杨汉生 主编

高等数学
同步学习与提高

GAODENG SHUXUE TONGBU XUEXI YU TIGAO

【上册】

四川大学出版社

高等数学

同步学习与提高

GAODENG SHUXUE TONGBU XUEXI YU TIGAO

高等数学
同步学习与提高

[上册]

GAODENG
SHUXUE
TONGBU XUEXI
YU TIGAO

主　　编　杨汉生
编委会成员　杨汉生　陈翰林　彭　煜　林　军
杨　莉　卢　谦　汪　红　田应辉
付英贵　肖光灿　蒋建军　罗　原
鲜大权　王　玲　罗　兵

四川大学出版社

责任编辑:王　锋
责任校对:周树琴
封面设计:米茄设计工作室
责任印制:杨丽贤

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习与提高．上、下册／杨汉生主编．
成都：四川大学出版社，2005.9
ISBN 7－5614－3212－7

Ⅰ．高…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．高等数学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 097698 号

书名　高等数学同步学习与提高（上、下册）

主　　编	杨汉生
出　　版	四川大学出版社
地　　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行	四川大学出版社
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	25.5
字　　数	578 千字
版　　次	2005 年 10 月第 1 版
印　　次	2005 年 10 月第 1 次印刷
印　　数	0 001～3 000 册
定　　价	36.00 元(上、下册)

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

内容提要

本书对《高等数学》课程的本科教学大纲（全国课执委）和 2003 年研究生入学“数学考试大纲”（教育部）所要求的知识点、考点以及涉及的基本概念、基本理论、基本方法（简称“高数三基”）进行了简明扼要、全面系统的叙述、概括、总结、注释，内容力求精炼、准确、重点突出、结构清晰、体系完整。

本书兼顾了本科学习与提高、考研准备与见习这两个方面的需要。主要章节由“知识点、考点精要”、“教材习题同步解析”和相关章节内容的“历届考研试题选解”三个部分构成。“知识点、考点精要”中，凡是超出本科考试要求的提高知识点或超出本科要求的考研知识点，本书都标注“*”号加以区别。“教材习题同步解析”对《高等数学》教材（同济大学数学教研室主编，第四版）后面的绝大部分习题进行了解答。“历届考研试题选解”的范围主要限于从 1998 年以后的相关试题中选取。

前　言

由于《高等数学》课程与《初等数学》课程是迥然不同的两个体系，一年级的大学生入校伊始，往往就面临学习《高等数学》课程的一系列问题，如内容繁多、体系结构庞大（相对中学来说）、课时很少，思维方式很难适应，课前难以预习、课后难以归纳总结，一合书就觉得茫然，一提笔就感觉手生，一考试就深感题目难做等等。

工科数学，特别是高等数学，是对大学生（非数学专业的理工科甚至经管医农的）具有终生影响力的、最重要的一门基础课。一开始，就务必有清醒的认识和理解，就务必要加倍努力学习，做到勤奋钻研，精益求精，学能理解，学以致用。

考虑到《高等数学》课程的特殊重要性和学习的困难性，同时也为了后续课程的学习或准备研究生入学考试的需要，我们《高等数学》（四川省精品课程）课程组编写了这本《高等数学同步学习与提高》。

本书对《高等数学》课程的本科教学大纲（全国课执委）和 2003 年研究生入学“数学考试大纲”（教育部）所要求的知识点、考点、涉及的基本概念、基本理论、基本方法（简称“高数三基”），进行了简明扼要、全面系统的叙述、概括、总结、注释，内容力求精炼、准确、有条不紊、重点突出、结构清晰、体系完整。

为了双管齐下，本书兼顾本科学习与提高、考研准备与见习这两个方面的需要，同时也给大学一年级新生从“初等数学情结”向“高等数学心态”的转型过程提供一个有效的平台。本书的主要章节由“知识点、考点精要”、“教材习题同步解析”和相关章节内容“历届考研试题选解”三个部分构成。“知识点、考点精要”中，凡是超出本科考试要求的提高知识点或超出本科要求的考研知识点，我们都标注“*”号加以区别。“教材习题同步解析”对《高等数学》教材（同济大学数学教研室主编，第四版）后面的绝大部分习题进行了解答。“历届考研试题选解”的范围主要限于从 1998 年以后的相关试题中选取。

著名数学家、教育家 G·波利亚（G. Polya）说：“解题是智力的特殊成就，而智力就是人类的天赋。因此，解题可以认为是人的最富有特征性的活动。”当代著名数学家 G. D. Birkhoff 指出：“再也没有一个科学比数学更易于通过考虑来测定智力了。”所以，我们提倡学习《高等数学》的学生，就是要在理解的基础上见识，并且分析大量的数学题，持续不断地练习大量的数学题。只有这样，才能做到学而不厌、学而理解、学而长智；学以致练、学以致考、学以致用。

本书由全国高校首届优秀教学成果国家级（一等）奖获得者、四川省精品课程《高等数学》课程负责人杨汉生（杨翰深）教授担任主编，负责全书的策划构想、编写、统稿、定稿，林军副教授和罗原老师参与了5万字的编写工作。本书在出版过程中，得到了西南科技大学理学院领导热情的支持和关怀。卢谦、罗兵和王玲三位老师做了许多工作，在此一并致谢。

本书难免有错误与不足之处，敬请读者批评指正，以待将来进一步修改完善。

编　者
2005 年 7 月

目　录

第1章 函数与极限

1.1 知识点、考点精要

函数的概念，函数的特性(单调性、奇偶性、周期性和有界性).复合函数、反函数、初等函数的概念.数列与函数极限的定义以及它们的性质，函数的单侧极限，极限的四则运算，极限存在的两个准则，两个重要极限.无穷大与无穷小的概念及关系，无穷小的性质及无穷小的比较.函数连续的概念，函数间断点的类型，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值最小值定理和介值定理).

1.1.1 几个重要概念

函数与反函数的概念以及函数的单调性、奇偶性、周期性在中学数学中就已经很熟悉了，这里不再赘述.

1.1.1.1 函数的有界性

设 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在数 K，对于所有的 $x\in X$，恒有

$$f(x)\leqslant K,(f(x)\geqslant K)$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有上界(下界)的.如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称它在 X 上有界；否则称它在 X 上无界.显然函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是：存在一个正数 M，使得对于所有的 $x\in X$，总有 $|f(x)|\leqslant M$.

1.1.1.2 初等函数

(1)基本初等函数.下列函数称为基本初等函数：

① 幂函数：$y=x^{\mu}$(μ 为常数).

② 指数函数：$y=a^{x}$(a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$).

③ 对数函数：$y=\log_{a}x$(a 为常数，$a>0$ 且 $a\neq1$).

④ 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

⑤ 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

(2)复合函数.若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 $W_2=\{u|u=\varphi(x),x\in D_2\}$ 且 $W_2\cap D_1\neq\varnothing$，$W_2\subset D_1$，则 $y=f[\varphi(x)]$ 确定了一个函数，它称为由 $y=f(u)$，$u\in D_1$ 和 $u=\varphi(x)$，$x\in D_2$ 复合而成的复合函数. f 又称为外函数，φ 称为内函数，x 是自变量，y 是因变量，u 是中间变量.

(3)初等函数.由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

1.1.1.3 数列极限的定义(ε—N 定义)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall^{①}\varepsilon>0,\ \exists^{②} N \ni^{③} n>N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

1.1.1.4 函数极限的定义(ε—δ 定义,ε—X 定义)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \ni 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists X>0 \ni |x|>X \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

注意 ① 在上述定义中,若特殊地取 $A=0$,则函数 $f(x)$ 叫做 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 时的无穷小,即无穷小是以零为极限的函数.零是唯一的作为无穷小的数.

② 在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义中,x 是既从 x_0 的左侧又从 x_0 的右侧趋于 x_0 的.若仅考虑 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0(记做 $x\to x_0-0$ 或 $x\to x_0^-$),此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0-\delta<x<x_0$,那么 A 就叫做 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限,记做

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

若仅考虑 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0(记做 $x\to x_0+0$ 或 $x\to x_0^+$),此时把 $0<|x-x_0|<\delta$ 改为 $x_0<x<x_0+\delta$,那么 A 就叫做 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限,记做

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

③ 研究 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限,是为了研究在自变量 $x\to x_0$ 的变化过程中 $f(x)$ 的性态,此时 $f(x)$ 有无极限与 $f(x)$ 在点 x_0 有无定义完全无关.即使 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,在讨论 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限的过程中,函数值 $f(x_0)$ 也不起任何作用,因此在定义中要求 $0<|x-x_0|<\delta$.

④ 在 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的定义中,若 $x>0$ 且无限增大,则只要把定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$,即可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义.同样若 $x<0$ 而 $|x|$ 无限增大,则只要把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$,便得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义.

⑤ 无穷大的定义(M—$\delta(X)$定义):

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\ \exists \delta>0(X>0) \ni 0<|x-x_0|<\delta(|x|>X)$$
$$\Rightarrow |f(x)|>M.$$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$,此时 $f(x)$ 的极限是不存在的,为了反映 $|f(x)|$ 无限增大这种性态,也说成 $f(x)$ 的极限为无穷大.

在定义中把 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$(或 $f(x)<-M$),就记做

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \left(\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty\right).$$

---

① 符号“$\forall$”表示“对于任意给定的”.

② 符号“$\exists$”表示“存在”.

③ 符号“$\ni$”表示“使得”.

1.1.2　极限存在的判别法

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

(2) $\lim$[①] $f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为无穷小量.

(3)两边夹定理：若数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足：

① $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n (n=1,2,3,\cdots)$；

② $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. 这一准则可以推广到函数极限情形.

(4)单调有界数列必有极限.

1.1.3　极限的性质

(1)极限的唯一性：数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

(2)收敛数列的有界性：收敛数列必有界.

(3)收敛数列与其子列间关系：收敛数列的任一子列必收敛，且极限相同.

(4)保号性：① 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则必存在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，当 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

② 若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

(5)保序性：若 $f(x)\geqslant g(x)$，则$\lim f(x)\geqslant \lim g(x)$.

1.1.4　极限的运算

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则有以下结论成立：

(1)
$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm \lim g(x)=A\pm B.$$
$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot \lim g(x)=AB.$$

上述情形均可以推广到有限个函数的和、差、积的情形，特别地
$$\lim[cf(x)]=c\cdot \lim f(x).$$
有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小，有界函数与无穷小之积仍为无穷小.

(2)
$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B},B\neq 0.$$

上述四则运算对数列情形依然成立.

(3)若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，$\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$.

---

① 符号 lim 表示 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}$，即对于 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 自变量这两种变化过程均成立.

1.1.5 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. $\qquad \lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

$\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ v\to\infty}}u^v=\lim\left[(1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right]^{v(u-1)}=\mathrm{e}^{\lim v(u-1)}$.

$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

1.1.6 无穷小的比较

若 α 和 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$，则有：

(1) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则说 β 是比 α 高阶的无穷小，记做 $\beta=0(\alpha)$.

(2) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则说 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$，则说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(4) $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则说 β 与 α 是等价无穷小，记做 $\alpha\sim\beta$.

1.1.7 求极限问题方法总结

(1) 用极限的定义证明极限.

(2) 初等函数在定义域内求极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例如：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}=\dfrac{1+2+5}{1+1}=4$.

(3) 利用无穷小与无穷大的互倒关系.

例如：求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}}{x-2}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2+x}}{x-2}=\infty$.

(4) 对有理分式函数，当 $x\to\infty$ 时，用 x 的高次方项去除分子、分母.

例如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}-3}{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+3}=-1$.

一般地

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m.\\ 0, & n>m.\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

(5)利用等价无穷小的代换或无穷小的性质.

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$.

这里注意到当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$. 一般常用的等价无穷小有：当 $x\to 0$ 时，

$$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1, 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};$$

$$(1+x)^a-1\sim ax, a^x-1\sim x\ln a(a>0, a\neq 1).$$

例如：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，注意到 x 是无穷小量，$\sin\dfrac{1}{x}$是有界函数.

(6)分解因式，约去使分母极限为零的公因式.

例如：$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x+1)}{x-3}=-\dfrac{2}{5}$.

(7)乘以共轭根式，约去使分母极限为零的公因式.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(3-x)-(1+x)}{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{-2}{(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(8)利用两个重要极限.

例如：

$$\lim_{x\to 0}x\cot x=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=e^{\lim 2x\left(\frac{1+x}{x}-1\right)}=e^2.$$

以后还将学到：

(9)利用罗必达法则求极限.

(10)利用定积分的定义求极限.

(11)利用级数收敛的必要条件求极限.

1.1.8 函数的连续性

1.1.8.1 函数连续的三个等价定义

若函数 $f(x)$在点 x_0 的某一邻域内有定义，则 $f(x)$在点 x_0 处连续

$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ni|x-x_0|<\delta$$
$$\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

1.1.8.2 间断点

不连续的点叫做间断点.

间断点：
- 第一类间断点：$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$都存在
  - 可去间断点：$f(x_0-0)=f(x_0+0)$都存在
  - 跳跃间断点：$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$
- 第二类间断点：无穷、振荡、

1.1.8.3 连续函数的运算

连续函数的和、差、积、商(分母不为零)均为连续函数；连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数. 一切初等函数在定义域内都是连续的.

1.1.8.4 闭区间上连续函数的性质

(1)最大值和最小值定理. 在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值.

(2)有界性定理. 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

(3)零点定理. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号(即$f(a)f(b)<0$)，则在(a,b)内至少有$f(x)$的一个零点，即至少有一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=0$.

(4)介值定理. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且在这一区间的端点取不同的函数值$f(a)=A$及$f(b)=B$，则对于A与B之间的任意一个数C，在(a,b)内至少有一点ξ，使得

$$f(\xi)=C(a<\xi<b).$$

特别地，在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值.

1.2 教材习题同步解析

习题 1—1

10. 设$f(x)=2x^2+6x-3$，求$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$及$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，并指出$\varphi(x)$及$\psi(x)$中哪个是奇函数，哪个是偶函数.

解 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=\frac{1}{2}[2x^2+6x-3+2x^2-6x-3]=2x^2-3.$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=\frac{1}{2}[2x^2+6x-3-2x^2+6x+3]=6x.$$

显然$\varphi(-x)=\varphi(x)$，所以$\varphi(x)$是偶函数；$\psi(-x)=-\psi(x)$，所以$\psi(x)$是奇函数.

11(3). 证明定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和.

证明 设$f(x)$是定义在对称区间$(-l,l)$上的函数，显然

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

令
$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],$$

则有$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x)$，$\varphi(x)$是偶函数.

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-\psi(x).$$

$\psi(x)$是奇函数,从而 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$是一个偶函数与一个奇函数之和.

13. 设 $f(x)$是定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明 $f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加.

证明 任取 $x_1,x_2\in(-l,0)$,且 $x_1<x_2$,则$-x_1,-x_2\in(0,l)$且$-x_1>-x_2$. 由 $f(x)$是$(-l,l)$内的奇函数且在$(0,l)$内单调增加,可知有 $f(-x_1)>f(-x_2)$,即$-f(x_1)>-f(x_2)$,亦即 $f(x_1)<f(x_2)$,故 $f(x)$在$(-l,0)$内单调增加.

16. 对于函数 $f(x)=x^2$,如何选择邻域$U(0,\delta)$的半径δ,就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$所对应的函数值 $f(x)$都在邻域$U(0,2)$内?

解 要使 $f(x)=x^2\in(0,2)$,即 $0<x^2<2$,只需$|x|<\sqrt{2}$,且 $x\neq0$. 又 $x\in U(0,\delta)$,故只需取邻域的半径 $\delta=\sqrt{2}$,就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$所对应的函数值 $f(x)=x^2$ 都在邻域$U(0,2)$内.

17. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

证明 若 $f(x)$在 X 上既有上界 K_1 又有下界 K_2,即 $K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1$,取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$, 则$-M\leqslant K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1\leqslant M$,即$|f(x)|\leqslant M$,从而 $f(x)$在 X 上有界.

反之,若 $f(x)$在 X 上有界,则必存在 $M>0$,使得$\forall x\in X$ 都有$|f(x)|\leqslant M$成立,即$-M\leqslant f(x)\leqslant M$,说明 $f(x)$在 X 上有上界M 和下界$-M$.

习题 1—2

10. 设 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,问(1)$f(x^2)$;(2)$f(\sin x)$;(3)$f(x+a)$,$a>0$;(4)$f(x+a)+f(x-a)$,$a>0$ 的定义域各是什么?

解 由 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,有

(1)$0\leqslant x^2\leqslant1$,即$|x|\leqslant1$,所以 $f(x^2)$的定义域是$[-1,1]$.

(2)$0\leqslant\sin x\leqslant1$,所以 $x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]$,$k\in\mathbf{Z}$ 即为 $f(\sin x)$的定义域.

(3)$x+a\in[0,1]$,则 $x\in[-a,1-a]$,即 $f(x+a)(a>0)$的定义域是$[-a,1-a]$.

(4)$x+a\in[0,1]$且 $x-a\in[0,1]$,所以 $x\in[-a,1-a]$且 $x\in[a,a+1]$. 当 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$时,$-a\leqslant a\leqslant1-a\leqslant1+a$,此时 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$的定义域是$[a,1-a]$. 当 $a>\frac{1}{2}$时,$[-a,1-a]\cap[a,a+1]=\varnothing$,从而定义域为$\varnothing$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1.\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$.

求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

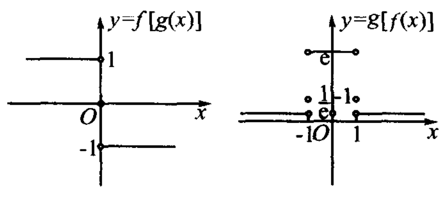

图 1—1

解 当 $x<0$ 时,$0<g(x)=\mathrm{e}^x<1$;当 $x>0$ 时,$g(x)=\mathrm{e}^x>1$;当 $x=0$ 时,$g(x)=1$;从而有

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}\qquad g[f(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

14. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ，重量是 P. 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始移动(图 1－2). 求物体开始移动时，拉力 F 与角 α 之间的函数关系式.

解 当物体开始移动时，水平方向的力为零，即向前的力等于摩擦力，从而有

$$F\cos\alpha=\mu P-F\sin\alpha\cdot\mu,\text{故 } F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

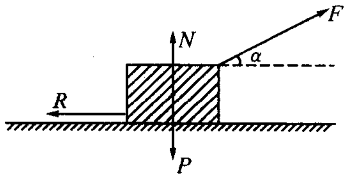

图 1－2

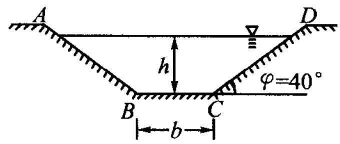

图 1－3

15. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$(图 1－3). 当水渠断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域.

解 $S_0=\frac{1}{2}h(AD+BC)=\frac{1}{2}h(b+2h\cot\varphi+b)=h(b+h\cot\varphi)$，

从而
$$b=\frac{S_0}{h}-h\cot\varphi,$$

$$L=AB+BC+CD(AB=CD)=2\cdot\frac{h}{\sin\varphi}+b=\frac{S_0}{h}-h\cot\varphi+2\frac{h}{\sin\varphi}$$
$$=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos40°}{\sin40°}h.$$

由 $h>0,b=\frac{S_0}{h}-h\cot40°>0$ 得定义域 $(0,\sqrt{S_0\tan40°})$.

16. 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥(图 1－4)，试将其体积表示为高的函数，并说明定义域.

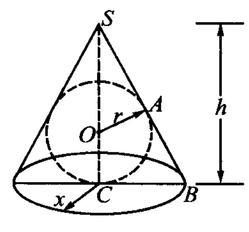

图 1－4

解 设圆锥底圆半径为 x，则 $\frac{r}{x}=\frac{h-r}{\sqrt{x^2+h^2}}$，于是得

$$x^2=\frac{r^2h}{h-2r}.$$

又圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi x^2h$，从而得 $V=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2h^2}{h-2r}$.

由 $h>0,V>0$ 有 $h-2r>0,h>2r$，即为函数定义域.

17. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，如从上海到某地每千克收 0.15 元. 当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求上