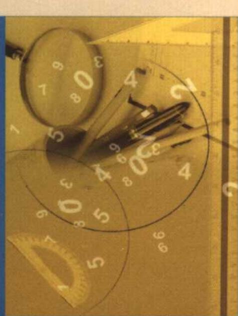
XINBIAN GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI

新编高职高专规划教材

主 编 姬天富 骆汝九



线性代数

XIANXING DAISHU

中国科学技术大学出版社

XINBIAN GAOZHI GAOZHUAN GUIHUA JIAOCAI

新编高职高专规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

主　编：姬天富　骆汝九

副主编：曹玉平　赵丽霞

中国科学技术大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/姬天富，骆汝九主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2006.8
ISBN 7-312-01963-3

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①姬…　②骆…　Ⅲ. 线性代数—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 087729 号

中国科学技术大学出版社出版发行
（安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026）
安徽新华印刷股份有限公司印刷
全国新华书店经销

开本：710×960/16　　印张：8.75　　字数：162 千
2006 年 8 月第 1 版　　2006 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—4 000 册
ISBN 7-312-01963-3/O・334　　定价：12.00 元

前　　言

线性代数是高职高专一门重要的基础数学课程，它的理论和方法广泛应用于科学研究、工程技术和国民经济等各个领域.由于矩阵作为线性代数的主要研究对象而贯穿于整个线性代数的始终，因此线性代数又称为矩阵论.

本书力求体现高职高专的教学特点，贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”的原则.在体系及内容的安排上具有一定的特色，由中学即已熟知的线性方程组的消元法，自然地引入矩阵的初等行变换这一重要的运算方法，并把它放在十分重要的位置.利用矩阵的初等行变换，讨论矩阵的秩、向量组的线性相关性、最大无关组的求法、线性方程组解的判别及结构、矩阵的对角化以及二次型等，结构紧凑，简明清晰；深入浅出，通俗易懂.

全书共分四章：第一章，矩阵与行列式；第二章，向量与线性方程组解的结构；第三章，矩阵的对角化；第四章，二次型.每节后附有习题，每章后有复习题，并给出了部分答案及提示.这些习题和教材内容联系紧密，有利于巩固和加深对所学内容的理解，若能独立思考、完成，一定会收到事半功倍的学习效果.

限于编者水平，书中缺点和错误在所难免，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2006 年 3 月

目　　录

第一章　矩阵与行列式……1
第一节　矩阵及其运算……1
一、矩阵的概念……1
二、矩阵的运算……5
习题 1-1……10
第二节　矩阵的初等变换与初等矩阵……11
一、初等变换的概念……11
二、初等矩阵……17
习题 1-2……19
第三节　行列式……19
一、n 阶行列式的定义……19
二、行列式的性质……25
三、行列式按行（列）展开……27
四、克拉默法则……30
习题 1-3……32
第四节　逆矩阵……33
一、逆矩阵的概念……33
二、逆矩阵的存在性及其求法……33
三、逆矩阵的运算性质……37
四、利用矩阵的初等变换求逆矩阵……38
习题 1-4……41
第五节　矩阵的秩……42
一、矩阵秩的定义……42
二、用初等行变换求矩阵的秩……43
习题 1-5……46
第六节　分块矩阵……46
一、分块矩阵的概念……46

二、分块矩阵的运算……47
习题 1-6……51
复习题一……52
第二章　向量与线性方程组解的结构……54
第一节　线性方程组解的判别……54
一、齐次线性方程组有非零解的条件……54
二、非齐次线性方程组有解的条件……56
习题 2-1……59
第二节　n 维向量及其线性相关性……60
一、n 维向量的概念及其运算……60
二、向量组及其线性组合……61
三、向量组的线性相关性……63
习题 2-2……67
第三节　向量组的秩与最大无关组……68
一、向量组的秩与最大无关组的概念……68
二、利用初等变换求最大无关组……69
习题 2-3……72
第四节　线性方程组解的结构……73
一、齐次线性方程组解的结构……73
二、非齐次线性方程组解的结构……77
习题 2-4……80
复习题二……81
第三章　矩阵的对角化……84
第一节　方阵的特征值与特征向量……84
一、特征值与特征向量的概念及求法……84
二、特征值与特征向量的性质……87
习题 3-1……89
第二节　向量的内积与正交矩阵……89
一、向量的内积……89
二、正交向量组……91
三、线性无关向量组的规范正交化……92
四、正交矩阵……95

习题 3-2……96
第三节　相似矩阵……96
一、相似矩阵及其性质……96
二、矩阵对角化的充要条件……98
三、实对称矩阵的对角化……99
习题 3-3……102
复习题三……102
第四章　二次型……105
第一节　二次型的概念及矩阵表示……105
一、二次型的概念……105
二、二次型的矩阵表示……106
习题 4-1……108
第二节　化二次型为标准形……108
一、用正交变换化二次型为标准形……108
二、用配方法化二次型为标准形……111
习题 4-2……113
第三节　正定二次型……113
一、正定二次型的概念……113
二、正定二次型的判别法……114
习题 4-3……117
复习题四……117
参考答案……119

第一章　矩阵与行列式

第一节　矩阵及其运算

一、矩阵的概念

人们在从事经济活动、科学研究、社会调查时，会获得许多重要的数据资料，将这些数据排成一个矩形的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

以便于进行储存、运算和分析，这种矩形的数表就是矩阵.

定义 1　由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称为 $m \times n$ 矩阵，其中 a_{ij} 称为矩阵的位于第 i 行、第 j 列的**元素**. 通常，我们用大写字母 $A, B, \cdots$ 表示矩阵. 例如，记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

其中小括号“( )”也可用方括号“[ ]”代替. 有时，矩阵也简记为 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 或 $A=\left(a_{ij}\right)$. 特别地，当 $m=n$ 时，称 A 为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**，其中一阶方阵 (a) 是一个数，括号可略去.

元素全为实数的矩阵称为**实矩阵**，元素全为复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书主要在实数范围内讨论问题.

对于由 n 个未知量、m 个方程组成的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

称矩阵

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

为线性方程组 (1.1.1) 的**增广矩阵**；称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1.3}$$

为线性方程组 (1.1.1) 的**系数矩阵**；矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{1.1.4}$$

称为线性方程组 (1.1.1) 的**常数项矩阵**.

显然，线性方程组 (1.1.1) 由矩阵 (1.1.2) 完全地确定.

下面介绍一些特殊的矩阵.

(1) 零矩阵　元素都是零的矩阵称为**零矩阵**，记为 O.

(2) 列矩阵、行矩阵　在矩阵 A 中，如果 $n=1$，则

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

称这种只有一列的矩阵为**列矩阵**；同样，如果 $m=1$，则

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\end{pmatrix},$$

称这种只有一行的矩阵为**行矩阵**.

我们也将列矩阵和行矩阵分别称为**列向量**和**行向量**. 列向量和行向量统称为**向量**. 向量的元素称为**分量**，有 n 个分量的向量称为 n **维向量**. 矩阵与向量有密切的联系，矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 可以看成由 n 个 m 维列向量

$$\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix},\quad j=1,2,\cdots,n$$

组成，也可以看成由 m 个 n 维行向量 $\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$，$i=1,2,\cdots,m$ 组成.

(3) 负矩阵　如果矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则 $-A=\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$ 称为矩阵 A 的**负矩阵**.

(4) 行阶梯形矩阵　如果矩阵每一行的第一个非零元素所在的列中，其下方元素全为零，则称此矩阵为**行阶梯形矩阵**. 例如矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

均为行阶梯形矩阵，而矩阵

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 0 & 4 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

则不是行阶梯形矩阵.

(5) 行最简形矩阵　如果行阶梯形矩阵中，非零行的第一个非零元素均为 1，且其所在列的其余元素均为 0，则称此矩阵为**行最简形矩阵**. 例如，矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 6 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

是行最简形矩阵.

(6) 上(下)三角矩阵　n阶方阵的左上角到右下角元素的连线称为**主对角线**，左下角到右上角元素的连线称为**次(副)对角线**. 如果方阵的主对角线下(上)方元素全为 0，则称此矩阵为**上(下)三角矩阵**. 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为上三角矩阵，矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为下三角矩阵.

(7) 对角矩阵　如果方阵中除主对角线上的元素外，其余元素全为 0，则称此矩阵为**对角矩阵**. 例如，矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

为对角矩阵.

(8) 单位矩阵　在对角矩阵中，如果 $\lambda_i \equiv 1(i=1,2,\cdots,n)$，即为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

则称此矩阵为**单位矩阵**. 单位矩阵一般用 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$ 表示.

定义 2　如果两个矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$，$B=\left(b_{ij}\right)$ 的行数相同、列数也相同，则称矩阵 A 与 B 为**同型矩阵**.

定义 3　如果两个同型矩阵 $A_{m\times n}$，$B_{m\times n}$ 的对应元素均相等，即 $a_{ij}=b_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\right)$，则称矩阵 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法

定义 4 由两个同型矩阵 $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ 对应元素的和，即 $a_{ij}+b_{ij}\ \left(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\right)$ 组成的 $m\times n$ 矩阵称为**矩阵 A 与 B 的和**，记作 $A+B$，即

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

由此定义及负矩阵的概念，我们定义**矩阵 A 与 B 的差**为

$$A-B=A+\left(-B\right).$$

注 只有同型矩阵才能相加(减).

2. 数与矩阵相乘(简称数乘)

定义 5 数 k 乘矩阵 A 的每一个元素所得到的矩阵称为**数 k 与矩阵 A 的积**，记作 kA，即

$$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法和数乘统称为**矩阵的线性运算**，其满足如下性质：

(1) $A+B=B+A$；　　(2) $\left(A+B\right)+C=A+\left(B+C\right)$；

(3) $\left(\lambda\mu\right)A=\lambda\left(\mu A\right)$；　　(4) $\left(\lambda+\mu\right)A=\lambda A+\mu A$；

(5) $\lambda\left(A+B\right)=\lambda A+\lambda B$；　　(6) $A+O=A$；

(7) $1A=A$；　　(8) $A+\left(-A\right)=O$.

上面的 λ，μ 都是任意常数.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，求 $A+B$ 和 $2A-3B$.

解

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+4 & -1+0 & 2+(-3) \\ 0+(-1) & 3+(-2) & 4+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix}2&-2&4\\0&6&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&0&-9\\-3&-6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&-2&13\\3&12&-1\end{pmatrix}.$$

3. 矩阵与矩阵相乘(矩阵的乘法)

n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 m 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n.\end{cases}\tag{1.1.5}$$

表示一个从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**.

设有两个线性变换

$$\begin{cases}z_1=a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3,\\z_2=a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3.\end{cases}\tag{1.1.6}$$

和

$$\begin{cases}y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2,\\y_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2,\\y_3=b_{31}x_1+b_{32}x_2.\end{cases}\tag{1.1.7}$$

若要求出从 x_1, x_2 到 z_1, z_2 的线性变换，可将(1.1.7)代入(1.1.6)，得

$$\begin{cases}z_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})x_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})x_2,\\z_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})x_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})x_2.\end{cases}\tag{1.1.8}$$

线性变换(1.1.8)可看作是先作线性变换(1.1.7)、再作线性变换(1.1.6)的结果，我们称线性变换(1.1.8)为**线性变换**(1.1.6)与(1.1.7)**的乘积**，相应地，我们将线性变换(1.1.8)所对应的矩阵定义为式(1.1.6)与(1.1.7)所对应的矩阵的乘积，即

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}.$$

一般地，我们有：

定义 6 设有矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$ 和 $B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$，规定**矩阵** A 与 B **的乘积**是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$，记为 $C=AB$. 其中

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$
$$= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

注 只有当前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘，且乘积矩阵C中的元素C_{ij}就是A的第i行与B的第j列的对应元素乘积的和.

例 2 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

求AB.

解

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2\times1+0\times0+(-1)\times2 & 2\times0+0\times2+(-1)\times1 \\ -1\times1+3\times0+1\times2 & -1\times0+3\times2+1\times1 \\ 0\times1+1\times0+(-2)\times2 & 0\times0+1\times2+(-2)\times1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 7 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 3 求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{与} B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

的乘积AB及BA.

解

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由以上例题可以看出矩阵乘法与数的乘法有两点显著不同：

(1) 矩阵乘法不满足交换律：AB 与 BA 未必同时有意义(如例 2，BA 没有意义)；即使都有意义也未必相等(如例 3)．因此为明确起见，称 AB 为 A **左乘** B，或 B **右乘** A．只有在一些特殊情况下才有 $AB=BA$，这时称 A 与 B 是**乘法可交换**的．容易验证**数量矩阵** aE 与任何同阶方阵 A 乘法可交换，即

$$(aE)A=A(aE)=aA.$$

(2) 矩阵乘法不满足消去律：由 $AB=O$ 不能得出 $A=O$ 或 $B=O$ (如例 3)，即 $A\neq O,B\neq O$ 但 AB 有可能为 O．

有了矩阵相等和乘法的定义，我们可以把线性方程组 (1.1.1) 写成矩阵形式：$AX=B$，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

若 $B=O$，则称 (1.1.1) 为**齐次线性方程组**；若 $B\neq O$，则称 (1.1.1) 为**非齐次线性方程组**．也可以把线性变换 (1.1.5) 写成矩阵形式：$Y=AX$，其中

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

A 与 X 同上所设．

可以证明矩阵的乘法有下列性质：

(1) $(AB)C=A(BC)$；

(2) $A(B+C)=AB+AC$；$(B+C)A=BA+CA$；

(3) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$，$\lambda$ 为任意常数；

(4) $(aE_m)A_{m\times n}=aA_{m\times n}=A_{m\times n}(aE_n)$．

定义 7 设 A 为 n 阶方阵，k 为正整数，称 k 个 A 的连乘积为**方阵 A 的 k 次幂**，记作 A^k，即 $A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k}$．

当 k,l 都为正整数时，由矩阵乘法的性质，得

(1) $A^kA^l=A^{k+l}$；　　(2) $\left(A^k\right)^l=A^{kl}$．

注 由于矩阵乘法不满足交换律，所以，一般地$(AB)^k \neq A^kB^k$.

例 4 设$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，求$A^n$($n$为正整数).

解

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix};$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix};$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix};$$

一般地，有

$$A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}.$$

其正确性可由数学归纳法证得，证明略.

4. 矩阵的转置

定义 8 把$m\times n$矩阵A的行与列互换得到的一个$n\times m$矩阵，称为A的**转置矩阵**，记作A^T. 例如，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$$

的转置矩阵为

$$A^T=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\\0&1\end{pmatrix}.$$

矩阵的转置也是一种运算，满足下述运算规律：

(1) $\left(A^T\right)^T=A$ ；　　(2) $(A+B)^T=A^T+B^T$ ；

(3) $(\lambda A)^T=\lambda A^T$，$\lambda$为一个数；　　(4) $(AB)^T=B^TA^T$.

例 5 已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},$$

求 $(AB)^T$.

解法 1 因为

$$AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$

所以

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

解法 2

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

定义 9 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A^T=A$，即

$$a_{ij}=a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

则称 A 为**对称矩阵**. 对称矩阵的特点是：关于主对角线对称的对应元素相等.

定义 10 设 A 为 n 阶方阵，如果满足 $A^T=-A$，即

$$a_{ij}=-a_{ji},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

则称 A 为**反对称矩阵**. 反对称矩阵的特点是：主对角线上的元素全为 0，其余关于主对角线对称的对应元素则互为相反数.

习题 1-1

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&-2&4\\0&5&1\end{pmatrix}$，求 $2AB-3A$ 及 A^TB.

2. 已知两个线性变换

$$\begin{cases}x_1=2y_1+y_3,\\x_2=-2y_1+3y_2+2y_3,\\x_3=4y_1+y_2+5y_3.\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}y_1=-3z_1+z_2,\\y_2=2z_1+z_3,\\y_3=-z_2+z_3.\end{cases}$$

求从 z_1，z_2，z_3 到 x_1，x_2，x_3 的线性变换.

3. 计算下列乘积：