你的差距牵动着我的心

荣德基

剖析

POUXI

新课标新教材

探究开放创造性学习

高中数学

必修5 配人教A版

含教材课后习题答案

http://www.rudder.com.cn

内蒙古少年儿童出版社

用科学的CETC差距理念策划创作

荣德基

剖析

POUXI

新课标新教材

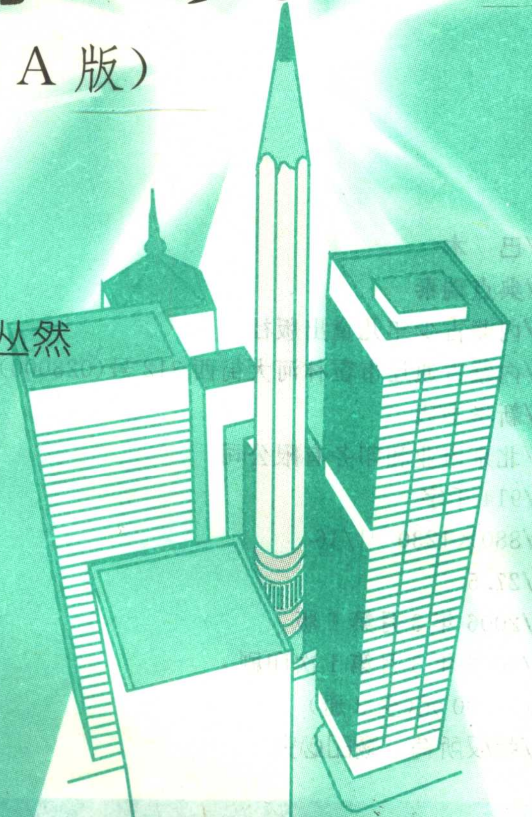
高中数学 必修5

（配人教A版）

总 主 编：荣德基

本册主编：杨明甲

编写人员：王治山　刘丛然



内蒙古少年儿童出版社

图书在版编目(CIP)数据

荣德基剖析新课标新教材.高中数学.5:必修:探究开放创造性学习:人教A版/荣德基主编.—通辽:内蒙古少年儿童出版社,2006.3
ISBN 7-5312-1902-6

Ⅰ.荣… Ⅱ.荣… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

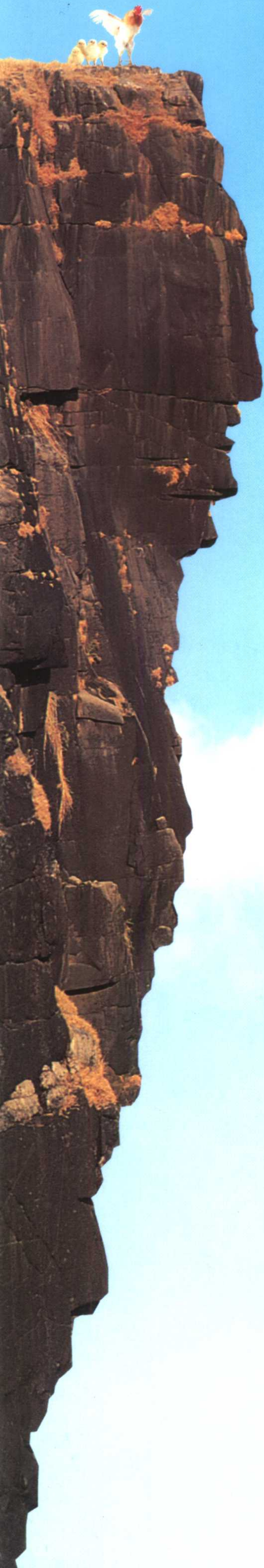
中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第015915号

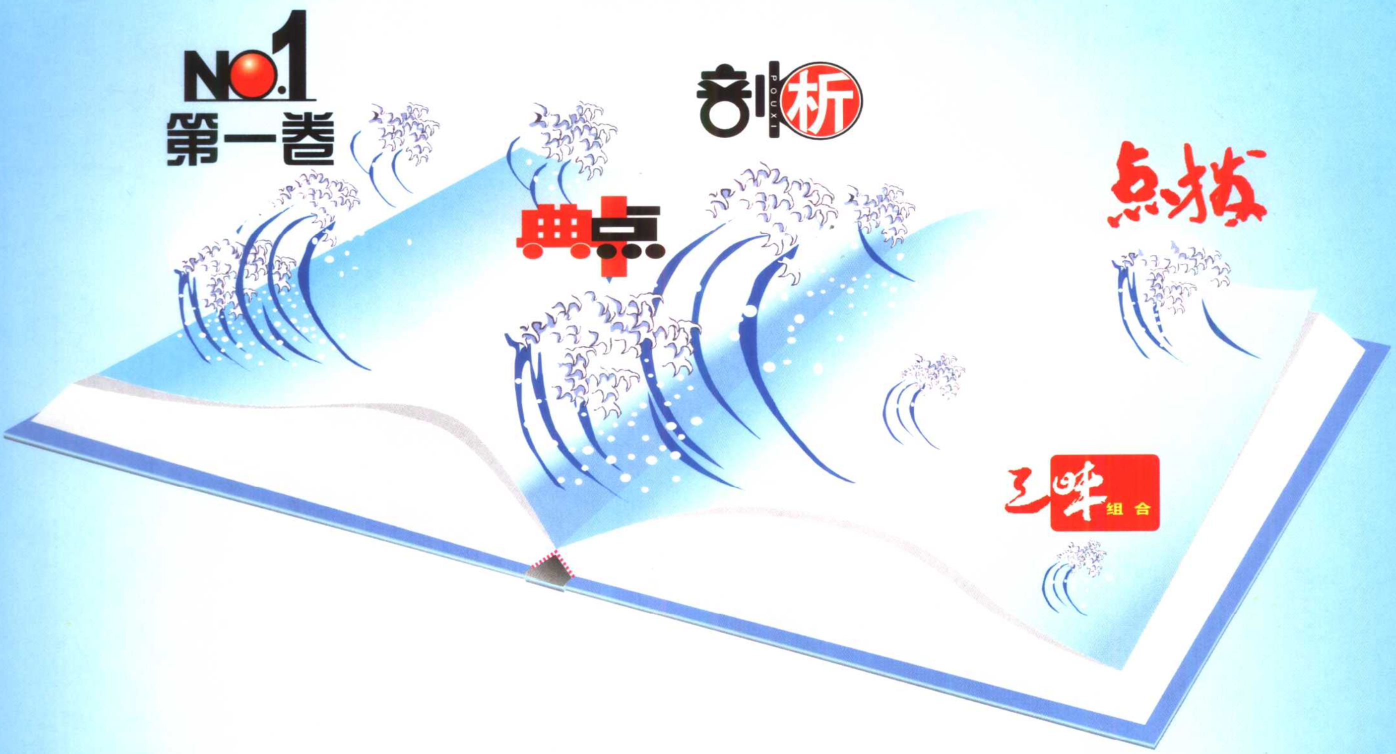
责任编辑/巴　木
装帧设计/典点瑞泰
出版发行/内蒙古少年儿童出版社
地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西312号(028000)
经　　销/新华书店
印　　刷/北京市业和印务有限公司
总 字 数/914千字
规　　格/880×1230　1/16
总 印 张/27.5
版　　次/2006年3月第1版
印　　次/2006年3月第1次印刷
总 定 价/37.00元(全3册)

相信自己是一只雄鹰

一个人在高山之巅的鹰巢里，抓到了一只幼鹰，他把幼鹰带回家，养在鸡笼里。这只幼鹰和鸡一起啄食、嬉闹和休息。它以为自己是一只鸡。 这只鹰渐渐长大，羽翼丰满了，主人想把它训练成猎鹰，可是由于终日和鸡混在一起，它已经变得和鸡完全一样，根本没有飞的愿望了。主人试了各种办法，都毫无效果，最后把它带到悬崖边，一把将它扔了出去。这只鹰像块石头似的，直掉下去，慌乱之中它拼命地扑打翅膀，就这样，它终于飞了起来！

一本书可以让你相信自己是一只雄鹰，那么足慰编者心迹。





在知识的海洋里汲取智慧的浪花

见过一片海，

用渊博的知识激荡起壮阔的海面；

采过一丛花，

因智慧的碰撞绽放开含蓄的花瓣；

有过一个梦，

决定从这里启程……

感动自己是最重要的

——写给荣德教辅所有的读者朋友们

一个学生的名字震撼着一代人。

一个学生的精神感动着所有人。

这个名字就是——洪战辉。

这种精神就是——奋斗！

一个人自立、自强才是最重要的！

一个人通过自己的奋斗改变自己劣势的现状才是最重要的！

同一条求学的路，他走得分外坎坷，也格外坚强。当我们也走在同一条路上，心中是否有同样一个声音在激荡着脚步的节拍？是否有同样的信念鞭策着绷紧的每一根意志神经？

为什么我们会崇拜心目中的英雄？因为每个人心中都有一个英雄梦，当一个人把这个梦实现的时候，便成为了人们心目中的英雄。

为什么我们因为别人的故事而感动，而受到激励？因为我们有着同样的梦想，同样喜欢那种充满激情的生活，喜欢用自己的坚毅涂抹多彩的人生。

为什么我们不自己感动自己？我们同样有坎坷需要面对，有困难需要克服，有挑战需要迎接，而且可能我们还有着比洪战辉优异得多的条件。我们可以，当然可以。

当我们为自己的拼搏和奋斗感动着时，我们时刻都会有百分百的能量去走后面的每一步路。听别人的故事，可以激动一时，不可以感动一生。总会有一些时候，我们忙于自己的学业忘记了心底那份被激励起的激情。那么感动自己，只有感动自己的力量，是无时无刻不存在，是无穷无尽涌出来的，是可以支撑你用奋斗不息来贯穿生命始终的。

我们面对的是知识，是一个永远不能超越的对手，是一个永远开采不尽的矿源。它是丰富人生的色彩，是滋养人生的养料，当我们怀抱虔诚与渴望去追求它的时候，我们才会在这个过程中体会到成长、成熟和成功。而在这个过程中，我们要踏着奋斗和拼搏走过每一步求知的路。

所以，在2006年，在你翻开这本书后，请让我们一起用奋斗来捍卫自己的理想，用拼搏来装扮自己的人生！

《剖析》丛书编委会

2006年3月

震撼学生心灵的学习方法

◆ 撬动灵感的杠杆——荣德基老师创造CETC学习法灵感的由来

创造从学习开始。1997年两本书叫醒了荣老师沉睡的灵感神经，点亮了CETC循环学习法的灵魂之光。她们是《在北大等你》（光明日报出版社出版）和《等你在清华》（中国检察出版社出版）。

书中考入清华和北大的文、理科高考状元及优秀学生，用自己的切身经历，介绍了他们高效率的复习方式和独特的高考心态平衡法。摘录如下：

1. “我习惯于把每次测验中出现的错误记录下来，到下一次考试前翻过来看看，这样就不会重犯过去的错误。”

（熊远萌，1996年广西文科高考第一名 北京大学经济学院）

2. “题不二错。我们班同学大都有一个错题本。通过分析错题，可以明白自己的弱点，更好地查缺补漏。同学们不妨一试。”

（段楠，1995年北京文科高考第一名 北京大学经济学院）

3. “对高考来说，重视一道错题比你做一百道习题也许更为重要。”

（洪淼，1996年河北省文科高考第三名 北京大学法律系）

4. “我高中三年的单元考和期末考的卷子以及高三的各种试卷基本上都保存着，在最后关头把他们拿出来看看，主要是看其中的错题，分析一下错误原因，讨论一下正确做法，使我加深了印象，不让自己再犯相同的错误。”

（徐海燕，1995年四川省理科高考第三名 北京大学生命科学学院）

5. “我建议同学们能建立一个‘错题记录’，仔细分析原因，找出相应的知识点加以巩固强化，这样能避免重复犯同样的错误。”

（尹芊，1997年高考山东省理工科第一名 清华大学化学系）

6. “一个很有效的方法就是做完题后写总结、感想，尤其是对那些想了半天没做出来的或者会做做错的题尤为重要。要把自己为什么不会做或者为什么做错的原因记下来，这样才会有真正的收获，做题的意义也在于此。我自己就一直是这样做的，如果你翻看我做过的习题集或试卷，就会发现随处都是用红笔写的批注，我从中收获极大。”

（陈卓恩，1997年保送清华大学经济管理学院 1997年高考北京市理工科第七名）

7. “要重视自己的学习方法。在学习中，学习方法非常重要，两个智力和勤奋程度差不多的人，方法好的可能会优秀很多。这里我只提供一个比较适用的方法：自己准备一个笔记本，把平时做题中出现的错误都整理上去，写上造成错误的原因和启示。如果你平时做题出错较多，比如一张练习卷要错五、六处或更多，抄错题恐怕得不偿失，这时你可以在试卷上把错题做上标记，在题目的旁边写上评析，然后把试卷保存好，每过一段时间，就把‘错题笔记’或标记错题的试卷翻着看一看，好处会很大。在看参考书时，也注意把精彩之处或做错的题目做上标记，这样以后你再看这本书时就有所侧重了，不必再整个看一遍。”

（魏少岩，1996年平时成绩优秀保送清华）

◆ CETC的灵魂——差距

C—comprehension：听老师讲课，读教材，看教辅，不懂的地方——差距。（为什么不懂，有差距）

E—exercise：做练习题的错题——差距。（练习时为什么做错题，有差距）

T—test：各种考试中做错的题——差距。（考试时为什么做错题，有差距）

C—countermeasure：应对措施——消灭差距的方式方法。（再次做题时，保证题不二错）

锁定差距：C 、E、 T

缩小差距与消灭差距：C

CETC：锁定差距——缩小差距——消灭差距（这是CETC的目标和核心）

荣德基CETC循环学习法：CETC不停地循环——循环——再循环，差距在循环中锁定，在循环中缩小，在循环中消灭。

◆ 荣老师规律总结：

如何对待错误？考上清华、北大的同学们，都有一个错题记录本，关注做错的题，花精力复习做错的题！

目录

第三章　不等式

第一章 解三角形

全章综合剖析

1. 本章的主要内容：正弦定理及其推导，余弦定理及其推导，解三角形及正弦、余弦定理的应用. 2. 在学科中的地位和重要性：在初中，我们学习了直角三角形的性质，直角三角形的两个锐角之间的关系，直角三角形各边之间的关系. 在高中，我们将直角三角形推广到任意三角形，我们将研究一般三角形的性质，主要是正弦、余弦定理及一般三角形的解法. 解三角形在实际中有着广泛重要的应用，例如在测量、建筑、工程技术和物理学中经常用到解三角形问题. 人们常把实际问题中的距离、高度、角度的计算问题归结为三角形的边角关系问题进行求解. 所以，解三角形问题就成为高中数学的一个重要内容. 3. 已学过的关联知识回顾：物理学中力的合成与分解，物理学中有关测量问题及地理学中的方向角知识. 4. 学习注意事项：学习本章知识要注意定理推导的过程和方法，体验定理推导过程，体验由特殊到一般的这种发现事物规律的方法，积极投入到解三角形的学习活动中去，同时要多画图、多观察，回顾联系旧知识，重视向量知识在解三角形中的作用，适当使用计算器. 特别体会正弦、余弦定理的本质要求. 5. 课标新要求新学法：课标要求同学们多交流、多讨论，善于提出新问题、新思路. 鼓励大胆探索研究问题，形成合作意识，创新意识，体验感受学习的过程及方法，增强学习正、余弦定理的兴趣. 学习时要注意“数”“形”结合，使解题更具有指导性.

第一节 正弦定理和余弦定理

A. 基础篇

I. 自主探究与发现

一、自主探究

问题：(1) 如图 1-1-1，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，那么 $\frac{a}{\sin A}=$______，$\frac{b}{\sin B}=$______，$\frac{c}{\sin C}=$______，从中你能找出 $\frac{a}{\sin A}$ 与 $\frac{b}{\sin B}$ 的关系吗？那么 $\frac{a}{\sin A}$ 与 $\frac{c}{\sin C}$ 的关系又如何？(2) 在一般的△ABC 中，$\frac{a}{\sin A}$ 与 $\frac{b}{\sin B}$（或 $\frac{c}{\sin C}$）有何关系？（其中 a、b、c 分别为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边）

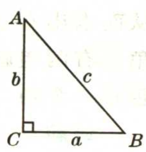


图 1-1-1

二、剖析发现

从问题(1)中我们可以得到 $\frac{a}{\sin A}=c$，$\frac{b}{\sin B}=c$，$\frac{c}{\sin C}=c$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，这个结论是以前没有遇到过的.

问题(2)中，在一般的△ABC 中，也有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 我们分锐角三角形和钝角三角形来讨论. ① 当△ABC 为锐角三角形时，如图 1-1-2，设边 AB 上的高为 CD，根据三角函数的定义，$CD=a\sin B$，$CD=b\sin A$，所以 $a\sin B=b\sin A$. 得到 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$. 同理可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$；② 当△$ABC$ 为钝角三角形时，上面的结论仍然成立，如图 1-1-3，设 $\angle ACB>90°$，过 B 作 $BD\perp AC$，交 AC 的延长线于 D，在 Rt△ABD 中，$BD=c\sin A$. 在 Rt△BCD 中，$BD=a\sin(180°-C)$. 由 $\sin(180°-C)=\sin C$，可得 $BD=a\sin C$. 所以 $c\sin A=a\sin C$，因此有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$.（注：作辅助线是证明上述结论的关键）. 同理可得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 所以 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

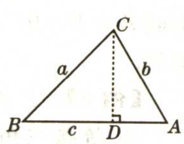


图 1-1-2

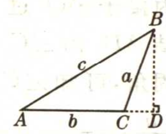


图 1-1-3

II. 教材内容剖析

讲解点 1：正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

详释：（这是重点）正弦定理的数学表达式是 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，用文学语言叙述正弦定理，即在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等. 注意正弦定理的结构特点：分式连等形式，各边对应各角，分子均为边长，分母均为角的正弦值，定理中角可以是锐角，可以是钝角，也可以是直角，a、b、c 为三角形的各边长. 定理体现了三角形中三条边与三个内角之间的密切联系，是边和角的和谐统一. 用正弦定理可以解决解三角形的两类问题：(1) 知道三角形的两边长和其中一边的对角，求另一边的对角；(2) 知道三角形的两个角和一条边长，求其他边长. 用正弦定理可以解决三角形中的边长及角的问题. 求三角形的角时，注意求得的角不一定是一个，可能是两个角. 例如，已知在△ABC 中，求得 $\sin A=\frac{1}{2}$，有的同学立刻求出 $A=30°$，这就错了，应该求出两个角，一个角为 $30°$，另一个角为 $150°$.

【例 1】 如图 1-1-4，已知：$\angle B=30°$，$\angle C=45°$，$b=2$，$a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

求：(1) $\sin 105°$ 的值；(2) c 的长度.

解：(1) $\angle A=180°-\angle B-\angle C=105°$，由 $\frac{b}{\sin B}=$

$\frac{a}{\sin A}$，得 $\frac{2}{\sin 30°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 105°}$. 所以 $\sin 105°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

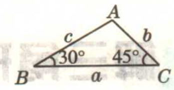


图 1-1-4

（2）由 $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\frac{c}{\sin 45°}=\frac{2}{\sin 30°}$. 所以 $c=\frac{2\sin 45°}{\sin 30°}=2\sqrt{2}$.

规律总结：由例1可知利用正弦定理可求非特殊角的正弦值，还可以求边长，$\triangle ABC$ 为钝角三角形时仍然可用此结论.

讲解点2：正弦定理的另一种形式：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径）.

详释：这是一个常用结论. 由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，可得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$. 如图1-1-5，$\triangle ABC$ 内接于⊙O，过 B 作⊙O 的直径 BD，连结 AD. 由 $\angle C$ 和 $\angle D$ 为同弧所对的圆周角，可知 $\angle C=\angle D$. 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 因为 $\angle C=\angle D$，所以 $\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\sin D}$. 在Rt$\triangle ABD$中，$BD$ 为⊙O 的直径，可设 $BD=2R$，有 $2R\sin D=c$，所以 $\frac{c}{\sin D}=2R$. 所以 $\frac{c}{\sin C}=2R$. 所以有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

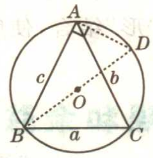


图 1-1-5

【例2】 已知 $\triangle ABC$ 中，$a=1$，$A=30°$，求 $\triangle ABC$ 外接圆的面积.

解：由正弦定理，可得 $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30°}=2$，所以 $R=1$. 所以 $S=\pi R^2=\pi\cdot 1^2=\pi$.

规律总结：正弦定理的另一种形式 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，体现了 $\triangle ABC$ 的边长和角与外接圆的密切关系，知道比值，我们可以求圆的半径，另外知道外接圆的半径，可以求出比值.

【例3】 在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$.

证明：由正弦定理的另一种形式 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，可知 $\frac{a}{b}=\frac{2R\sin A}{2R\sin B}=\frac{\sin A}{\sin B}$. 所以 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$.

规律总结：此题是边长之比转化为角的正弦之比的典范. 利用定理变式来证明一些命题是解三角形问题的一种方法.

【例4】 试证明：在 $\triangle ABC$ 中，有 $a>b\Leftrightarrow \sin A>\sin B$.

证明：由正弦定理，可得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$. 由 $a>b$，可得 $2R\sin A>2R\sin B$. 不等式两边同时除以 $2R$，可得 $\sin A>\sin B$. 反过来，若 $\sin A>\sin B$，由正弦定理可得 $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，所以 $\frac{a}{2R}>\frac{b}{2R}$，得 $a>b$. 证毕.

规律总结：这是三角形中的一个重要命题，可以用此判定三角形的一个内角是锐角还是钝角. 例如，在 $\triangle ABC$ 中，若 $A=45°$ 且 $\sin B=\frac{1}{4}$，则由 $\sin A>\sin B$，可得 $B<45°$，所以 B 为锐角.

讲解点3：用正弦定理解三角形，求角时角不唯一.

详释：（这是易忽略点）由于在 $\triangle ABC$ 中，$0°<A<180°$，$0°<B<180°$，$0°<C<180°$，所以当知道三角形的一个内角的正弦值求角时，在不知道角的范围时，求出的角应该有两个，而不是一个，有些同学往往忽视这个问题，出现解三角形漏解的情况.

【例5】 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=26\text{cm}$，$b=28\text{cm}$，$A=50°$，解三角形.（角度精确到1°，边长精确到1cm）

解：根据正弦定理，得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{28\sin 50°}{26}\approx 0.8250$. 因为 $0°<B<180°$，所以 $B\approx 56°$ 或 $B\approx 124°$.

（1）当 $B\approx 56°$ 时，$C=180°-(A+B)\approx 180°-(50°+56°)=74°$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{26\sin 74°}{\sin 50°}\approx 33(\text{cm})$.

（2）当 $B\approx 124°$ 时，$C=180°-(A+B)\approx 180°-(50°+124°)=6°$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{26\sin 6°}{\sin 50°}\approx 4(\text{cm})$.

规律总结：由题意可知，解此三角形应求出除已知条件 a、b、A 外的 c 和 B、C. 解此题时求得的 B 有两个，从而求出 C 也有两个，所以边长 c 也有两个. 所以此三角形有两组解. 在解三角形时，一定要注意求得的角是否是一个角，从而确定三角形的解是否为一组解.

讲解点4：用正弦定理判定三角形的形状问题.

详释：（这是难点）用正弦定理可以判定三角形的形状问题. 三角形形状主要有：等边三角形、等腰三角形、锐角三角形、钝角三角形、等腰直角三角形、直角三角形、斜三角形等，判定时要充分利用这些三角形形状的特点，根据这些特点转化判定三角形的边、角关系问题. 判定三角形为锐角三角形可利用 $a^2+b^2>c^2\Leftrightarrow C$ 为锐角；$a^2+c^2>b^2\Leftrightarrow B$ 为锐角；$b^2+c^2>a^2\Leftrightarrow A$ 为锐角. 判定三角形为钝角三角形可利用 $a^2+b^2<c^2\Leftrightarrow C$ 为钝角；$a^2+c^2<b^2\Leftrightarrow B$ 为钝角；$b^2+c^2<a^2\Leftrightarrow A$ 为钝角. 等边三角形可利用 $A=B=C$ 或 $a=b=c$. 等腰三角形可利用 $A=B$ 或 $a=b$. 直角三角形可利用 $a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow C$ 为直角或 $A+B=90°$ 或 $\cos C=0$ 或 $\sin C=1$ 或 $\tan C$ 不存在等等.

【例6】 $\triangle ABC$ 中，$a=2b\cos C$，则 $\triangle ABC$ 为（　　）

A. 等腰三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰直角三角形

D. 等腰三角形或直角三角形

解：由正弦定理，得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，代入式子 $a=2b\cos C$，得 $2R\sin A=2\cdot 2R\sin B\cdot\cos C$，所以 $\sin A=2\sin B\cos C$. 因为 $\sin A=\sin(B+C)$，所以 $\sin(B+C)=2\sin B\cos C$，即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\cos C$. 化简、整理，得 $\sin(B-C)=0$. 因为 $0°<B<180°$，$0°<C<180°$，所以 $-180°<B-C<180°$. 所以 $B-C=0°$. 所以 $B=C$. 故选A.

规律总结：判定三角形形状时，如果条件中给出了边和角的关系式，转化等式时一般有以下两个思路：①先化为角的关系式，再化简求值．②先化为边的关系式，再化简求值．

讲解点5：余弦定理

详释：(这是重点)余弦定理实质上就是三个公式．即用公式给出了余弦定理的结构和特点．从余弦定理的推导过程可以看出，余弦定理可以用语言和数学符号来表示，掌握好这个定理要切实把握这个定理的结构特点及变形，公式的右边是两边的平方和减去这两边的积的2倍与这两边的夹角的余弦的积(而非正弦的积)．余弦定理的变形是 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，用此公式可以求三角形的内角．另外，余弦定理还可以进一步变形为 $a^2=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$，$b^2=(a+c)^2-2ac(1+\cos B)$，$c^2=(a+b)^2-2ab(1+\cos C)$．因此知道两边之和、两边之积及这两边的夹角就可以用上面的式子求出第三边，上面的式子实际上体现了根与系数的关系与余弦定理的关系．在余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 中，当 $A=90°$ 时，$\cos A=0$，此时 $a^2=b^2+c^2$，为勾股定理，所以余弦定理是勾股定理的推广，而勾股定理是余弦定理的特例，即 $a^2=b^2+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 时，$A=90°$．

【例7】 在△ABC中，已知 $AB=3$，$BC=4$，$AC=5$，判断△ABC的形状．

解：因为 $BC^2+AB^2=4^2+3^2=5^2=AC^2$，所以 $BC^2+AB^2=AC^2$．所以 $B=90°$．所以△ABC为直角三角形．

规律总结：△ABC为直角三角形⇔$a^2=b^2+c^2$ 或 $b^2=a^2+c^2$ 或 $c^2=a^2+b^2$．

【例8】 △ABC中，已知 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$，那么 C 等于(　　)

A. 30°　B. 60°　C. 45°或135°　D. 120°

解：由已知 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$，得 $(a^2+b^2-c^2)^2-2a^2b^2=0$，即 $(a^2+b^2-c^2)^2=2a^2b^2$．所以有 $a^2+b^2-c^2=\pm\sqrt{2}ab$．由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\pm\sqrt{2}ab}{2ab}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$．所以 $C=45°$ 或 $135°$．故选C．

规律总结：本题是先化简条件式 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$ 为 $a^2+b^2-c^2=\pm\sqrt{2}ab$，然后再利用余弦定理求出角 C 的余弦值，所以对已知式子进行变形是解题的突破口．

讲解点6：余弦定理与三角形的形状

详释：(这是易忽略点)利用余弦定理可以判定三角形的，内角是锐角、直角还是钝角．因为当 A 为锐角时，$\cos A>0$．由 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2>0$，所以 $a^2<b^2+c^2$．同理可证，当 A 为钝角时，由于 $\cos A<0$，所以 $2bc\cos A<0$．所以 $b^2+c^2-a^2<0$．所以 $a^2>b^2+c^2$．同理，当 A 为直角时，$a^2=b^2+c^2$．所以在△ABC中，有 A 为锐角⇔$a^2<b^2+c^2$；A 为直角⇔$a^2=b^2+c^2$；A 为钝角⇔$a^2>b^2+c^2$．用这一结论可以判断在△ABC中的角是锐角、钝角还是直角，进而可以判定一个三角形是锐角三角形、钝角三角形还是直角三角形，这是许多同学易忽视的一个问题．

【例9】 已知△ABC的三边分别为15，19，23，将三边各减去 x 后，得一个钝角三角形．求 x 的取值范围．

解：由题意，构成△ABC为钝角三角形的三边长分别为 $15-x$，$19-x$，$23-x$，可知 $23-x$ 最大．又因为△ABC是钝角三角形，所以由上面的结论得 $(23-x)^2>(15-x)^2+(19-x)^2$．化简得 $x^2-22x+57<0$．解得 $3<x<19$．因为 $x<15$，所以 $3<x<15$．所以 x 的取值范围为 $3<x<15$．

规律总结：本题实际上就是已知三角形的三边长，利用上面的结论求解．

讲解点7：用余弦定理求角

详释：(这是易错点)根据余弦定理的推论，即 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}$ 可知，已知三角形三边长，可求出三个内角．这是余弦定理的一个重要应用．在用余弦定理求角时，应特别注意角的范围的确定．

【例10】 在△ABC中，三边满足 $\frac{a^2-(b-c)^2}{bc}=1$，求 A．

解：由已知，得 $a^2-(b-c)^2=bc$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$．$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$，又因为 $0°<A<180°$，所以 $A=60°$．

规律总结：本题已知三角形中的三边关系，利用余弦定理求出角 A 的余弦，从而根据角的范围求出角 A．

【例11】 已知△ABC的三边分别为 m、n、$\sqrt{m^2+n^2+mn}$，那么这个三角形的最大角是多少？

解：因为 $m>0$，$n>0$，所以 $\sqrt{m^2+n^2+mn}>m$，$\sqrt{m^2+n^2+mn}>n$．所以边 $\sqrt{m^2+n^2+mn}$ 最大．设这个边所对的角为 A．由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{m^2+n^2-m^2-n^2-mn}{2mn}=-\frac{1}{2}.$$

因为 $0°<A<180°$，所以 $A=120°$．因此这个三角形的最大角为120°．

规律总结：求三角形的最大角就是找三角形的最大边，只要找出三角形的最大边，根据余弦定理可求出最大角的余弦，从而求出最大角．这里运用了大边对大角，小边对小角的三角形的性质．

【例12】 在△ABC中，$a=7$，$b=4\sqrt{3}$，$c=\sqrt{13}$，求△ABC的最小角．

解：因为 $a>b>c$，所以边 c 所对的角为最小角．由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$．所以 $\cos C=\frac{7^2+(4\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times7\times4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．又因为 $0°<C<180°$，所以 $C=30°$．所以△ABC的最小角为30°．

规律总结:本题已知三角形的三边,求最小角. 根据三角形大边对大角、小边对小角的性质,找出三角形的最小边,用余弦定理求出.

讲解点8:求范围问题.

详释:(这是难点)求范围问题一般有两类:一类是角的范围;另一类是边的范围. 在这里还包括求角的最值,边长的最值问题,解此类问题要充分利用余弦定理确定出角的余弦值的范围,再根据余弦函数单调性确定出最大角(最小角),进而求出角的范围,求边长问题要充分利用边长大于零,还常常利用两边之和大于第三边这一三角形的重要性质. 这类问题是同学们感到很困难的一类问题,难就难在不易确定最大角(最小角)或最长(短)的边.

【例13】 在$\triangle ABC$中,若$\sin A:\sin B:\sin C=m:(m+1):(m+2)$,求$m$的范围.

解:由正弦定理,可知$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=m:(m+1):(m+2)$. 所以可设$a=mk$,$b=(m+1)k$,$c=(m+2)k$. 由三角形的性质,可知$mk+(m+1)k>(m+2)k$,$mk+(m+2)k>(m+1)k$,$(m+1)k+(m+2)k>mk$. 解得$m>1$,且$m>-1$,且$m>-3$. 所以$m>1$. 所以$m$的范围为$m>1$.

规律总结:本题从正弦定理入手,把角的问题转化为边的问题,然后根据构成三角形的条件建立不等式组,解不等式组.

【例14】 在$\triangle ABC$中,$AB=1$,$AC=2$,求C的最大值.

解:根据三角形的两边之和大于第三边,得$AB+AC>BC$,$AB+BC>AC$,$AC+BC>AB$,得$1<BC<3$. 由余弦定理,得$\cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{4+BC^2-1}{2\cdot 2\cdot BC}=\dfrac{BC^2+3}{4BC}$. 令$y=\cos C=\dfrac{BC^2+3}{4BC}$,设$BC=x$,则有$y=\dfrac{x^2+3}{4x}$,所以$x^2+3=4yx$. 所以$x^2-4yx+3=0$. 所以$\begin{cases}\Delta=16y^2-12\geqslant 0,\\ x_1+x_2=4y>0,\\ x_1\cdot x_2=3>0.\end{cases}$ 解不等式组,得$y\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以$y_{最小}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 所以$\cos C\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 根据余弦函数的单调性,得$0°<C\leqslant 30°$,所以$C$的最大值为$30°$.

规律总结:解本题先从求第三边的范围入手,用边BC表示角C的余弦值,建立一个关于BC的函数,再用判别式法求出这个函数的最小值,从而确定出相应角的最大值,在此利用了余弦函数在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减.

【例15】 设$2a+1$,a,$2a-1$为钝角三角形的三边,求a的取值范围.

解:由题意,知$a>0$. 因为$2a+1>0$,$2a-1>0$,所以$a>\dfrac{1}{2}$. 所以$2a+1$最大. 因为是钝角三角形,所以$(2a+1)^2>a^2+(2a-1)^2$,即$a^2-8a<0$. 解得$0<a<8$. 因为$a>\dfrac{1}{2}$,所以$\dfrac{1}{2}<a<8$. 又因为三边构成三角形,所以有$\begin{cases}2a+1+a>2a-1,\\ 2a+1+2a-1>a,\\ 2a-1+a>2a+1,\end{cases}$ 解得$a>2$. 所以a的取值范围为$2<a<8$.

规律总结:解本题要注意:三角形为钝角三角形;$2a+1$,a,$2a-1$为三角形的三边;这三边构成三角形的条件. 正确把握这三条是解好此题的前提条件. 所以正确用好题目中的条件,充分挖掘题目中的隐含条件是正确解答数学题的必备条件. 在这里题目中的隐含条件是三边$2a+1$,a,$2a-1$构成三角形,这一点同学们往往容易忽视.

【例16】 $\triangle ABC$中,$a+b=10$,而$\cos C$是方程$2x^2-3x-2=0$的一个根,求$\triangle ABC$周长的最小值.

解:设另一边长为c,方程$2x^2-3x-2=0$的根为$x_1=-\dfrac{1}{2}$,$x_2=2$. 因为$\cos C\leqslant 1$,所以$\cos C=-\dfrac{1}{2}$. 由余弦定理,得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-2ab\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab=100-ab$. 又$c^2=100-a\cdot(10-a)=100+a^2-10a=100+(a-5)^2-25$,所以要使$\triangle ABC$的周长最小,只需$c$最小. 又$c=\sqrt{100+(a-5)^2-25}=\sqrt{75+(a-5)^2}$,所以当$a=5$时,$c$最小,为$5\sqrt{3}$. 所以$\triangle ABC$周长的最小值为$10+5\sqrt{3}$.

规律总结:本题求出角C的余弦,然后把边c表示出来,求$\triangle ABC$周长的最小值即求c的最小值. 通过消元把c表示成关于a的二次函数,求出c的最小值. 从而求出$\triangle ABC$周长的最小值.

【例17】 在$\triangle ABC$中,$B=60°$,最大边与最小边之比为$(\sqrt{3}+1):2$,求最大角.

解:设c为最大边,a为最小边,则$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. 设$c=(\sqrt{3}+1)k$,$a=2k(k>0)$,由余弦定理,有$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(2k)^2+[(\sqrt{3}+1)k]^2-2\cdot 2k\cdot(\sqrt{3}+1)k\cdot\cos 60°=4k^2+(4+2\sqrt{3})k^2-2(\sqrt{3}+1)k^2=6k^2$,所以$b=\sqrt{6}k$. 因为$(\sqrt{3}+1)k>\sqrt{6}k>2k$,所以最大角$C$的余弦值为$\cos C=\dfrac{(2k)^2+(\sqrt{6}k)^2-[(\sqrt{3}+1)k]^2}{2\cdot 2k\cdot\sqrt{6}k}=\dfrac{10-(4+2\sqrt{3})}{4\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. 所以$C=75°$. 所以最大角为$75°$.

规律总结:解本题由边长之比得边的关系,求出三边长,从而确定出最大角的余弦值,求出最大角.

讲解点9:证明问题.

详释:用正、余弦定理可以证明与三角形有关的等式、定值等问题,证明时要充分利用三角函数的有关公式,即在$\triangle ABC$中,有$A+B+C=180°$,$A=180°-(B+C)$,$\sin A=\sin(B+C)$,$\cos A=-\cos(B+C)$,$\tan A=-\tan(B+C)$;$\dfrac{A}{2}=90°-\dfrac{B+C}{2}$,$\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2}$,$\cos\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B+C}{2}$,$\tan\dfrac{A}{2}=\cot\dfrac{B+C}{2}$等.

【例18】 在$\triangle ABC$中,证明$a\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

证法一：左边$=a\cdot\frac{1+\cos C}{2}+c\cdot\frac{1+\cos A}{2}=\frac{a+c}{2}+\frac{1}{2}a\cos C+\frac{1}{2}c\cos A=\frac{a+c}{2}+\frac{1}{2}\left(a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{a+c}{2}+\frac{2b^2}{4b}=\frac{a+b+c}{2}=$右边，所以等式成立.

证法二：由正弦定理得$a=2R\sin A$，$c=2R\sin C$，代入等式左边，左边$=2R\sin A\cdot\frac{1+\cos C}{2}+2R\sin C\cdot\frac{1+\cos A}{2}=R(\sin A+\sin A\cos C+\sin C+\cos A\sin C)=R(\sin A+\sin C+\sin A\cos C+\cos A\sin C)=R[\sin A+\sin C+\sin(A+C)]=R(\sin A+\sin C+\sin B)=\frac{2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C}{2}=\frac{a+b+c}{2}=$右边，所以等式成立.

规律总结：证法一是利用余弦定理把角的关系化为边的关系，从左边推出右边，而证法二是利用正弦定理把边的关系先化为角的关系，再利用正弦定理化为边的关系，从而得证. 一般地说，证明等式一般有两个思路：第一是把边化为角，再用公式证明；第二是把角化为边，再用公式证明.

【例 19】 $\triangle ABC$中，A、B、C所对的边分别为a、b、c，且$\sin A\cdot\cos^2\frac{C}{2}+\sin C\cdot\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3}{2}\sin B$，求证：$2b=a+c$.

证明：左边$=\sin A\cdot\frac{1+\cos C}{2}+\sin C\cdot\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1}{2}(\sin A+\sin C+\sin A\cos C+\cos A\sin C)=\frac{1}{2}(\sin A+\sin C)+\frac{1}{2}\sin(A+C)=\frac{1}{2}(\sin A+\sin C+\sin B)$，右边$=\frac{3}{2}\sin B$，又左边$=$右边，所以$\frac{1}{2}(\sin A+\sin C+\sin B)=\frac{3}{2}\sin B$. 所以有$\sin A+\sin B+\sin C=3\sin B$. 从而有$\sin A+\sin C=2\sin B$. 所以有$2R\sin A+2R\sin C=4R\sin B$. 由正弦定理，得$a+c=2b$. 所以$2b=a+c$成立.

规律总结：本题给出角的关系，证明边的关系，所以应从角转化为边入手，充分利用倍角公式、三角函数的诱导公式及正弦定理，再根据条件式转化为边的关系得到证明.

B. 应用篇

Ⅲ. 应用剖析

一、知识点综合应用剖析

知识点综合应用问题：利用正、余弦定理解斜三角形.

详释：利用正、余弦定理解斜三角形主要有四种类型：(1)已知三角形的两角及任一边，求其余的边和角；(2)已知三角形的两边及夹角，求其余的边和角；(3)已知三角形的三边，求三角形的三个内角；(4)已知三角形的两边及一边的对角，求其余的边和角.

在解三角形时，要根据已知条件灵活选用正、余弦定理，在求角时，能用余弦定理时要尽量用余弦定理，用正弦定理虽然计算量较小，但易产生增解或漏解. 同时要注意$A+B+C=\pi$这一隐含条件的应用.

1. 已知两角及任一边，求其余边和角.

【例 1】 在$\triangle ABC$中，$C=45°$，$A=60°$，$b=2$，求B,a,c.

解：因为$A+B+C=180°$，所以$B=180°-45°-60°=75°$. 由正弦定理，得$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$，$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}=2\sqrt{3}-2$.

综上知，$B=75°$，$a=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$，$c=2\sqrt{3}-2$.

规律总结：此类题应先由$A+B+C=180°$求出第三个角，然后再由正弦定理求出另两边.

2. 已知两边及夹角，求其余的边和角.

【例 2】 在$\triangle ABC$中，已知$b=5$，$c=5\sqrt{3}$，$A=30°$，求a、B、C.

解法一：由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=25+75-2\times5\times5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=25$. 所以$a=5$. 由余弦定理，得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{25+75-25}{2\times5\times5\sqrt{3}}=\frac{75}{50\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为$B\in(0°,180°)$，所以$B=30°$.

由$A+B+C=180°$，得$C=180°-A-B=180°-30°-30°=120°$. 综上知，$a=5$，$B=30°$，$C=120°$.

解法二：由解法一知$a=5$，由正弦定理，得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{5\times\frac{1}{2}}{5}=\frac{1}{2}$. 因为$b<c$，所以$B$为锐角. 所以$B=30°$. 以下同解法一.

规律总结：在解三角形时，要注意"等边对等角"，"大边对大角"这两个结论的应用.

3. 已知三边，求三个内角.

【例 3】 在$\triangle ABC$中，已知$a=\sqrt{13}$，$b=4$，$c=3$，求角A、B、C.

解：由余弦定理，得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2\times4\times3}=\frac{1}{2}$，所以$A=60°$. $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(\sqrt{13})^2+3^2-4^2}{2\times\sqrt{13}\times3}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，所以$B\approx73°54'$. 因为$A+B+C=180°$，所以$C=180°-(A+B)\approx180°-(60°+73°54')=46°6'$.

规律总结：已知三边求角时，我们往往是根据余弦定理先求出两角，再由$A+B+C=180°$求出第三个角，计算时要细心.

4. 已知两边及一边的对角，求其余的边和角.

【例 4】 在$\triangle ABC$中，$a=2\sqrt{3}$，$b=6$，$A=30°$，求边c和角B、C.

解：由正弦定理，得$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{6\sin30°}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；又因为$b\sin A=6\sin30°=3$，$a>b\sin A$，所以$B$有两解，$B=60°$或$120°$.

(1)当$B=60°$时，$C=90°$，此时由正弦定理，得$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\sin90°}{\sin30°}=4\sqrt{3}$；(2)当$B=120°$时，$C=30°$，此时由正弦定理，得$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}\sin30°}{\sin30°}=2\sqrt{3}$. 综上知，当$B=60°$时，$C=90°$，$c=4\sqrt{3}$；当$B=120°$时，$C=$

$30°, c=2\sqrt{3}$.

规律总结:已知两边及一边的对角,应用正弦定理求另一个角时,一定要根据题意讨论解的情况.以防漏解.

二、实际应用剖析

(一)本节知识在经济和科学技术中的应用

实际应用问题1:在科研方面的应用.

详释:在科学研究的过程中,科研人员往往要研究一些三角形中的边角关系,从而确定符合条件的最佳位置,这就需要运用正弦定理、余弦定理进行测量,计算.

【例5】 一次机器人足球比赛中,甲队1号机器人由A点开始作匀速直线运动,到达点B时,发现足球在点D处正以2倍于自己的速度向点A作匀速直线滚动,如图1-1-6所示,已知$AB=4\sqrt{2}$dm,$AD=17$ dm,$\angle BAC=45°$,若忽略机器人原地旋转所需的时间,则该机器人最快可在何处截住足球?

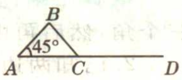


图1-1-6

解:设该机器人最快可在点C处截住足球,点C在线段AD上.设$BC=x$ dm,由题意,$CD=2x$ dm.$AC=AD-CD=(17-2x)$dm.在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$,即$x^2=(4\sqrt{2})^2+(17-2x)^2-8\sqrt{2}(17-2x)\cos45°$.解得$x_1=5$(dm),$x_2=\frac{37}{3}$(dm).

所以$AC=17-2x=7$(dm)或$AC=-\frac{23}{3}$(dm)(舍去).所以该机器人最快可在线段AD上离A点7 dm的点C处截住足球.

规律总结:解此题的关键是搞清机器人截住足球的地方正是机器人与足球同时到达的地方,然后利用余弦定理建立方程.

(二)本节知识在日常生活中的应用

实际应用问题2:相遇问题.

详释:在日常生活中,汽车、轮船、飞机在航行或执行任务时,经常出现两只船,两架飞机,两辆汽车等要相遇的问题.这就需要构造三角形,利用正、余弦定理来解他们相遇的方向、时间或地点等.

【例6】 甲船在A点发现乙船在北偏东60°的B点处,测得乙船以每小时a海里的速度向正北行驶.已知甲船速度是每小时$\sqrt{3}a$海里,则甲船如何航行才能最快地与乙船相遇?

解:如图1-1-7,设两船最快在C点相遇.在$\triangle ABC$中,$B=120°$,AB为定值,AC、BC分别是甲船与乙船在相同时间里的行程,由已知条件有$AC:BC=\sqrt{3}a:a=\sqrt{3}:1$,由正弦定理,得$\sin\angle CAB=\frac{BC}{AC}\sin B=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin120°=\frac{1}{2}$.又$0°<\angle CAB<60°$,所以$\angle CAB=30°$.而甲的航向是$60°-\angle CAB=60°-30°=30°$.故甲船向北偏东30°的方向航行,才能最快地与乙船相遇.

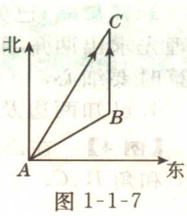


图1-1-7

规律总结:解此题的关键是根据题意画出图形,将图形中的已知条件与未知量之间的关系转化为三角形中的边角关系,然后利用正弦定理求解.

【例7】 在海岸A处,发现北偏东45°方向距A为$(\sqrt{3}-1)$n mile的B处有一艘走私船,在A处北偏西75°方向距A为2 n mile的C处的我方缉私艇奉命以$10\sqrt{3}$n mile/h的速度追截走私船,此时走私船正以10 n mile/h的速度,从B处向北偏东30°方向逃窜,问缉私艇沿什么方向行驶才能最快追上走私船?并求出所需时间.

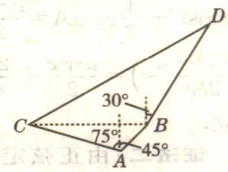


图1-1-8

解:如图1-1-8,连结BC,设在点D处缉私艇追上走私船,所用时间为th.在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos(75°+45°)}=\sqrt{4+(\sqrt{3}-1)^2+2(\sqrt{3}-1)}=\sqrt{6}$.由图知$\angle CBD=120°$,$\sin\angle BCD=\frac{BD\cdot\sin\angle CBD}{CD}=\frac{10t\sin120°}{10\sqrt{3}t}=\frac{1}{2}$,

$\angle BCD=30°$.$\angle BDC=180°-120°-30°=30°$,所以$\triangle BCD$为等腰三角形,$BD=BC=\sqrt{6}$.故$10t=\sqrt{6}$,$t=\frac{\sqrt{6}}{10}$(h).即缉私艇沿北偏东60°方向行驶,需$\frac{\sqrt{6}}{10}$h便可追上走私船.

规律总结:解此题的关键是根据题意作出图形,将实际问题转化为解三角形,然后利用正弦定理,余弦定理进行求解.

实际应用问题3:测量问题.

详释:在日常生活中,一些较高的建筑物、两个无法到达的地方等,我们无法直接测量它们的高度或两地的距离.但是如何得到这些数据呢?这时我们就需要构造三角形,将其转化为三角形中的边角关系,然后利用正弦定理、余弦定理进行求解.

【例8】 如图1-1-9所示,在地面上有一旗杆OP,为测得它的高度h,在地面上取一线段AB,$AB=20$ m,在A处测得P点的仰角$\angle OAP=30°$,在B处测得P点的仰角$\angle OBP=45°$,又测得$\angle AOB=60°$,求旗杆的高度.(精确到0.1 m)

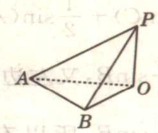


图1-1-9

解:在Rt$\triangle PAO$中,$AO=\frac{h}{\tan30°}=\sqrt{3}h$;在Rt$\triangle PBO$中,$BO=\frac{h}{\tan45°}=h$.又在$\triangle ABO$中,由余弦定理,得$20^2=(\sqrt{3}h)^2+h^2-2\sqrt{3}h\cdot h\cos60°$,解得$h=\frac{20}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}\approx13.3$(m).

规律总结:解此题的关键是将AO、BO的长度分别用旗杆的高度h表示,然后在$\triangle AOB$中利用余弦定理求出h.

【例9】 隔河看两目标A与B,但不能到达,在岸边选取相距$\sqrt{3}$km的C、D两点,同时,测得$\angle ACB=75°$,$\angle BCD=45°$,$\angle ADC=30°$,$\angle ADB=45°$(A、B、C、D在同一平面内).求两目标A、B之间的距离.

解:由题意作示意图1-1-10.

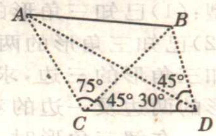


图1-1-10

在$\triangle ACD$中,因为$\angle ADC=30°$,$\angle ACD=120°$,所以$\angle CAD=30°$.所以$AC=CD=\sqrt{3}$.在$\triangle BDC$中,$\angle CBD=180°-45°-75°=60°$.

由正弦定理,可得$BC=\frac{\sqrt{3}\sin75°}{\sin60°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,可得$AB^2=$

$AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle BCA$，所以 $AB^2=(\sqrt{3})^2+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cos75^\circ=5$. 所以 $AB=\sqrt{5}$(km). 即两目标 A、B 间的距离为$\sqrt{5}$km.

规律总结：解此题的关键是根据题意作出示意图，然后将已知条件转化为三角形中的边角关系. 要注意此题没要求取近似值，用$\sqrt{5}$表示即可，可以不用化成小数.

(三)本节知识的其他实际应用

实际应用问题 4：确定台风侵袭的区域.

详释：台风一般都是按一定方向、一定的速度移动，利用正、余弦定理可以判断出在某个时间段台风会侵袭哪些城市，做到早知道早预防.

【例 10】 在某城市 A 正西方向 300 km 处有一台风中心，它以 40 km/h 的速度向东北方向移动，距离台风中心250 km以内的地方都受其影响，问从现在起，大约多长时间后，城市 A 所在地将遭受台风影响，持续多长时间？

解：如图 1-1-11，设台风从 A 的正西方向 300 kmB 处沿 BE 方向移动，$\angle ABE=45^\circ$，以 A 为圆心，250 km为半径画圆，交 BE 于 C、D 两点. 设 $BC=x_1$，$BD=x_2$，由余弦定理可知，x_1、x_2 都满足方程 $250^2=x^2+300^2-2\times300x\cos45^\circ$，整理得 $x^2-300\sqrt{2}x+27500=0$，解得 $x_1\approx79.8$，$x_2\approx344.4$，$79.8\div40\approx2.0$，$(344.4-79.8)\div40\approx6.6$. **答**：大约 2.0 h 后，A 将遭受台风影响，持续时间约 6.6 h.

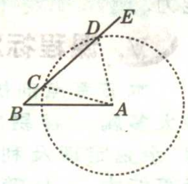


图 1-1-11

规律总结：通过构造辅助圆，转化为求 BC、BD 的长度. 解决此类题的关键是根据题意作出图形，以形助数，从中体会数形结合思想的应用.

C. 拔高篇

Ⅳ. 课程标准要求剖析

一、开放性问题剖析

问题入门指导：开放性问题就是给出问题的某些条件，问题答案不唯一，或者是问题的结论确定，探究问题结论成立所满足的多个条件，解决这样的问题能激发我们的思维，提高解决问题的能力. 例如测量河对岸上两点的距离的方法，这需要我们综合考虑解三角形的多种方法.

【例 1】 如图 1-1-12 所示，有一条河 MN，河岸的一侧有一很高的建筑物 AB，一人位于河岸另侧 P 处(P 位于开阔地域)，手中有一个测角器(可以测仰角)和一个可以测量长度的皮尺(测量长度不超过5 米). 请你设计一种测量方案(不允许过河)，并给出计算建筑物的高度 AB 及距离 PA 的公式，希望在你的方案中被测量数据的个数尽量少.

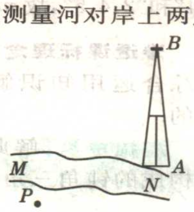


图 1-1-12

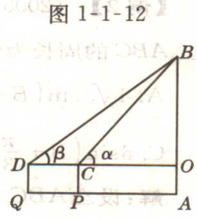


图 1-1-13

解：如图 1-1-13 所示，被测量的数据为 PC(测角器的高)和 PQ(Q 为在 AP 所在直线上选取的另一测量点)的长度，仰角 α 和 β. 在△BCD 中应用正弦定理，得

$$\frac{CD}{\sin\angle DBC}=\frac{BC}{\sin\beta},BC=\frac{CD\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

在 Rt△BOC 中，$\sin\alpha=\frac{BO}{BC}$.

所以 $BO=BC\sin\alpha=\frac{CD\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{PQ\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. $CO=BC\cos\alpha=\frac{CD\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{PQ\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$，所以 $AB=OA+BO=PC+\frac{PQ\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$，$PA=CO=\frac{PQ\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$.

课标剖析：多开动脑筋，设计出尽量多的合理的方案，有利于培养综合能力.

二、探究性问题剖析

问题入门指导：充分利用已知条件和正、余弦定理以及三角形的有关性质探求结论. 根据正弦定理解三角形时，其解可能有 1 个、2 个或无解，这就需要根据构成三角形的条件来判断其解的个数.

【例 2】 在△ABC 中，若 $a=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$，讨论当 b 为何值(或在什么范围内)时三角形有一组解，有两组解，无解？

解：由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$ 知，①当 $b\sin A<a<b$ 时，有两组解，此时 $2\sqrt{3}<b<4\sqrt{3}$；②当 $a\geqslant b$ 或 B 为 90°(b 为斜边)时，有一组解，此时 $0<b\leqslant2\sqrt{3}$ 或 $b=4\sqrt{3}$；③当 $a<b\sin A$ 时，无解，此时 $b>4\sqrt{3}$.

课标剖析：对不会的题目，或自己搞不清的知识点，多与同学讨论、交流，你会收获很大.

三、情景性问题剖析

问题入门指导：在近几年的高考中，出现了一些新情景性问题，解决此类题要在理解题意的基础上，将情景性问题转化为数学问题，将情景中的有关量转化为三角形中的边和角，然后利用正、余弦定理去解决.

【例 3】 如图 1-1-14，海中有一小岛 A，它周围 8 海里内有暗礁，渔船跟踪鱼群自西向东航行，在 B 点测得小岛 A 在北偏东 60°，航行 12 海里后到达 D 处，又测得小岛在北偏东 35°，如果渔船不改变航向继续前进，有无触礁的危险？

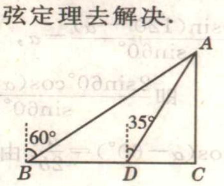


图 1-1-14

解：在△ABD 中，$\angle ABD=30^\circ$，$\angle ADB=125^\circ$，则 $\angle BAD=25^\circ$. 又 $BD=12$，由正弦定理得 $AD=\frac{BD\sin30^\circ}{\sin25^\circ}=\frac{12\times\frac{1}{2}}{\sin25^\circ}=\frac{6}{\sin25^\circ}$. 在 Rt△ACD 中，$AC=AD\sin55^\circ\approx11.63$. 因为 $11.63>8$，所以渔船继续向东航行，无触礁危险.

课标剖析：在用数学知识解决实际问题时，要从中体会数学来源于生活并服务于生活的过程.

四、试一试

问题入门指导：对于含有参数的问题，在判断三角形的形状时，要根据各种三角形应满足的条件进行分类讨论. 此类题往往不知如何讨论，找不到分类的标准. 在做此类题目时，同学们要大胆尝试，总结规律，寻求方法.

【例 4】 在△ABC 中，$AB=m$，$BC=m+p(m>0,p>0)$，$AC=\sqrt{m^2+n^2}$，若 $m^2=n^2+p^2$，试分别就下列三种情况讨论△ABC 的形状. ①$0<\frac{p}{m}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；②$\frac{p}{m}$

$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$；③$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{p}{m}<1$.

解:因为 AB 是△ABC 三边中的最小边，所以它的对角 C 一定是锐角. 下面再对 B 与 A 是否大于 90°作出判断：$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{2mp+2p^2}{2AB\cdot BC}>0$(因为 $m^2=n^2+p^2$)，所以 B 一定是锐角. $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{2m^2-2mp-2p^2}{2AB\cdot AC}=\frac{m^2-mp-p^2}{AB\cdot AC}$，①当 $0<\frac{p}{m}<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$m^2-mp-p^2>0$，此时 A 为锐角，△ABC 为锐角三角形；②当 $\frac{p}{m}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时，$m^2-mp-p^2=0$，此时 A 为直角，△ABC 为直角三角形；③当 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\frac{p}{m}<1$ 时，$m^2-mp-p^2<0$，此时 A 为钝角，△ABC 为钝角三角形.

课标剖析:分类讨论思想是高考的重点，分类的关键是做到不重不漏，考虑全面，培养严密的逻辑思维能力.

五、做一做

问题入门指导:有些题目涉及的图形难以想象，但可以利用身边的材料制作一些模型，将抽象问题直观化，再寻求解题思路.

【例 5】 正三角形钢板内截一内接正三角形，(1)当截得的面积为原钢板面积的 $\frac{1}{2}$ 时，应按怎样的位置截取？(2)何时截得的面积最小？最小面积为多少？

解:(1)如图 1-1-15，设原钢板边长为 a，截得的三角形边长为 b，$\angle BED=\alpha$，则 $BD+BE=\frac{b\sin\alpha}{\sin60°}+\frac{b\sin(120°-\alpha)}{\sin60°}=a$，

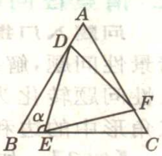


图 1-1-15

即 $\frac{2\sin60°\cos(\alpha-60°)}{\sin60°}=\frac{a}{b}$. 所以 $\cos(\alpha-60°)=\frac{a}{2b}$. 由相似三角形的性质得 $\left(\frac{a}{b}\right)^2=2$，所以 $\frac{a}{b}=\sqrt{2}$. 所以 $\cos(\alpha-60°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为在三角形中，所以 $\alpha=105°$ 或 $\alpha=15°$. 当 $\alpha=105°$ 时，$BD=\frac{b\sin105°}{\sin60°}=\frac{(3+\sqrt{3})a}{6}$，$BE=\frac{(3-\sqrt{3})a}{6}$. 当 $\alpha=15°$ 时，$BD=\frac{(3-\sqrt{3})a}{6}$，$BE=\frac{(3+\sqrt{3})a}{6}$. (2)因为面积之比为 $\frac{a^2}{b^2}=4\cos^2(\alpha-60°)$，所以当 $\alpha=60°$ 时截得的面积最小，最小面积为原来的 $\frac{1}{4}$.

课标剖析:认真理解题意，联系所学知识寻求解题思路，提高分析问题和解决问题的能力.

六、观察与思考

问题入门指导:在判断三角形的形状或证明三角恒等式时，用正弦定理还是余弦定理需要认真观察所给代数式的结构特征. 根据其结构特征，认真思考，灵活选用正、余弦定理来解决问题.

【例 6】 在△ABC 中，若 $b^2\sin^2C+c^2\sin^2B=2bc\cos B\cos C$，请判断三角形的形状.

解法一:将已知等式变为

$b^2(1-\cos^2C)+c^2(1-\cos^2B)=2bc\cos B\cos C$.

由余弦定理，可得 $b^2+c^2-b^2\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2-c^2\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2=2bc\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

即 $b^2+c^2=\frac{[(a^2+b^2-c^2)+(a^2+c^2-b^2)]^2}{4a^2}=a^2$，

于是有 $b^2+c^2=a^2$，故△ABC 为直角三角形.

解法二:由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，得

$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，代入已知等式，得

$4R^2\sin^2B\sin^2C+4R^2\sin^2C\sin^2B=8R^2\sin B\sin C\cos B\cos C$，

即 $\sin^2B\sin^2C=\sin B\sin C\cos B\cos C$，

$\sin B\sin C(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=0$.

因为 $\sin B\neq0$，$\sin C\neq0$.

所以 $\cos B\cos C-\sin B\sin C=0$，

即 $\cos(B+C)=0$. 因为 $B+C\in(0,\pi)$，

所以 $B+C=\frac{\pi}{2}$. 所以△ABC 为直角三角形.

课标剖析:通过认真观察所给等式的结构特征，多角度思考，寻求不同的解题方法，锻炼自己的思维能力.

V. 课程标准课改实验区两年高考题剖析

本节考点剖析:在高考试题中，有关解三角形的试题大多属于容易题，最高到中等题，主要考查正弦定理、余弦定理及利用三角公式进行恒等变形的技能及运算能力，以化简、求值或判断三角形的形状为主，考查有关定理的应用、三角恒等变换的能力、运算能力及转化的数学思想. 解三角形常常作为解题工具用于立体几何中的计算或证明，在测量、航海、机械设计、物理中的有关(如功、速度、合力等)计算中，凡能转化为以三角形为基本模型的实际问题，常可综合运用正弦定理、余弦定理及有关三角函数的知识进行探讨，加以解决.

【例 1】 (2004，北京，5 分)从长度分别为 1、2、3、4、5 的五条线段中，任取三条的不同取法共有 n 种. 在这些取法中，以取出的三条线段为边可组成的钝角三角形的个数为 m，则 $\frac{m}{n}$ 等于(　　)

A. $\frac{1}{10}$　B. $\frac{1}{5}$　C. $\frac{3}{10}$　D. $\frac{2}{5}$

解:$n=10$，由余弦定理知可组成钝角三角形的有"2、3、4"和"2、4、5"，故 $m=2$. 所以 $\frac{m}{n}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$，故选 B.

渗透课标理念提示:本题涉及到了余弦定理，考查了综合运用知识解决问题的能力，这是新课标所要求的.

规律总结:解此题的关键是利用余弦定理判断所能构成的钝角三角形的个数.

【例 2】 (2005，江苏，5 分)△ABC 中，$A=\frac{\pi}{3}$，$BC=3$，则△ABC 的周长为(　　)

A. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$　B. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$

C. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$　D. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$

解:设△ABC 中，A、B、C 所对的边分别为 a、b、c. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}$，得 $b=\frac{6}{\sqrt{3}}\sin B$，$c=\frac{6}{\sqrt{3}}\sin C$. 所以△$ABC$ 的周长 $a+b+c=3+\frac{6}{\sqrt{3}}\sin B+\frac{6}{\sqrt{3}}\sin C=3+\frac{6}{\sqrt{3}}(\sin B+\sin C)$