普通高等教育“十五”国家级规划教材

材料力学

孙国钧　赵社戌　编著

上海交通大学出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

材料力学

孙国钧　赵社戌　编著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书的内容包括变形固体力学的基本概念，例如承载细长杆件的内力分析、应力分析、应变分析、线弹性材料的应力-应变关系、外力功与应变能、虚功原理等；承受拉压、扭转和弯曲的杆件的应力、应变和变形的计算；脆性材料和塑性材料的强度理论和承力杆件强度设计的基本方法；压杆的临界力和稳定性计算；以及奇异函数法、纤维复合材料的应力-应变关系、简单静不定问题的求解、复合梁的弯曲、非对称梁的弯曲、剪切中心、单位载荷法和构件的疲劳强度等专题。

本书强调变形体力学的基本概念及其在杆件力学分析中的应用，通过大量的例题和习题来深化对概念的理解，论述系统，内容丰富，可供高等院校理工科师生和工程技术人员参考。

图书在版编目（C I P）数据

材料力学 / 孙国钧主编. —上海：上海交通大学出版社，2006

ISBN 7-313-03426-1

I. 材… II. 孙… III. 材料力学—高等学校—教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 088286 号

材料力学

孙国钧 赵社戌 编著

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030）

电话：64071208 出版人：张天蔚

上海颛辉印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：21.5 字数：531 千字

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月第 1 次印刷

印数：1-4050

ISBN 7-313-03426-1/TB·076 定价：32.00 元

前　言

材料力学是机械土木类工程专业的一门重要基础课。对材料力学教材有两方面的要求：(1)给初学者提供变形体力学的基础知识；(2)以工程设计为目的，提供通常称为“材料力学方法”的一系列分析方法。在20世纪前期和中期，力学问题的分析主要依靠推导公式和手算来完成。材料力学知识在解决工程实际问题中起着重要作用。然而，自铁摩辛柯在1930年出版“Strength of Materials”的大半个世纪以来，力学学科与其他科学技术领域一样得到迅猛的发展。特别是计算机的普及和计算力学软件的普遍应用，为工程项目的设计和研究提供了先进的精确的工具。顺应这种变化，国内外材料力学教材的取向和内容也悄然以不同方式发生着各种各样的变化。至于要不要变，怎么去变，教材的编纂者各具己见。

我们认为，正是由于CAD/CAM和计算机辅助分析软件的广泛应用，对工程师和研发人员的应用力学知识提出了更高的要求。作为固体力学的入门课程，应该加强对力学基本概念的阐述，并使其为后续力学课程提供较扎实的、连贯的基础。同时应该让学生掌握材料力学的各种分析方法和近似方法的应用。

本书的第1章是绪论。第2至第4章先讲杆件的内力分析(内力表达式、内力图、内力的微分关系)，应力分析(应力单元体、平面应力、应力的坐标变换、主应力、应力圆)，应变分析(应变的坐标变换、应变圆、应变-位移关系)，应力应变关系(材料拉伸压缩时的力学性能，广义胡克定律)。这几章强调力学基础知识，符号系统与弹性力学一致。第5章讲轴向拉压问题(拉压应力与变形、拉压强度条件、拉压静不定、热应力与装配应力)。第6章讲强度理论。第7、第8、第9章讲扭转和弯曲。由于应力和强度的一般理论已建立，拉压、弯、扭以及组合变形的问题都可以作为一般理论的特殊情况来理解。第10至12章讲稳定、能量法和疲劳。课文中带“*”的内容可供教师选用。

本书的编写得到洪嘉振教授和董正筑教授的热情鼓励和支持，王元淳教授和张剑副教授的热情帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

书中存在的不足之处，敬请批评指正。

编　者

2006年1月

目　　录

第 1 章

绪　论

1.1 材料力学的任务

力学是最古老的物理学分支之一。从历史上可以追溯到公元前 287～212 年阿基米德发现的浮力和杠杆原理。自 18 世纪以来，力学得以不断发展，其基本理论日臻完善，并在工程实际中得到了广泛的应用。力学造就了伽利略、牛顿、达郎贝尔、拉格郎日、拉普拉斯、欧拉、爱因斯坦等最伟大的科学家。20 世纪以来，科学技术尤其是计算机技术的迅猛发展赋予了力学新的生命力，产生了计算力学、断裂力学、复合材料力学、细观力学等许多新的分支。力学仍然是目前发展最活跃的学科之一。

力学是关于力和运动的科学，研究物体在力作用下的运动，以及力与运动的关系。固态物体的运动大体分成两类：一类是物体整体位置随时间的变化，例如内燃机的连杆运动，它的一端做移动，另一端做圆周运动，这是整体的运动；另一类是物体局部形状的变化。例如活塞拉动连杆时，连杆的长度会增加，推动连杆时其长度会缩短，这是局部的变化。通常称物体形状的改变为**变形**(deformation)。力学主要分支之一的**固体力学**(solid mechanics)主要研究固态物体的变形，而不考虑其整体运动。因此，固体力学研究问题的三个基本内容是：(1)对于力的研究；(2)对于变形的研究；(3)对力和变形之间关系的研究。

对于处于静力平衡的物体，其力必须满足**平衡**(equilibrium)条件；变形必须满足**几何协调**(geometric compatibility)条件；力和变形的关系则由物体材料的**力学性质**(mechanical property)所决定。力的平衡关系、变形几何协调关系以及力与变形之间的物理关系是固体力学的三个基本关系。固体力学的发展中有两条主流：其一以牛顿力学为主导，即以三个基本关系为基础建立微分方程，通过求解微分方程来解决力学问题；其二以拉格郎日力学为主导，考虑到当物体受到外载荷作用而产生变形时，载荷作用点产生一定位移，在此过程中，外载荷做功，同时物体内将存储一定的变形能，这一主流以能量和能量极值原理为基础直接求解力学问题。

机械或工程结构的组成部分称为零件或构件，统称为**构件**(member)。有许多构件在机械或结构中起承受和传递力的作用。电动机的轴将电磁驱动力传递给传动轮，带动其他机械做功；汽车的发动机，由活塞将燃油产生的推力，通过连杆、曲轴、齿轮和传动轴传递给驱动轮，再由地面的摩擦反作用力推动汽车前进；框架结构房屋的屋面、楼面和墙面的各种**载荷**(load)，通过屋面板、楼面板和墙传递给框架梁和柱，再将力传递给地基。在载荷作用下，构件的内部通过固体的分子、原子的相互作用将力传递，产生了内力，同时构件的形状和尺寸发生一定的改变，即产生了变形。内力和变形都是由载荷产生的材料的力学效应，或称为**力学响应**(mechanical response)。

由于材料的力学效应达到一定极限值以后，使构件失去正常工作能力的现象称为失效(failure)。分析构件力学效应的目的是防止构件失效，且能经济地使用材料，使构件满足设计要求。具体地讲，为了使构件能正常工作，通常要使它们满足下列三个方面的要求：

(1) 应该满足材料**强度**(strength)的要求。不同的材料有不同的抵抗破坏的能力及不同的破坏机理。同一种材料在不同环境、不同工作条件下的破坏机理和形式也不尽相同。按不同要求设计的构件，如起重机的吊索，起重臂的桁架，机器、运载车辆和船舶的传动轴，建筑物的梁、柱等，在所处的工作条件和环境下，在规定的使用寿命期间不应该发生断裂破坏。构件必须具有足够的抵抗破坏的能力，即必须有足够的强度。

(2) 应该满足构件**刚度**(stiffness)的要求。有些构件虽然满足其强度要求，但由于过大的变形也将使它不能正常工作。如图 1－1a 所示的两根齿轮传动轴，由于轴抵抗变形的能力不足引起过大的弯曲变形，导致齿轮之间不正常的啮合及轴与轴承间不正常的配合，从而使机械不能正常运行，并加剧各构件间的磨损。所以还应要求构件的变形在一定的限度内，也就是构件应具有一定的抵抗变形的能力，即必须有足够的刚度。

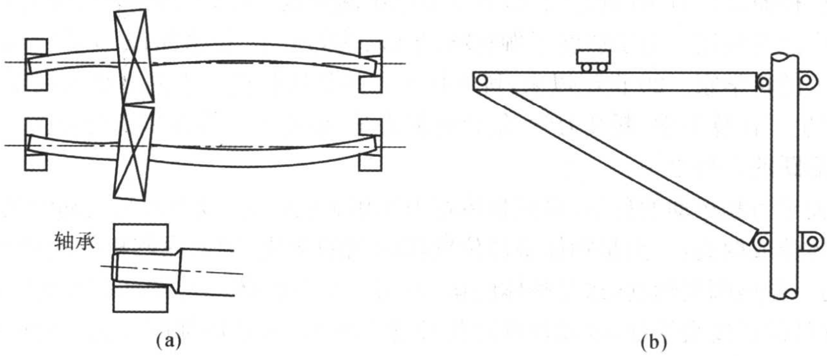


图 1－1

(3) 应该满足对构件**稳定性**(stability)的要求。材料力学主要研究压杆的稳定性。细长的杆件在轴向压力作用下的失效，往往是稳定性起控制作用，即该类构件会产生失稳。所谓失稳是指杆件在轴向压力增加到某一数值时，杆件的平衡状态发生突变，使杆件从原来的稳定平衡状态，突变到不稳定平衡状态，也称其发生屈曲(buckling)，从而使构件失去正常工作的能力。如图 1－1b 所示桁架的横梁上有起吊重物的小车行走，支撑横梁的斜杆就是受压杆件，在轴压力达到临界值时它会失稳，导致整个结构失去承重能力。设计中应使该类杆件具有抵抗失稳的能力，即必须有足够的稳定性。

材料力学(mechanics of materials)是固体力学的入门课程。学习固体力学分析问题的基本方法，利用力学原理来分析**杆**(bar)、**梁**(beam)、**轴**(shaft)这一类构件或简单结构的内力、变形等力学行为，建立**失效准则**(failure criterion)并据此对构件进行设计，使它们能满足强度、刚度和稳定性要求，这就是材料力学的基本任务。

1.2 变形固体的基本假设

在外力作用下产生变形的固体构件，统称为变形固体。在进行力学分析前，由于问题

的复杂性,需要将变形固体抽象为一种理想的模型。在材料力学中对变形固体作如下基本假设:

(1) 均匀性和连续性假设。假设材料为各处性质相同的连续体。各种工程材料有不同的构成结构,微观上材料并不均匀,也不完全连续。例如,金属材料由许多称为晶粒的微单元构成,晶粒之间存在有界面、间隙和夹杂等(如图 1-2 所示)。宏观材料包含着无数随机排列着的微单元,材料的力学性质是局部的微单元组合性质的统计平均值。所以从宏观上可以认为材料是均匀的连续物体。

(2) 各向同性假设。假设材料在各个方向上具有完全相同的力学性质,这种材料称为**各向同性**(isotropic)材料。金属材料单晶的力学性质具有方向性,但许多晶粒随机排列的结果,从宏观上看,是各向同性的。许多工程材料,如金属材料、塑料、玻璃等都可认为是各向同性材料。

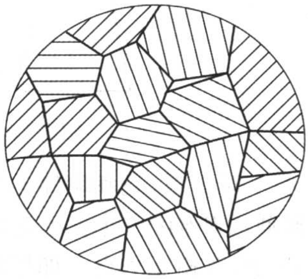


图 1-2

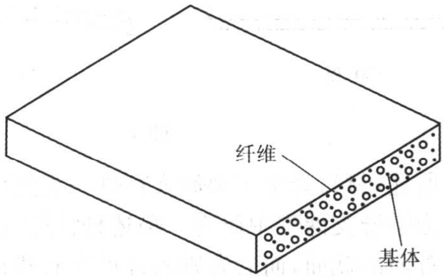


图 1-3

还有一些工程材料,如木材、长纤维复合材料,是**各向异性**(anisotropic)材料。这些材料在顺纤维方向和垂直于纤维方向,材料的力学性质有很大差别(如图 1-3 所示)。本书主要研究各向同性材料,在第四章仅对单向纤维增强复合材料的力学行为作简单介绍。

(3) 小变形条件。所谓小变形指的是构件的变形远小于构件的原始尺寸。材料力学课程在大部分情况下都将研究限于小变形范围之内。这是缘于下列三方面的考虑。①大部分承力的工程构件在工作条件下产生的变形,与构件的原始尺寸相比很小。在研究构件的平衡和运动时,可以略去微小变形的影响,按照构件变形前的原始形状和尺寸做分析。②在小变形条件下,变形与载荷成线性关系。例如,梁的变形分析采用线性几何关系时,梁的位移与载荷呈线性关系,因此可以用叠加原理计算位移,使计算简化。如果梁的变形很大,接近梁截面尺寸的量级时,则几何关系需要用非线性分析。非线性分析比线性分析要复杂得多。③在小变形条件下,很多材料的物性呈线性弹性关系,或者可以用线弹性来近似,即除变形与载荷成线性关系外,当载荷卸去后变形可以恢复。

1.3 材料力学的研究对象

工程结构和机器通常由一些形状规则的构件组成,可以按其几何特征予以分类。对不同

类的构件，研究其力学行为的方法不同。本节将简要介绍构件的分类，以便对课程的主要研究对象有初步的了解。

工程中一类常见构件的几何特征是其长度方向的尺寸比横向尺寸大很多，如图 1－4 所示。杆、柱、梁和轴等都属于这类构件，通常称这类构件为**杆件**。

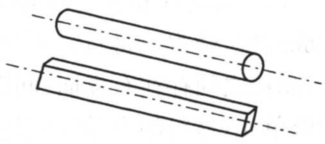
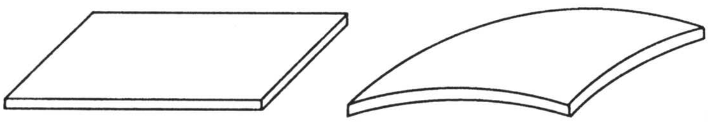


图 1－4　杆件

另一类常见构件是**板**和**壳**，分别如图 1－5a 和图 1－5b 所示，其主要几何特征是某方向的尺寸比其他两个长度方向的尺寸小很多。若构件三个方向的尺寸相差不大，则称其为**块体构件**，如图 1－6 所示。



(a) 板　(b) 壳

图 1－5

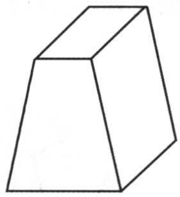


图 1－6

如前所述，材料力学主要研究杆件一类构件的受力和变形。对于板、壳和块体的力学行为将在其他力学分支课程中研究。描述杆件的几何要素为其**横截面**和**轴线**，前者定义为沿垂直于杆长度方向的截面，而后者则为杆件所有横截面形心的连线，两者相互垂直。如杆件的轴线为直线，称其为直杆；如杆件的轴线为曲线，则称其为曲杆。对横截面大小和形状不变的杆件，称其为等截面杆；反之称为变截面杆，包括截面突变和渐变两类。材料力学的基本理论主要建立在等直杆（等截面直杆）的基础上。

1.4　分离体、分离体图及内力

对于一个可变形物体或系统，要研究它们或其一部分的力学行为，首先要将其与周围物体分离开来，在分离点或分离面上用集中力和力偶矩来代替其他物体或物体的其他部分对其的作用。这一分离出来的物体或系统称为**分离体**（free body）。表示作用在分离体上的所有外力，包括分离点或分离面上其他部分物体对该分离体的约束力所形成的平衡力系的图，称为**分离体图**（free body diagram）。分离体可以是一幢摩天大楼（在底部与基础分离）、一跨桥梁（在桥墩处与支座分离）、一根梁（在支承处与支座分离）等等，或用假想截面将物体截开所得到的一部分物体，也可以是物体中的一个**微单元**（infinitesimal element）。微单元通常为过一点的边长为无穷小的六面体，在两维和一维问题中则分别为微面单元和微线单元。

如图 1－7a 所示物体，若研究对象为 $m-m$ 截面左侧的部分，可沿该截面将其从整个物体中分离出来，获得分离体。如图 1－7b 所示，在假想截开的 $m-m$ 截面上，应存在着右侧部分材料对其作用的分布力 p。这一分布力系是内部作用力，将其向截面内某点简化后获得合力和合力矩，记为 F 和 M_O，通常称该合力和合力矩为截面上的**内力**。图 1－7c 称为截面左侧分离体的分离体图。

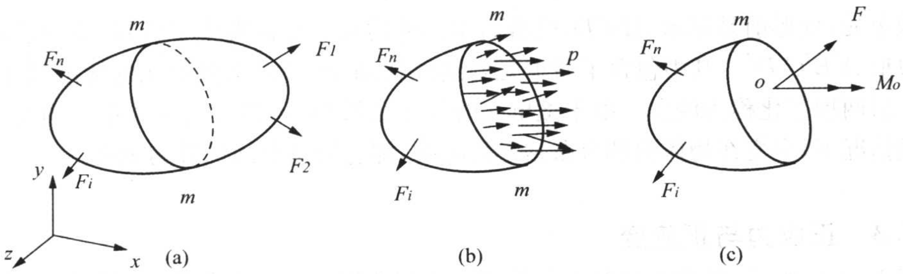


图 1-7

1.5 应力与应变

1.5.1 应力

用一假想的截面将一个受力物体截开(如图 1-8a 所示),由于截面两侧材料的相互作用,截面上存在着分布力。绕截面上任意一点 A 取一个微小的面积 ΔA,其外法向为$\boldsymbol{n}$,这个微小面积上有作用力 ΔF。随着面积 ΔA 的减小,其上的分布力将趋于均匀。作用在绕点 A 的无穷小面积 ΔA 上或点 A 上的应力(stress)定义为

$$p_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \tag{1-1}$$

式(1-1)中的下标表示截面的法线方向为$\boldsymbol{n}$。矢量$\boldsymbol{p}_n$ 的方向一般与$\boldsymbol{n}$ 不重合。应力的单位是单位面积上的力,基本单位是帕斯卡(Pa),应力常用的单位是兆帕(10^6 Pa),记为 MPa。应力的大小与该截面的法线方向$\boldsymbol{n}$ 有关,它表示在该点处截面一侧的材料与另一侧的材料之间的相互作用的强弱程度和方向。

如图 1-8b 所示,应力$\boldsymbol{p}_n$ 可以分解为沿截面法向和切向的两个分量,沿截面法向的分量称为正应力(normal stress),常用 σ 表示;沿截面切向的分量称为切应力(shear stress),常用 τ 表示。显然,

$$p_n = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \tag{1-2}$$

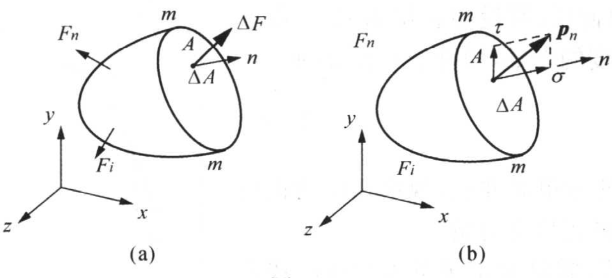


图 1-8

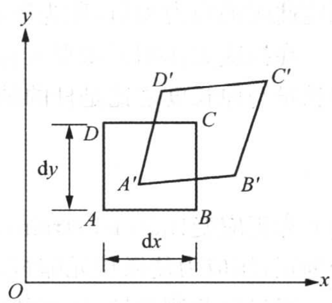


图 1-9

1.5.2 应变

应变表示 A 点附近的局部形状的变化。图 1-9 是两维应变的示意图。在 x-y 平面内取

出一个微单元，变形前是矩形 $ABCD$，受载后单元体的每一点都发生了位移，变形后的单元体成为四边形 $A'B'C'D'$。其中包含了微单元的刚性移动、转动以及微单元的线度尺寸改变、形状改变。后两项变化称为应变。由于微单元的尺寸足够小，可以认为在微单元内变形是均匀的。一般情况下，应变在物体内部分布是不均匀的，即它们是空间位置的函数。

1.5.3 正应力与正应变

如图 1-10a 所示，横截面积为 A 的等截面圆杆两端受轴向力 F 作用。如果 F 为拉力，称杆件为拉杆；F 为压力，则称为压杆。研究表明：杆在这两种受力情况下，在离端部有一定距离的横截面上只有正应力，而且在截面上均匀分布。假设横截面上正应力为 σ，根据轴向的平衡条件，截面上正应力的合力的大小等于 F，即有，

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{1-3}$$

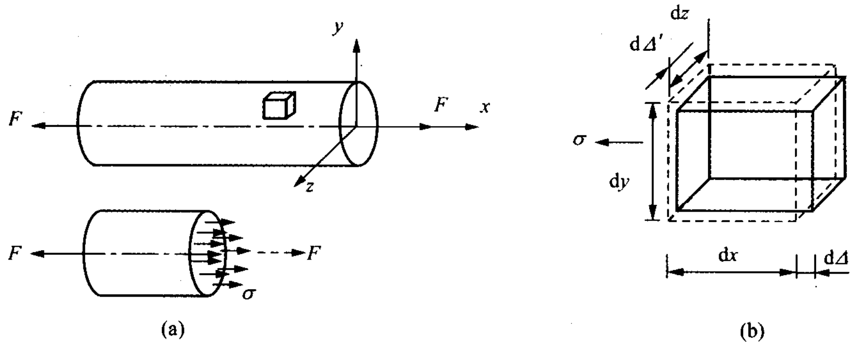


图 1-10

在杆的内部沿与坐标平面平行的方向截取边长为 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的正六面体微单元作为分离体（如图 1-10b 所示），则在与 x 轴垂直的两个侧面上有正应力 σ，其他侧面上没有应力作用。这种情况称为单向应力（uniaxial stress）。对于拉杆，应力方向与截面的外法向一致，规定此时的应力为正，称为拉应力（tensile stress）。对于压杆，应力方向与截面的外法向相反，规定此时的应力为负，称为压应力（compressive stress）。

在拉应力作用下微单元体将沿轴向伸长，假设伸长量为 $\mathrm{d}\Delta$。那么伸长量与原长度之比是杆的轴向变形程度的度量，用符号 ε 表示，则

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}x} \tag{1-4}$$

称 ε 为正应变（normal strain）。拉应力使微单元伸长，规定相应的正应变为正；压应力使微单元缩短，规定相应的正应变为负。

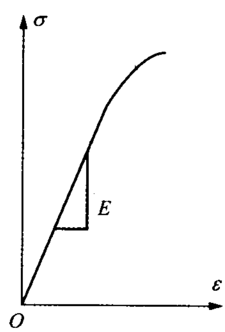


图 1-11

通过试验测量拉、压杆的应力与应变，将结果记录下来并用曲线表示（如图 1-11 所示）。发现许多材料在试验初始阶段的变形，卸载后可以恢复，即为弹性变形。而且应力与应变成比例关系，其斜率可以表示为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{1-5}$$

这是表示材料性质的一个重要的物理量，称为**弹性模量**(elastic modulus)。弹性模量的单位也是Pa，常用单位是吉帕，记为GPa(10^9 Pa)。方程(1-5)表示的应力-应变关系称为**胡克定律**(Hooke's law)。

材料在单向应力条件下沿轴向伸长的同时，它沿侧向(y方向和z方向)发生收缩，假定收缩量为$d\Delta'$(如图1-10b所示)，则侧向的应变为

$$\varepsilon' = \frac{-d\Delta'}{dx} \tag{1-6}$$

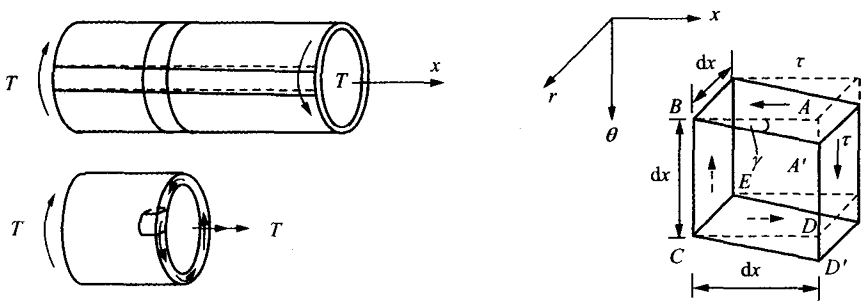
实验证明，侧向应变与轴向应变之比

$$\mu = -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \tag{1-7}$$

为一材料常数，称为泊松比(Poisson's ratio)。

1.5.4 切应力和切应变

如图1-12a所示，当一个薄壁圆截面杆两端截面内受一对方向相反的力偶矩T作用时，用一横截面截取左边部分为分离体。薄壁杆的横截面上将只有沿圆周方向的切应力存在。根据平衡条件，截面上的切应力形成的合力矩大小也为T，与端点作用的力偶矩T平衡。



(a) (b)

图1-12

假设圆截面杆沿径向、周向和轴向的坐标为r，θ和x。在薄壁内部沿与坐标平面平行的方向截取边长为dx的正六面体微单元(如图1-12b所示)作为分离体，研究表明在微单元体的轴向的两个侧面上有切应力τ存在，周向的两个侧面上有切应力τ'存在。根据对CE边取矩的平衡条件$\sum m_{CE} = 0$，即

$$\tau \cdot (dx \cdot dx) \cdot dx - \tau' \cdot (dx \cdot dx) \cdot dx = 0$$

得到

$$\tau' = \tau \tag{1-8}$$

可见在微单元互相垂直的截面上切应力相等，方向同时指向或同时离开截面的交线。此关

系称为切应力互等。这种应力状态称为**纯剪切**(pure shear)。切应力的正、负号规定将在第三章给出。

在切应力作用下，原来成直角的两棱柱边 BA 和 BC 成了锐角 $\angle A'BC$。直角的改变量为 γ，称为**切应变**(shear strain)。切应变的单位是弧度(rad)。

同样，通过试验可以发现，在切应力-切应变曲线的初始阶段(如图 1-13 所示)，切应力与切应变也成比例关系，其比例系数

$$G=\frac{\tau}{\gamma} \tag{1-9}$$

G 称为材料的**剪切模量**(shear modulus)。

应变描述材料的局部变形，局部变形的累加(积分)构成了杆件的整体变形。例如对受拉杆件，将各处沿轴向的变形累加(积分)，形成杆件的**伸长变形**(tensile deformation)。受压的杆则形成**压缩变形**(compressive deformation)。

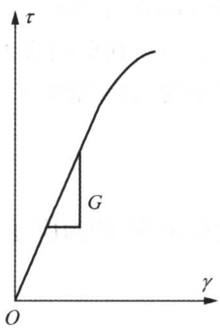


图 1-13

1.6 静定和静不定问题

在本节，我们用一个简单的例题来引进静定和静不定的概念。如图 1-14a 所示的弹簧，在力 F 的作用下，从原长 l 变为长度 l'，伸长量为 $\Delta l=l'-l$。Δl 称为弹簧的变形。假定伸长量与力成正比，比例系数 $k=\dfrac{F}{\Delta l}$，k 称为**弹簧刚度系数**(spring stiffness)，是弹簧的主要特性。上式表示弹簧的力和变形之间的关系。假设连接弹簧右端的刚性滑块只能在滑道中沿水平方向平移，滑块与滑道之间没有摩擦。根据滑块在水平方向的平衡条件，可知弹簧承受的拉力等于 F。

例 1-1 如图 1-14b 所示为两个刚度不同的弹簧并联的情形，它们的弹簧刚度分别为 k_1 和 k_2。由于滑块在滑道中平移，所以两个弹簧的伸长量相同，都等于 Δl。试求变形后两个弹簧承受的拉力 F_1 和 F_2。

解：根据滑块水平方向的平衡可知

$$F=F_1+F_2 \qquad ①$$

这是**平衡方程**(equilibrium equation)。由于只有一个平衡方程，有两个未知力，这个问题的未知力数目大于平衡方程的数目，单靠平衡条件无法求解，需要补充条件才能求出这两个力。下面从几何关系来分析。两个弹簧的伸长分别为

$$\Delta l_1=\frac{F_1}{k_1},\quad \Delta l_2=\frac{F_2}{k_2} \qquad ②$$

上两式是每个弹簧的力和伸长之间的**物理关系**(physical

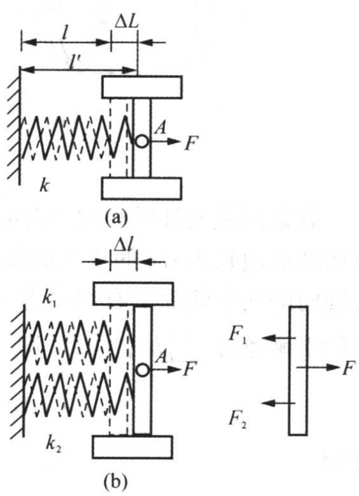


图 1-14

relation)。由于两个弹簧的伸长都等于 Δl,即

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l \tag{③}$$

式③表示变形的几何关系(geometric relation),或称变形协调关系(compatibility relation of deformation)。将式②代入式③得到关于 F_1 和 F_2 的补充方程为

$$\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2} \tag{④}$$

方程①和④联立求解可以得到

$$F_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2}F, \quad F_2 = \frac{k_2}{k_1 + k_2}F$$

从上式可以看到,两个弹簧承担的力与它们的刚度成正比。而总伸长

$$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F}{k_1 + k_2}$$

这个简单问题的求解过程,涉及到力的平衡关系①,变形的协调关系③,以及两个弹簧的物理关系②。它演示了 1.1 所述固体力学三个基本原理的应用。

当未知力的数目超过平衡方程数目时,通过平衡条件无法求出所有的力,这种问题称为**静不定问题**(statically indeterminate problem)。上述例题就是静不定问题。这样的问题需要通过几何关系、物理关系建立补充方程来求解。一个问题,如果未知力数目与平衡方程数目相等,通过平衡方程就能求解所有的力,则称为**静定问题**(statically determinate problem)。如图 1-14a 所示的问题,仅用平衡条件就可以确定弹簧的拉力,所以是静定问题。应该指出,在这个问题中,无论弹簧的受力与变形成线性关系或成非线性关系,甚至于超越了弹性变形,弹簧受力都等于 F,与弹簧的材料性质无关。