 9 的倍数,求 $A$ 的值。

**【分析与解】** ∵ 四位数$\overline{1AA3}$是 9 的倍数,

∴ 这个四位数的各个数位上的数字之和可能是 9、18、27,…。

$$\because \begin{cases} \text{当和是 9 时}, 1+A+A+3=9, \text{即 } 2A=5, \text{所以 } A=2.5(\text{舍去}); \\ \text{当和是 18 时}, 1+A+A+3=18, \text{即 } 2A=14, A=7; \\ \text{当和是 27 时}, 1+A+A+3=27, A=11.5>10(\text{舍去})。 \end{cases}$$

∴ $A$ 的值是 7。

**答:**$A$ 的值为 7。

★ **迁移题 2** 五位数$\overline{abcde}$是 9 的倍数,其中$\overline{abcd}$是 4 的倍数,那$\overline{abcde}$的最小值是多少?(不同字母表示不同的数字)

**【分析与解】** 为使$\overline{abcde}$最小,从高位起应是最小的数,应使 $a=1$,$b=0$,$c=2$,因为$\overline{abcd}$为 4 的倍数故 $d=0,4,8$,且 $d=0$ 与 $b=0$ 重复,$d=4$ 时,$\overline{abcde}$是 9 的倍数,则 $e=2$ 与 $c=2$ 重复,故 $d=8$,$e=7$。

所以$\overline{abcde}$的最小值为 10287。

**答:**$\overline{abcde}$的最小值是 10287。

★★ **迁移题 3** 在□里填上适当的数字,使得六位数□768□□能同时被 8、9 和 25 整除。

**【分析与解】** 根据能被 8、9 和 25 整除的数的特征很容易解出此题。

∵ 这个六位数能被 25 整除,

∴ 六位数的末两位数可能是 00、25、50、75。

又∵ 该数能被 8 整除,

∴ 这个六位数的末三位数应能被 8 整除,而在 800、825、850、875 中只有 800 满足条件,

∴ 这个六位数的个位、十位都是 0。

又∵ 这个六位数能被 9 整除,

∴ 这个六位数的各位数字之和(不妨设首位为 $x$)即 $x+7+6+8+0+0=21+x$ 能被 9 整除,可推出 $x$ 只能为 6。

∴ 这个六位数为 676800。

**答:**六位数 676800 能同时被 8、9 和 25 整除。

**★★ 迁移题 4** 六位数$\overline{15ABC6}$能被 36 整除，而且所得商最小，问：$A$、$B$、$C$ 的值各是多少？

**【分析与解】** $\because \overline{15ABC6}$能被 36 整除，且 $36=4\times9$，4 和 9 互质，

$\therefore \overline{15ABC6}$被 4 和 9 整除。

（用整除性质：一个数能被两个数的积整除，那么这个数就能同时被这两个数整除）

$\because \overline{C6}$被 4 整除，

$\therefore C$ 为奇数。

由于商尽量小，因此被除数可尽量小，可使 $A=0$，$B=0$，但是此时 $C$ 无论取何值，六位数$\overline{15ABC6}$都不能被 9 整除，因此 $A$ 与 $B$ 不能同时是 0。

若 $A=0$，$B=1$，则 $1+5+0+1+C+6=13+C$ 是 9 的倍数，所以 $C=5$。

故 $A=0$，$B=1$，$C=5$ 时商最小。

**答：**所得商最小时 $A$ 为 0，$B$ 为 1，$C$ 为 5。

**魔法棒**

看到 36 就应想到 4 和 9 是互质的，把 36 转化为 $36=4\times9$，然后再根据性质求其解。

**★★★ 迁移题 5** 一位马虎的采购员买了 72 只桶，洗衣服时将购货发票洗烂了，只能依稀看到：72 只桶，共□67.9□元（□内的数字洗烂了），请你帮他算一算，一共用了多少钱。

**【分析与解】** 将□67.9□元看做□679□分，这是 72 只桶的总价，因为单价 $\times72=$□679□，所以□679□能被 72 整除。$72=8\times9$，所以□679□应该能同时被 8 和 9 整除。

如果□679□能被 8 整除，那么它的末三位一定能被 8 整除，即 8179□，容易算出□内应是 2。因为□6792 能被 9 整除，所以其各数位上数字之和能被 9 整除。$\square+6+7+9+2=\square+24$，显然，□中的数只能是 3。

所以这张发票面额是 367.92 元。

**答：**一共用了 367.92 元。

**魔法棒**

这类题将小数转化为整数，用整除特征很容易求解，因为买桶的只数总是整数。

## 五、能被 7 整除的数的特征

### 精典例题

如果 41 位数$\underbrace{555\cdots5}_{20个5}\square\underbrace{999\cdots9}_{20个9}$能被 7 整除，那么中间方格内的数字是几？

【思路导航】∵ 555 − 555 = 0 是 7 的倍数，

∴ 根据能被 7 整除的数的特征，555555 也能被 7 整除；

同理 999999 也能被 7 整除，

∴ $\underbrace{555\cdots5}_{18个5}$和$\underbrace{999\cdots9}_{18个9}$也能被 7 整除，

∴ 我们可以把这个 41 位数分解成几个数的和，其中部分数能被 7 整除。

> **魔法棒**
>
> 能被 7 整除的数的特征：
>
> 一个整数的末三位数与末三位以前的数字所组成的数之差（以大减小）能被 7 整除。

∵ $\underbrace{555\cdots5}_{20个5}\square\underbrace{999\cdots9}_{20个9}=\underbrace{555\cdots5}_{18个5}\underbrace{00\cdots0}_{23个0}+55\square99\underbrace{00\cdots0}_{18个0}+\underbrace{999\cdots9}_{18个9}$，等号右边的三个加数中，第一个加数和第三个加数都能被 7 整除，

若要 $55\square99\underbrace{00\cdots0}_{18个0}$能被 7 整除，

则 55□99 能被 7 整除。根据能被 7 整除的数的特征，□99 − 55 = □44 也能被 7 整除，可推理得□内应为 6。

**答**：中间方格内的数字是 6。

### 举一反三

**★ 迁移题 1　判断 1059282 是否是 7 的倍数。**

【分析与解】　把 1059282 分为 1059 和 282 两个数。

∵ 1059 − 282 = 777，又∵ 7|777，

∴ 7|1059282。

因此 1059282 是 7 的倍数。

**答**：1059282 是 7 的倍数。

> **魔法棒**
>
> 要判断一个数是否是 7 的倍数，其实就是判断这个数能否被 7 整除。

**★★ 迁移题 2　在□内填上合适的数字，使六位数 19□88□能被 35 整除。**

【分析与解】　设所求的六位数为$\overline{19x88y}$，

∵ 35 = 5 × 7，5 和 7 互质，

∴ 35 能整除$\overline{19x88y}$，则 5、7 能同时整除$\overline{19x88y}$，反过来也成立。