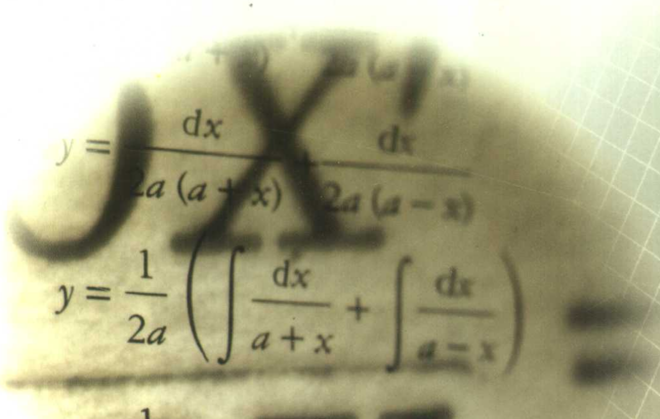
21世纪应用型本科院校规划教材

微积分

WEIJIFEN

主编 陈挹平
张燮志



南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

微积分

主　编　陈挹平　张燮志
副主编　魏广华　路体超　吴祝慧

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分/陈挹平,张燮志主编. —南京:南京大学出版社,2006.8

21世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 7-305-04817-8

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①陈…②张… Ⅲ. 微积分—高等学校—教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第094932号

出 版 者	南京大学出版社
社　　址	南京市汉口路22号　　邮　编　210093
网　　址	http://press.nju.edu.cn
出 版 人	左　健
丛 书 名	21世纪应用型本科院校规划教材
书　　名	微积分
主　　编	陈挹平　张燮志
责任编辑	吴　汀　　编辑热线　025-83686531
	编辑邮箱　wuting@press.nju.edu.cn
照　　排	南京南琳图文制作有限公司
印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	787×1092　1/16　印张 15　字数 380千
版　　次	2006年9月第1版　2006年9月第1次印刷
ISBN	7-305-04817-8/O·384
定　　价	24.00元
发行热线	025-83592169　025-83592317
电子邮件	sales@press.nju.edu.cn(销售部)
	nupress1@public1.ptt.js.cn

前　言

微积分在物理、经济、管理、商务、日常生活方面有着广泛的实际应用，它正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献．同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志．因此，对于当今社会的人士而言，无论从事何种职业，都需要学习数学、了解数学和运用数学．现代社会对数学的这种需要，在未来无疑将与日俱增．

本书可作为普通高等院校应用型本科、民办本科的教材．在本书的编写中，考虑到文科学生的特点，尽量避免深奥的理论．有些我们认为必须的理论和概念仍然保存，在论述过程中增加了几何解释，配备了一些简单的例题和反例来帮助同学理解相关的理论和概念．

本书的每一章之后，配有复习题，通过练习帮助学生进一步掌握本章节所学概念．在每一节课后练习题的基础上，复习题中加入了部分综合练习题，以提高学生灵活应用所学知识的能力．

本书的基本教学约需 120 学时，根据教学内容需要可酌情增减．

本书第一章与第四章由魏广华编写，第二章与第三章由陈艳平编写，第五章与第六章由吴祝慧编写，第七章与第九章由路体超编写，第八章由张燮志编写．金陵科技学院裴青州、宋丁全教授对本教材的编写给予了热情支持和帮助，南京大学出版社对此书的出版给予了极大的支持，在此表示衷心感谢．

由于编者水平有限，缺点和不足在所难免，诚恳期待专家和读者批评指正．

编　者

2006 年 8 月于南京

目　　录

第 1 章　函　数

1.1 集　合

1.1.1 集　合

集合是数学中一个原始的概念,它在现代数学中起着非常重要的作用.

一个集合 S 是某些个体的总和,这些个体之间具有某种共同的属性 P. 集合 S 中的每一个个体 a 叫做集合的一个元素. 如果 a 是集合 S 的元素,就记作 $a\in S$,否则记作 $a\notin S$.

表示一个集合通常有两种方法:

一、列举法

列举法:按任意顺序列出集合的所有元素,并用{}括起来.

例 1　方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合可以表示成:$S=\{1,2\}$.

注　用列举法表示集合时,必须列出集合的所有元素,不得遗漏和重复(排列不计顺序).

二、描述法

描述法:设 $P(a)$为某个与 a 有关的条件或法则,S 为满足 $P(a)$的一切 a 构成的集合,则记为 $S=\{a\mid P(a)\}$.

例 2　上述方程根的集合可以表示成:$S=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $x\in A$,则有 $x\in B$,就说 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,就称集合 A 与 B 相等,记作 $A=B$. 例如,设 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,1\}$,$C=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$,则 $A=B=C$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如,$\{x\mid x^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}$是空集,因为符合条件 $x^2+2=0$的实数是不存在的. 空集记作$\varnothing$,且规定空集是任何集合的子集.

1.1.2 绝对值

在研究一些问题时,我们常常要用到实数绝对值的概念. 下面介绍一些实数绝对值的定义及性质.

定义 1.1　一个实数 x 的绝对值,记为$|x|$,定义为$|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

$|x|$的几何意义:表示数轴上的点 x(不论 x 在原点左边还是右边)与原点之间的距离.

绝对值及其运算有下列性质:

① $|x|=\sqrt{x^2}$.

② $|x|\geqslant 0$.

③ $|x|=|-x|$.

④ $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

事实上，$x>0$ 时，$-|x|\leqslant x=|x|$；

$x<0$ 时，$-|x|=x<|x|$；

$x=0$ 时，$-|x|=x=|x|$.

因此，对任何实数 x 总有 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$.

⑤ 如果 $a>0$，则：$\{x\,|\,|x|<a\}=\{-a<x<a\}$.

从几何上看，$|x|<a$ 表示所有与原点间的距离小于 a 的点 x 的集合，而 $\{-a<x<a\}$ 表示所有在点 $-a$ 和点 a 之间的点 x 的集合，所以它们表示相同的集合.

⑥ 如果 $b>0$，则：$\{x\,|\,|x|>b\}=\{x\,|\,x<-b\}\cup\{x\,|\,x>b\}$.

从几何上看，$|x|>b$ 表示所有与原点间的距离大于 b 的点 x 的集合，而 $\{x|x<-b\}\cup\{x|x>b\}$ 表示在点 $-b$ 左边和点 b 右边的所有点 x 的集合，所以它们表示相同的集合.

⑦ 对于任意实数 x 和 y 有不等式 $|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$ 成立，称为三角形不等式.

证明 由上面性质④有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|，-|y|\leqslant y\leqslant|y|$.

两式相加得到
$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant(|x|+|y|),$$
再由性质⑤得到
$$|x+y|\leqslant|x|+|y|, \tag{1.1}$$
将 y 改为 $-y$ 后上式仍然成立. 于是
$$|x\pm y|\leqslant|x|+|y|, \tag{1.2}$$
又由(1.1)有
$$|x|=|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|,$$
所以
$$|x|-|y|\leqslant|x-y|.$$
将 y 改为 $-y$ 时，上式仍然成立.

于是
$$|x|-|y|\leqslant|x\pm y| \tag{1.3}$$
结合(1.2)和(1.3)得三角不等式.

⑧ $|xy|=|x|\cdot|y|$.

⑨ $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

1.1.3 区间与邻域

(1) 区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$.

① 开区间：满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，见图 1－1 所示.

即
$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

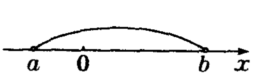


图 1－1

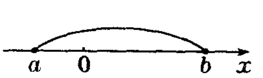


图 1－2

② 闭区间：满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的闭区间，记作

$[a,b]$，见图 1－2 所示.

即 $$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

③ 半开半闭区间：满足不等式 $a<x\leqslant b$（或 $a\leqslant x<b$）的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的半开半闭区间，记作 $(a,b]$（或 $[a,b)$），分别见图 1－3 和图 1－4 所示.

即 $$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\},[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}.$$

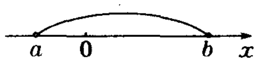


图 1－3

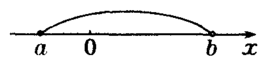


图 1－4

以上三类区间统称为有限区间. 还有以下几类无限区间：

④ $(a,+\infty)=\{x|x>a\},[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$.

⑤ $(-\infty,b)=\{x|x<b\},(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$.

⑥ $R=\{x|-\infty<x<+\infty\}$，即全体实数的集合.

(2) 邻域

开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 或实数集 $\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，或简称点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0,\delta)$. 如图 1－5 所示. x_0 是邻域的中心，δ 是邻域的半径.

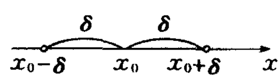


图 1－5

例如 $|x-1|<2$，即为以点 $x_0=1$ 为中心，以 2 为半径的邻域，即

$$U(1,2)=(-1,3)\text{或}U(1,2)=\{x||x-1|<2\}.$$

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为 x_0 点的去心的 δ 邻域，记作 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$.

例如 $\{x|0<|x-1|<2\}$，即以点 $x_0=1$ 为中心，以 2 为半径的去心邻域. 即

$$\overset{0}{U}(1,2)=(-1,1)\cup(1,3)\text{或}\overset{0}{U}(1,2)=\{x|0<|x-1|<2\}.$$

1.2 函数的定义

在同一个自然现象或商品经济活动中，往往有几个量同时变化着，但它们并不是孤立变化的，而是相互间存在着确定的依赖关系. 当一个量变化时，另一个量也随着发生变化. 这些量之间的关系就是数学上所谓的函数关系.

我们把在某一变化过程中可以取不同数值的量称之为**变量**；在某一变化过程中始终保持不变的量称之为**常量**（或常数）. 通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z,t 等表示变量. 常量与变量是相对的，不是绝对的. 比如在一定的时间间隔内，某种商品的价格，在计划经济模式中是常量，但在市场经济模式中是变量.

例 1 考虑球体的体积 V 与半径 r 的关系为 $V=\frac{4\pi}{3}r^3$，当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内变化时，体积 V 也随之变化，当 r 有确定值时，球体的体积 V 也就被唯一确定. 在这里 r 和 V 是变量，$\frac{4\pi}{3}$ 和 3 是常量.

例 2 某工厂每年最多生产某产品 100 单位，固定成本 50 万元，每生产 1 单位该产品成本增加 1 万元，则每年该产品的总成本 C 万元与年产量 x 单位的关系为：

$$C=50+x, 0\leqslant x\leqslant 100. \tag{1}$$

当 x 取 0 到 100 之间的任意一个数值时，由(1)可计算 C 的值.

例 3 某超市对会员购物实行优惠，持会员卡可按商品价的九折购物，但每年需交纳会员费 200 元. 若在此超市购物，至少购多少商品(按商品价计算)才能真正受惠？假设按商品价计算，某人一年内购买 x 元的商品，获得商品优惠 $0.1x$ 元，扣除 200 元会员费，实际获得的优惠 $y=0.1x-200$，表 1－1 给出 x 与 y 之间的依赖关系.

表 1－1 商品钱数与受惠钱数的关系

商品钱数 x(元)	0	500	1 000	1 500	2 000	2 500	3 000	3 500
受惠钱数 y(元)	-200	-150	-100	-50	0	50	100	150

从表 1－1 中可以看出，购物 2 000 元以上的商品才能真正得到优惠.

上述三例的实际意义、表达方式虽不相同，但具有共同之处：都表达了两个变量在变化过程中的依赖关系. 函数就是研究各个变量之间某种依赖关系的数学模型.

函数关系到底是什么呢？下面我们以集合的语言给出函数关系的定义.

定义 1.2 D 是一个非空实数集合，存在一个对应法则 f，使得对于任意 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的**函数**. 记作 $y=f(x), x\in D$. 其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 集合 D 称为函数的**定义域**，记为 $D(f)=D$.

对于 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值，记作 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值，全体函数值的集合 $\{y\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 $R(f)=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$.

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应法则. 对应法则也常用 φ, h, G 等其他字母表示，那么函数也就记作 $\varphi(x), h(x), G(x)$ 等. 有时为了简化，函数也记作 $y=y(x)$.

注 函数两要素：定义域与对应法则. 即两个函数，只要两要素相同，则它们就是同一函数，若其中有一要素不同，则它们就不是同一函数.

例 4 研究 $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 是不是同一函数.

解 因为这两个函数的定义域都是 $\mathbf{R}$，且 $y=\sin^2x+\cos^2x=1$，所以对应法则 f 也是一样的，所以，两者是同一函数.

例 5 研究 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是同一函数.

解 $y=x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0\}$，故两者不是同一函数.

在函数关系中，要求每一个 $x\in D$，都有唯一确定的 y 值与之对应. 但我们也遇到另一关系，例如 $y=\pm\sqrt{16-x^2}$，对于每一个 $x\in(-4,4)$ 都有两个 y 值与之对应. 按前面的定义应该说它不是一个函数. 但为了研究问题的需要，我们把对于非空实数集合 D 中 x 的值有多个 y 值与之对应的关系称为**多值函数**. 相对而言，前面定义的函数可称为单值函数，如不作特别声明本书中提到的函数均指**单值函数**.

例 6 对于多值函数 $y=\pm\sqrt{16-x^2}$，可以把它分成两个单值函数 $y=\sqrt{16-x^2}$ 与

$y=-\sqrt{16-x^2}$，如图 1－6 所示.

具体表示一个函数时，常用三种表示方法：解析法、表格法、图形法.

由例 1 知体积 V 是半径 r 的函数，$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$；例 2 表明总成本 C 是年产量 x 的函数，这都是解析法.

由例 3 知某人获得商品优惠款额是某人一年内购买商品资金额的函数，此为表格法. 下面再介绍用图形法表示函数的例子.

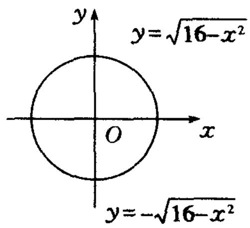


图 1－6

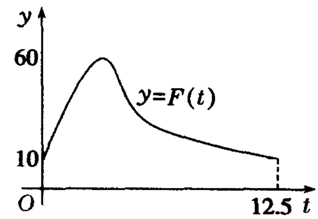


图 1－7

例 7　某地区在夏天经常受到暴雨的侵害，为了做好灾害的预防工作，通过以往暴雨期间的统计资料，描得如图 1－7 所示为一条河流在连续 12.5 小时暴雨期间的流量 $F(t)$(m^3/h) 曲线图，这个图形表示了流量 F 和时间 t 之间的函数关系 $y=F(t)$，记录的时间范围是 $[0,12.5]$(h).

对于用解析式表达的函数，函数的定义域就是使得算式有意义的一切实数组成的集合.

在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义确定. 如例 7，定义域为 $[0,12.5]$.

例 8　求函数 $f(x)=\lg\dfrac{x}{x-3}+\sqrt{x-4}$ 的定义域.

解　要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases}\dfrac{x}{x-3}>0\\ x-4\geqslant 0\end{cases}，\quad 即\begin{cases}x>3 \text{ 或 } x<0\\ x\geqslant 4\end{cases}.$$

所以函数的定义域为 $[4,+\infty)$.

例 9　设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(x^2)$，$f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$，并确定它们的定义域.

解　$f(x^2)=\dfrac{1}{1-x^2}$，$D=\{x\mid x\neq\pm 1, x\in\mathbf{R}\}$；

$f[f(x)]=f\left[\dfrac{1}{1-x}\right]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}$，$D=\{x\mid x\neq 0, x\neq 1, x\in\mathbf{R}\}$；

$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]=f(1-x)=\dfrac{1}{1-(1-x)}=\dfrac{1}{x}$，$D=\{x\mid x\neq 0, x\neq 1, x\in\mathbf{R}\}$.

函数在定义域的不同范围内，有不同的解析表达，称这样的函数为**分段函数**.

例 10　$y=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}.$

它是定义在 $\mathbf{R}$ 上的分段函数，如图 1-8 所示.

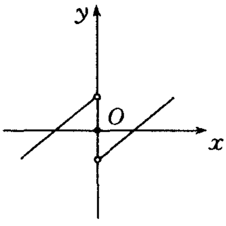


图 1-8

注 分段函数虽然有几个解析表达式，但它们合起来表示一个函数，既然只表示一个函数，亦就只有一个定义域. 例 10 中的定义域为 $\mathbf{R}$.

若点 $x_0 \in D(f)$，且该点左边和右边的解析表达式不一样，则称该点为**分段点**. 例 10 中 $x=0$ 就是分段点.

1.3 函数的几种简单性质

1.3.1 函数的奇偶性

定义 1.3 如果对任意 $x\in D(f)$，有 $-x\in D(f)$ 且 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对任意 $x\in D(f)$，有 $-x\in D(f)$ 且 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-9 所示，奇函数的图像关于原点对称，如图 1-10 所示.

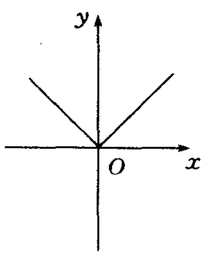


图 1-9

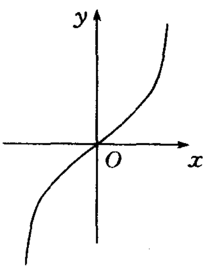


图 1-10

注 1 存在既是奇函数又是偶函数的函数.

例如 $f(x)=0$. 事实上 $f(-x)=0=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数；$f(-x)=0=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.

注 2 任意 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的非奇非偶函数，则 $f(x)$ 可以表示成一个奇函数与偶函数的和.

事实上，只需令 $G(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，$H(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，有 $f(x)=G(x)+H(x)$ 成立. 而我们可以分别验证 $G(x)$，$H(x)$ 为偶函数和奇函数，故命题成立.

例 1 判别下列函数的奇偶性.

① $f(x)=1+x^2$.

② $f(x)=a^x-a^{-x}\quad(a>1)$.

③ $f(x)=\sin x+1$.

解 ① 因为 $x\in \mathbf{R}$，所以定义域关于原点对称.

又因 $f(-x)=1+(-x)^2=1+x^2=f(x)$，

故 $f(x)=1+x^2$ 是偶函数.

② 因为 $x\in \mathbf{R}$，所以定义域关于原点对称.

又因 $f(-x)=a^{-x}-a^{-(-x)}=-(a^x-a^{-x})=-f(x)$，

故 $f(x)=a^x-a^{-x}$是奇函数.

③ 因 $f(-x)=\sin(-x)+1$,它既不等于 $f(x)=\sin x+1$,也不等于$-f(x)=-\sin x-1$,所以 $f(x)=\sin x+1$ 是非奇非偶函数.

1.3.2 函数的单调性

定义 1.4 如果函数 $y=f(x)$,对于区间(a,b)内的任意两点 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内是单调增加(或单调减少)的函数.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的,如图 1-11 所示;单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的,如图 1-12 所示.

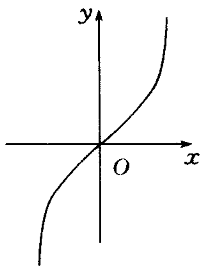


图 1-11

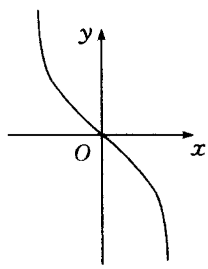


图 1-12

1.3.3 函数的周期性

定义 1.5 对于函数 $y=f(x)$,如果存在常数 $T(T\neq0)$,使得对于任意 $x\in D(f)$,都有 $f(x+T)=f(x)$成立,则称函数 $y=f(x)$是**周期函数**. T 为函数 $y=f(x)$的一个周期. 通常,我们所讲的周期都是指最小正周期,即指使 $f(x+T)=f(x)$成立的 T 中最小的正数.

周期函数图像的特点是:函数图像具有"拷贝"性 ,即周期为 T 的函数,只要描出它在任一区间$[a,a+T)$上的图像,然后将此图像一个周期一个周期地向左、向右平移,就可得到整个定义域上的图像,如图 1-13.

注 不是任何周期函数都有最小正周期. 例如常数函数 $y=c$.

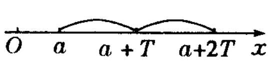


图 1-13

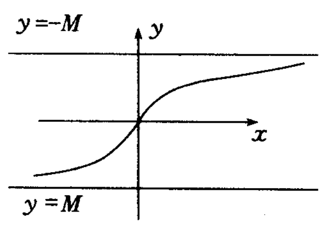


图 1-14

1.3.4 函数的有界性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义. 如果存在一个常数 $M>0$,使得对于任意 $x\in(a,b)$,都有$|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内是有界的(或称 $y=f(x)$在

(a,b)内是有界函数).反之,称函数 $y=f(x)$在(a,b)内是无界的.

注 1　上述区间(a,b)可以是函数 $y=f(x)$的整个定义域,也可以是函数 $y=f(x)$的定义域的一部分.

注 2　有界函数的几何特征:图像可以介于直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间.如图 1-14 所示.

习题 1-3

1. 用区间表示下列集合

(1) $\{x \mid |x-2|<1\}$　　(2) $\left\{x \mid 0<|2+3x|<\frac{1}{2}\right\}$

(3) $\{x \mid |x+1|\geqslant 3\}$　　(4) $\{x \mid |2x-1|\geqslant 1\}$

2. 求下列函数的定义域

(1) $f(x)=\frac{|x|}{x}$　　(2) $f(x)=\lg\frac{x}{x-2}$

(3) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}-\sqrt{x+4}$　　(4) $f(x)=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}$

(5) $f(x)=\arccos\frac{2x-1}{3}$　　(6) $f(x)=\frac{\arcsin(1-2x)}{\sqrt{2x^2+x-1}}$

(7) $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$　　(8) $f(x)=\frac{\ln(1-x)}{1-|x|}$

3. 函数 $f(x)=\frac{|x-2|}{x+1}$,求 $f(2),f(-2),f(a),f(a+b)$.

4. $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ 0.5 & x=1\\ 1 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,求 $f(0),f(0.5),f(1),f(\frac{5}{4})$.

5. 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$　　(2) $f(x)=x+\sin x$

(3) $f(x)=x^3\cos x$　　(4) $f(x)=x^6+\sin x$

6. 判断下列函数的单调性

(1) $f(x)=x+\lg x$　　(2) $f(x)=1-3x^2$

7. 求下列函数的周期

(1) $f(x)=\sin^2 x$　　(2) $f(x)=\cos 3x$

(3) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$　　(4) $f(x)=|\cos x|$

8. 如果函数 $f(x),g(x)$和 $h(x)$定义为:$f(x)=x^2+1,g(x)=\frac{1}{x^2},h(x)=\sqrt{x}$.试求:$f(g(x)),g(f(x)),h(f(x)),f(h(x)),h(f(g(x)))$.

9. 已知 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

1.4 反函数与复合函数

1.4.1 反函数

函数关系中，自变量和因变量的关系是相对而言的. 例如某种商品销售总收入为 R，销售量为 x，已知该商品的单价为 p. 如果给定了销售量 x，则可以通过关系 $R=px$ 确定销售总收入 R. 我们称这种关系为销售总收入 R 是销售量 x 的函数. 反过来，由销售总收入也可以确定销售量，我们称关系 $x=\frac{R}{p}$ 为销售量 x 是销售总收入 R 的函数. 我们称前一函数是后一函数的反函数.

定义 1.7 设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的函数，值域为 $R(f)$. 如果对于任意 $y\in R(f)$，都有唯一确定的且满足关系 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，此时 x 也是 y 的函数，称其为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$. 称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

注 1 反函数的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

注 2 由函数的实质（即两要素）知，决定函数的是定义域和对应法则，与用什么字母表示自变量和因变量没有关系. 习惯上，常以 x 表示自变量，y 表示因变量. 因此把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改记为：$y=f^{-1}(x)$.

例如	函数 $y=f(x)$	反函数 $x=f^{-1}(y)$	反函数（习惯记法）$y=f^{-1}(x)$
	$y=3x+1$	$x=\frac{y-1}{3}$	$y=\frac{x-1}{3}$
	$y=e^x$	$x=\ln y$	$y=\ln x$

注 1 函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是一样的，但坐标轴的意义不一样；函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于 $y=x$ 对称. 如图 1－15 所示.

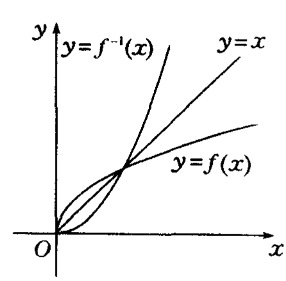


图 1－15

注 2 单调函数一定有反函数.

1.4.2 复合函数

在实际问题中，有时两个变量之间并不是直接发生关系的，而是通过另一变量联系起来的. 如出租车的车费 R 是路程 s 的函数，而路程 s 又是时间 t 的函数，车费 R 通过变量 s 也是时间 t 的函数. 一般地，有如下定义：

定义 1.8 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 $D(f)$，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $R(\varphi)$，若 $D(f)\cap R(\varphi)$ 非空，则 y 通过 u 也是 x 的函数，称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的**复合函数**. 其中 x 是自变量，y 是因变量，u 是中间变量.

例 1 已知 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=2x+3-x^2$，考察它们的复合函数.

解 函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，为了能构成复合函数，必须使 $u=2x+3-x^2\geqslant 0$，即 $x\in[-1,3]$，于是对于任意 $x\in[-1,3]$，$y=f(u)=\sqrt{u}$ 与 $u=2x+3-x^2$ 构成复合函数

$y=\sqrt{2x+3-x^2}$.

我们学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，统称为**基本初等函数**.

由常数与基本初等函数经过有限次四则运算而成的函数称为**简单函数**.

利用复合函数这个概念，可以把一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成，但在研究复合函数时，有时我们的重点并不在"复合"，而在于"分解"，即如何将一个较复杂的函数分解为基本初等函数以及简单函数.

例 2 下列函数是由哪些简单函数复合而成？

① $y=\ln\sin(x^2+1)$；② $y=2^{\tan\sqrt{\frac{x}{2}}}$；③ $y=\arctan\sqrt{2+x^2}$.

解 ① $y=\ln\sin(x^2+1)$是由 $y=\ln u, u=\sin v$ 和 $v=x^2+1$ 复合而成；

② $y=2^{\tan\sqrt{\frac{x}{2}}}$是由 $y=2^u, u=\tan v, v=\sqrt{w}$和 $w=\dfrac{x}{2}$复合而成；

③ $y=\arctan\sqrt{2+x^2}$是由 $y=\arctan u, u=\sqrt{v}$和 $v=2+x^2$ 复合而成.

注 我们指出，并不是所有的函数都能构成复合函数.

例 3 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域与 $u=2+x^2$值域的交集为空集.

1.5 几个常用的经济函数

经济活动中往往涉及到的经济量是比较多的，这些量之间，存在着各种依存关系，也就是说一种变量的变化常会引起其他变量的变化. 经济学中为了考察某两个变量之间的关系，常将其他一些非主要因素看成常量，这就形成了一些经济函数. 现将一些常用的经济函数整理如下：

1.5.1 生产函数

生产函数是某生产过程中投入量与产出量之间的对应关系. 一般，在某生产过程中产出量与多方面的投入量有关. 为了分析问题的方便，我们考虑主要因素，即考虑主要投入量和主要产出量，而将其余的因素都看成常量. 而且这时产出量是指在某投入量下，应用最先进技术所能产生的最大产量. 以 Q 表示产出量，x 表示投入量，则生产函数可记为 $Q=f(x)$.

例 1 某种型号锅炉的蒸汽产出量 Q 与燃料投入量 x 之间模型为 $Q=Q(x)=\dfrac{nx}{x+m}(n>0, m>0; x\geqslant 0)$，如图 1-16 所示.

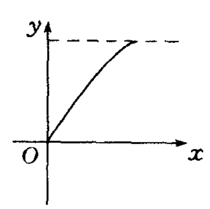


图 1-16

1.5.2 需求函数与供给函数

市场上某种商品的需求量除了与该商品的价格有关外，还受其他许多因素的影响，如代用商品的价格、消费水平等，这些因素在一段时间内一般不会有太大的波动，因此使得我们可以把这些因素看成常量，这样，商品需求量 Q 就是价格 p 的函数，称为**需求函数**，记为 $Q=f(p)$(或$p=\varphi(Q)$).

由供求关系知，商品价格低，商品的需求量大；商品价格高，商品的需求量小. 因此一般需求函数是单调减少函数.

下面我们给出一些常见的需求函数模型：

线性需求函数 $Q=a-bp \quad (a>0,b>0)$；

双曲线需求函数 $Q=\dfrac{a}{p+c}-b \quad (a>0)$；

幂函数 $Q=\dfrac{k}{p^{a}} \quad (a>0,k>0,p\neq 0)$；

指数需求函数 $Q=ae^{-bp} \quad (a>0,b>0)$；

抛物线需求函数 $Q=\dfrac{a-\sqrt{p}}{b} \quad (a>0,b>0)$(上述函数中 a,b,c,e,k 均为常数).

同样，由于商品价格不同，生产商将会提供不同的商品供给量，即商品供给量 Q 也是价格 p 的函数，称它为**供给函数**，记为 $Q=g(p)$.

由供求关系知，商品价格低，生产者不愿意提供产品，供给少；商品价格高，生产者愿意提供产品，供给多. 因此，一般供给函数是一个单调增加函数.

下面我们给出一些常见的供给函数：

线性函数 $Q=ap-b \quad (a>0,b>0)$；

分式函数 $Q=\dfrac{ap+b}{mp+n}(a>0,b>0,m>0,an>bm)$；

幂函数 $Q=kp^{a} \quad (a>0,k>0)$；

指数函数 $Q=ae^{bp} \quad (a>0,b>0)$.(上述函数中 a,b,e,m,n,k 均为常数).

均衡价格是市场上需求量等于供给量时的价格.

某商品的需求曲线 Q_1 与供给曲线 Q_2 的交点 E，称为该商品的平衡点，如图 1－17 所示.

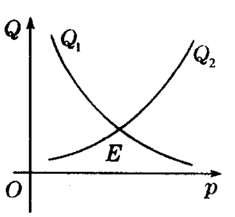


图 1－17

例 2 假设某商品的供给函数是 $ap=Q+b(a>0,b>0)$，需求函数是 $Q=cp-d(c>0,d>0)$，求该商品均衡价格.

解 联立方程组

$$\begin{cases} ap=Q+b \\ Q=cp-d \end{cases}$$

得 $p=\dfrac{b-d}{a-c}$. 该商品的均衡价格为$\dfrac{b-d}{a-c}$.

1.5.3 成本函数和收益函数

在经济学中，称需求量 Q 与价格 p 的乘积 $p\cdot Q$ 为在该需求量和价格下所得的总收益，设某商品的市场需求量为 Q，价格为 p，两者所确定的需求函数是 $p=\varphi(Q)$，则 $R(Q)=p\cdot Q=\varphi(Q)\cdot Q$ 称为**总收益函数**.

称$\dfrac{R(Q)}{Q}$为平均收益，记作 $\overline{R}(Q)$. 它表示平均每销售单位产品所得的收入，即有 $\overline{R}(Q)=\dfrac{R(Q)}{Q}$.

总成本 C 是指工厂为生产某种产品所需的全部费用. 通常可把总成本分成固定成本和变动成本. 固定成本是指厂房、机器设备的折旧费、保险费、医疗费、失业费、管理人员的工资、广