考试先锋
www.zgksxf.com

经济应用数学基础（一）

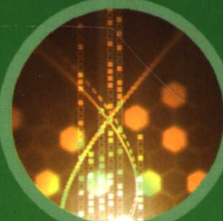
九章丛书

微积分辅导

人大修订本

◆知识点窍

主编
孙怀东
杨富云



◆逻辑推理

◆习题全解

◆全真考题

编　写
九章系列课题组

电子科技大学出版社

经济应用数学基础(一)

微积分辅导

(赠习题全解)

(人大修订本)

主编　孙怀东　杨富云
编写　九章系列课题组

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导/孙怀东,杨富云主编.—成都:电子科技大学出版社,2006.9
ISBN 7-81114-274-0

Ⅰ.微… Ⅱ.①孙…②杨… Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 109302 号

【内容简介】 本书是人大版经济类、赵树嫄主编《微积分》教材编写的辅导书,也可作为“微积分”课程的复习指导书,其内容、要点、题目都是根据该课程的范围和难度来组织的。

全书由函数、极限与连续、导数与微分、中值定理,导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程与差分方程简介等九章组成。每章又分为基本要求、主要概念公式及结论、典型题型解析、自测题、自测题答案、全真考题解析等部分。

本书可作为经济数学中“微积分”课程的学习指导书,也适用于经济类各专业参加研究生入学考试复习参考书。

微积分辅导(赠习题全解)

孙怀东　杨富云　主编

出　　版:电子科技大学出版社(成都市建设北路二段四号,邮编:610054)
责任编辑:何　毅
发　　行:电子科技大学出版社
印　　刷:北京龙兴印刷厂
开　　本:787×960　1/16　**印张**:18　**字数**:645 千字
版　　次:2006 年 9 月第一版
印　　次:2006 年 9 月第一次印刷
书　　号:ISBN 7-81114-274-0/O·13
印　　数:1—5000 册
定　　价:21.80 元

前　言

《微积分》是经济数学中一门很重要的基础课，也是经济类各专业研究生入学考试必考的内容。为了帮助广大学生扎实地掌握《微积分》的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们根据赵树嫄编写的经济应用数学基础(一)——《微积分》编写了这本辅导教材。

本书采用目前最为独特新颖的体例设计和版式设计，并吸收了“以题型为纲”的编写思想，归纳了这门课程中几乎所有题型，精心选编和分析了大量的经典例题，并独立设计了许多新颖例题。

本书包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理、导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数、微分方程与差分方程。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. **基本要求**：结合每年考研大纲的要求，分别对各章知识点做了简练的概括，使读者在各章的学习过程中目标明确，有的放矢。

2. **主要概念、定理及公式**：列出了各章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

3. **典型题型解析**：对于一门课程来说，题目是无穷的，但题型是有限的。本书尽可能全面地归纳了这门课程所涉及的题型，并逐一进行分析并给出了解题方法和规律。通过对微积分各种典型题型的分析，介绍各种解题思路、方法和运算技巧，帮助读者把微积分中各个概念予以融会贯通，拓宽解题思路，提高分析解决问题的能力，掌握解题的技巧。

4. **全真考题解析**：对于掌握一门课程并通过相关考试来说，做一定量的习题是必不可少的，而考研真题由于命题严谨性及科学性，具有更高的学习价值。为此，笔者精选了历年考研真题，供读者学习和练习之用。

5. **自测题**：要掌握一门课程，做一定量的习题是十分必要的。本书精心选编了部分习题，供读者模拟练习之用。

6. **赠书**：本书赠送的小册子中包含了人民大学出版社出版的《微积分》中全部习题的详细解答。

本书在编写过程中，参考了高等教育出版社出版的《微积分学习辅导与解题方法》，世界图书出版公司的《微积分解题思路和方法》、《高等数学辅导》，机械工业出版社出版的《微积分》(经济数学基础教材辅导)，中国人民大学出版社出版的《微积分学习与解题指导》、《微积分学习与考试指导》，西北工业大学出版社出版的《高等数学常见题型解析及模拟题》等书，在此深表感谢！

由于编者水平有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评指正。

编者

2006 年 8 月

目　录

第 1 章 函 数

1.1 基本要求

1. 理解实数绝对值的概念，掌握解简单绝对值的方法.

2. 理解函数的定义，会求函数的定义域与值域.

3. 掌握函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等性质.

4. 深刻理解复合函数的概念，知道构成复合函数的条件，熟练掌握将复合函数分解成较简单函数的基本方法.

5. 掌握基本初等函数的定义、定义域、基本性质和图象特征.

6. 理解初等函数的概念，会判别非初等函数.

7. 会建立应用问题的函数关系式，掌握经济学中常用的成本函数、收益函数、利润函数等.

1.2 主要概念、公式及结论

1.2.1 集 合

1. 集合的概念

集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的元素.

2. 集合的表示方法

(1) 列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号括起来.

(2) 描述法：设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合

则记为
$$A=\{a \mid P(a)\}.$$

3. 全集与空集

(1) 全集是由研究的所有事物构成的集合，记为 U 全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下就可能不是全集.

(2) 空集是不包含任何元素的集合，记为 Φ.

4. 集合的运算

设 A,B 是两个集合，规定
$$A\cup B=\{x|x\in A \quad 或 \quad x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x|x\in A \quad 且 \quad x\in B\}$$
$$A-B=\{x|x\in A \quad 且 \quad x\overline{\in} B\}$$

5. 集合的运算律

(1) 交律律：$A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 摩根律：$(A\cup B)'=A'\cap B' \qquad (A\cap B)=A'\cup B'$

6. 集合的笛卡尔乘积

设有集合 A 和 B，$x\in A$，$y\in B$，所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合，称为集合 A 与 B 的笛卡称乘积，记为 $A\times B$，即
$$A\times B=\{(x,y)|x\in A,y\in B\}$$

1.2.2 实数集

1.绝对值

一个数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

绝对值及其运算有下列性质:

(1) $|x|=\sqrt{x^2}$　　(2) $|x|\geqslant 0$

(3) $|-x|=|x|$　　(4) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$

(5) $\{x \mid |x|<a\}=\{x \mid -a<x<a\}$,其中 $a<0$.

(6) $\{x \mid |x|>b\}=\{x \mid x<-b\}\cup\{x \mid x>b\}$,其中 $b>0$

(7) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$　　(8) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$

(9) $|xy|=|x|\cdot|y|$　　(10) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}, y\neq 0.$

2.区间与邻域

(1)区间

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$$
$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$
$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$$
$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$$
$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$$
$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$$

(2)邻域

称实数集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域. x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,称实数集合 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 为以 x_0 为中心,以 δ 为半径的空心领域.

1.2.3 函数关系

1.函数关系的定义

若 D 是一个非空实数集合,设有一个对应规则 f,使每一个 $x\in D$,都有一个确定的实数 y 与之对应,则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,或称变量 y 是变量 x 的函数.记作 $y=f(x)$,$x\in D$. x 称为自变量 y 称为因变量.

2.多值函数

对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的关系称为多值函数.

1.2.4 函数表示法

1.三种表示法

(1)公式法:把一个函数关系用一个解析式表示的方法;

(2)表格法;

(3)图形法.

2.分段函数

在自变量的不同变化范围中,自变量与因变量的对应规则用不同的式子来表示的函数称为分段函数.一般来说,分段函数不是初等函数.

3.隐函数

设 $F(x,y)$ 是一个已知二元函数,I 是一个区间,如果对于每个 $x\in I$,都存在惟一的 y 满足方程 $F(x,y)=0$,则称这个函数 $y=f(x)$ 为由 $F(x,y)=0$ 在区间 I 上确定的隐函数.因此如果把隐函数 $y=f$

(x)代入方程 $F(x,y)=0$，便得到在区间 I 上成立的恒等式：$F(x,f(x))\equiv 0, x\in I$.

在大多数情况下，不能从方程 $F(x,y)=0$ 中解出隐函数 $y=f(x)$ 的显式表达式. 但是，却可利用上述恒等式来研究隐函数的许多性质.

1.2.5 函数的几种简单的性质

1. 函数的奇偶性

给定函数 $y=f(x), x\in(-l,l)$，若 $\forall x\in(-l,l)$，有 $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$，则称$f(x)$为偶函数(奇函数).

2. 函数的周期性

给定函数 $y=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$，若 $\exists a>0$，使 $f(x+a)=f(x)$，则称 a 为 $f(x)$的周期.

3. 函数的单调性

给定函数 $y=f(x), x\in(a,b)$，$\forall x_1,x_2\in(a,b)$，$x_1<x_2$，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在区间(a,b)内是单调减少的.

4. 函数的有界性

给定函数 $y=f(x), x\in(a,b)$，若 $\forall x\in(a,b)$，$\exists M>0$，使$|f(x)|\leqslant M$成立，对称 $f(x)$在(a,b)内是有界的. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$在(a,b)内是无界的.

1.2.6 反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域是 D，值域是 Z. 如果对于每个 $y\in Z$，存在惟一的 $x\in D$ 满足 $f(x)=y$，把 y 看作自变量，把 x 看作因变量，则 x 是一个定义在 $y\in Z$ 上的函数，记此函数为 $x=f^{-1}(y)(y\in Z)$，并称之为 $y=f(x)(x\in D)$的反函数.

习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，故常将函数 $y=f(x)(x\in D)$的反函数表示成 $y=f^{-1}(x)$ $(x\in Z)$.

它与 $x=f^{-1}(y)(y\in Z)$表示同一个函数，因为二者具有相同的定义域和相同的对应规则. 因而，在同一个直角坐标系中，函数 $y=f(x)(x\in D)$的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)(x\in Z)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

注 函数 $y=f(x)=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$上不具有反函数. 如果考虑函数 $y=f_1(x)=x^2, x\in D_1=[0,+\infty]$或函数 $y=f_2(x)=x^2, x\in D_2=(-\infty,0]$，这时常使用术语：称函数 $f_1(x)$(或 $f_2(x)$)为“函数 f 在 D_1(或 D_2)上的限制”或“函数 f 限制在 D_1(或 D_2)上”，且记作 $f|_{D_1}$(或 $f|_{D_2}$)，其本质是一个新的函数. 于是，就本例 $y=f(x)=x^2$ 在 $D_2=(-\infty,0)$上的限制 $f|_{D_2}$ 就具有反函数 $y=f^{-1}|_{D_2}(x)=-\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$. 同样，反正切函数 $y=\arctan x$ 是正切函数 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的限制的反函数，所以 $\tan(\arctan x)=x, x\in(-\infty,+\infty)$.

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$，若函数 $u=\varphi(x)$的值域为 $z(\varphi)$，$z(\varphi)\cap D(f)$非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$为复合函数. x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

注 不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数；

1.2.7 初等函数

1. 基本初等函数

下列函数统称为基本初等函数：

(1)常函数： $y=c$ (2)幂函数： $y=x^a$(a 为任意实数)

(3)指数函数： $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ (4)对数函数： $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

(5)三角函数： $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

(6)反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot} x, y=\text{arcsec} x, y=\text{arccsc} x$

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,统称为初等函数.

1.2.8 函数图形的简单组合与变换

1. 迭加;
2. 翻转;
3. 放缩;
4. 平移.

1.3 典型题型解析

题型1 求函数的定义域

【思路点拨】 当函数 $y=f(x)$ 用解析表达式给出,而又没有给出自变量的取值范围时,要求函数的定义域,就是求使该解析式有意义的自变量的取值范围.

对于表示应用问题的函数关系,其自变量的取值范围就使实际问题有意义.

记住下列简单函数的定义域: $y=\dfrac{1}{x}, D: x\neq 0$

$$y=\sqrt[2n]{x}, D: x\geqslant 0$$

$$y=\log_a x, D: x>0$$

$$y=\tan x, D: x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$$

$$y=\cot x, D: x\neq k\pi, k\in Z$$

$$y=\arcsin x, D: |x|\leqslant 1$$

$$y=\arccos x, D: |x|\leqslant 1$$

求复杂函数的定义域,就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组之解集.

【例 1.1】 (1) $y=e^{\frac{1}{x}}+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$ 的定义域是________;

(2)设 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$,则 $y=f(x^2)+f(e^x)$ 的定义域是________;

(3)设函数 $y=\sqrt{g(x)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$,则 $g(x)$ 的表达式为 $g(x)$ ________.

解 (1)由 $e^{\frac{1}{x}}$ 知, $x\neq 0$;由 $\arcsin\ln\sqrt{1-x}$ 知,

$-1\leqslant\ln\sqrt{1-x}\leqslant 1, e^{-1}\leqslant\sqrt{1-x}\leqslant e, 1-e^2\leqslant x\leqslant 1-e^{-2}$,

故所求的定义域是 $[1-e^2,0)\cup(0,1-e^{-2}]$.

(2)易求得函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-1,1)$,由此有

$\begin{cases}-1<x^2<1,\\-1<e^x<1,\end{cases}$ 因 $x^2\geqslant 0, e^x>0$,故 $\begin{cases}0\leqslant x^2<1\\0<e^x<1\end{cases}$,

即 $\begin{cases}-1<x<1,\\-\infty<x<0,\end{cases}$ 所求定义域为 $(-1,0)$.

(3)按题目中所给的条件,在 $[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$ 内必有 $g(x)\geqslant 0$ 只有 $\sin x$ 满足这个条件.

$\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$, $\cot x$ 在 $x=0$ 或 $x=\pi$ 无意义; $\cos x$ 在 $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$ 内非正.

【例 1.2】 求解下列函数的定义域.

(1) $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$; (2) $y=\sqrt{\arcsin x+\dfrac{\pi}{4}}$;

(3) $y=\sqrt{\sin x}+\log(16-x^2)$； (4) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

解 (1)由$\begin{cases}x-1>0\\x-1\neq1\\16-x^2>0\end{cases}$知$\begin{cases}x>1\\x\neq2\\|x|<4\end{cases}$，故 $1<x<2$ 或 $2<x<4$，即所求定义域为$(1,2)\cup(2,4)$；

(2)由$\begin{cases}\arcsin x+\dfrac{\pi}{4}\geqslant0\\|x|\leqslant1\end{cases}$知$\begin{cases}x\geqslant-\dfrac{\sqrt2}{2}\\-1\leqslant x\leqslant1\end{cases}$，故$-\dfrac{\sqrt2}{2}\leqslant x\leqslant1$，即所求定义域为$[-\dfrac{\sqrt2}{2},1]$；

(3)由$\begin{cases}\sin x\geqslant0\\16-x^2>0\end{cases}$知$\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\\-4<x<4\end{cases}$，故$-4<x\leqslant-\pi$ 或 $0\leqslant x\leqslant\pi$，即所求定义域为$(-4,-\pi]\cup[0,\pi]$；

(4)由$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant1\\2x-x^2\geqslant0\\2x-1>0\\2x-1\neq1\end{cases}$知$\begin{cases}-6\leqslant2x\leqslant8\\x(x-2)\leqslant0\\2x>1\\x\neq1\end{cases}$，即$\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant4\\0\leqslant x\leqslant2\\x>\dfrac12\\x\neq1\end{cases}$

所以有$\dfrac12<x<1$ 或 $1<x\leqslant2$，即所求定义域为$(\dfrac12,1)\cup(1,2]$.

题型 2 判断两个函数是否相同

【思路点拨】 由于对应法则 f 和定义域 D 是确定一个函数的要素，因此，当两个函数用不同的解析表达式表示，而其定义域 D 和对应法则 f 都相同时，它们是同一函数.

【例 1.3】 判定下列各对函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$，$g(x)=\ln(x-1)+\ln(x-2)$；

(2) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$g(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$；

(3) $f(x)=\arccos x$，$g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$；

(4) $f(x)=3-|3x-1|$，$g(x)=\begin{cases}4-3x, & x\geqslant\dfrac13,\\2+3x, & x<\dfrac13.\end{cases}$

解 (1)按对数性质，有 $\ln(x^2-3x+2)=\ln(x-1)(x-2)$

$f(x)$的定义域由$\begin{cases}x-1<0\\x-2<0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1>0\\x-2>0\end{cases}$得$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$. 显然$g(x)$的定义域只是$(2,+\infty)$，故不相同；

(2)如前所述，两个函数的对应法则 f 相同，定义域都是$(-1,1)$，故相同；

(3)由于 $\cos(\arccos x)=x$，$\cos(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x)=\sin(\arcsin x)=x$，故相同；

(4)根据绝对值的定义$\begin{cases}当\ 3x-1\geqslant0，即\ x\geqslant\dfrac13\ 时，|3x-1|=3x-1\\当\ 3x-1<0，即\ x<\dfrac13\ 时，|3x-1|=1-3x\end{cases}$，于是 $f(x)=\begin{cases}4-3x, & x\geqslant\dfrac13\\2+3x, & x<\dfrac13\end{cases}$

故 $f(x)$与 $g(x)$相同.

题型 3 确定分段函数的定义域和函数值

【思路点拨】 由于分段函数是用两个或两个以上的解析表达式表示一个函数，且对于不同的解析

表达式，自变量的取值范围又不相同，因此，分段函数的定义域是自变量 x 各个取值范围之总和. 求函数值 $f(x_0)$时，要根据 x_0 所在的取值范围，用 $f(x)$相应的表达式来求 $f(x_0)$.

【例 1.4】 设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$，求：

(1)函数的定义域；

(2)$f(0)$，$f(-1)$，$f(3)$，$f(a)$，$f(f(-1))$；

解 (1)函数的定义域是$(-\infty,0]\cup(0,+\infty]$，即$(-\infty,+\infty)$；

(2)因 $0\in(-\infty,0]$，$-1\in(-\infty,0]$由 $f(x)=2+x$，得

$$f(0)=2+0=2,f(-1)=2+(-1)=1$$

因$\exists x\in(0,+\infty)$，由 $f(x)=2^x$，得 $f(3)=2^3=8$.

当 $a\leqslant 0$ 时，由 $f(x)=2+x$ 得 $f(a)=2+a$；

当 $a>0$ 时，由 $f(x)=2^x$，得 $f(a)=2^a$.

因 $f(-1)=1$，所以 $f(f(-1))=f(1)=2^1=2$.

【例 1.5】 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$，求：$F(x)=f(x)-f(x-1)-f(x-2)$.

解 $F(x)$的表示式由各区间的函数的表示式来确定

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2-0=x^2 & 0\leqslant x<1\\ x^2-(x-1)^2-0=2x-1 & 1\leqslant x<2\\ x^2-(x-1)^2-(x-2)^2=-x^2+6x-5 & 2\leqslant x\end{cases}$$

题型 4 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$的表达式.

【思路点拨】 1. “凑法”，将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$内的中间变量的表达式，然后用“无关特性”即可得出 $f(x)$的表达式.

2. 先作变量代换，再用“无关特性”通过联立方程组，得出 $f(x)$的表达式.

【例 1.6】 设 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$f\left(\dfrac{y+z}{1+yz}\right)=1$，$f\left(\dfrac{y-z}{1-yz}\right)=2$，求 $f(y)$，$f(z)$.

解 由于
$$f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)=\ln\frac{1+\frac{y+z}{1+yz}}{1-\frac{y+z}{1+yz}}$$
$$=\ln\frac{1+yz+y+z}{1+yz-y-z}$$
$$=\ln\frac{(1+y)(1+z)}{(1-y)(1-z)}$$
$$=\ln\frac{1+y}{1-y}+\ln\frac{1+z}{1-z}$$
$$=f(y)+f(z)$$

同样，可推得
$$f\left(\frac{y-z}{1-yz}\right)=f(y)-f(z)$$

所以，为求 $f(y)$和 $f(z)$，先求 $f(y)\pm f(x)$

由题意知
$$f(y)+f(z)=\ln\frac{1+y}{1-y}+\ln\frac{1+z}{1-z}=f\left(\frac{y+z}{1+yz}\right)=1$$
$$f(y)-f(z)=\ln\frac{1+y}{1-y}-\ln\frac{1+z}{1-z}=\ln\frac{1+\frac{y-z}{1-yz}}{1-\frac{y-z}{1-yz}}=f\left(\frac{y-z}{1-yz}\right)=2$$

于是
$$f(x)=\frac{1}{2}(1+2)=\frac{3}{2},f(z)=\frac{1}{2}(1-2)=-\frac{1}{2}$$

【例 1.7】 设 $f(\frac{x+1}{2x-1})-2f(x)=x$，求 $f(x)$.

解 设 $t=\frac{x+1}{2x-1}$，可解得 $x=\frac{t+1}{2t-1}$，将其代入原等式，则有 $f(t)-2f(\frac{t+1}{2t-1})=\frac{t+1}{2t-1}$

于是有
$$\begin{cases} f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)-2f(x)=x, \\ 2f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)-f(x)=-\dfrac{x+1}{2x-1}. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)$ 看作未知数，解此线性方程组，可求得
$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{3(1-2x)}.$$

题型 5　函数奇偶性的判别

【思路点拨】 1. 依据函数奇偶性的定义；

2. 用奇偶函数的运算性质：

(1)奇函数与奇函数之和仍为奇函数；

(2)偶函数与偶函数之和仍为偶函数；

(3)奇函数与偶函数之积为奇函数；

(4)奇函数与奇函数之积为偶函数；

(5)偶函数与偶函数之积为偶函数.

3. 由奇偶函数构成复合函数的奇偶性

若 $f(x)$ 是偶函数，$\varphi(x)$ 是奇函数，则 $f(\varphi(x))$，$f(f(x))$，$\varphi(f(x))$ 均为偶函数，而 $\varphi(\varphi(x))$ 为奇函数.

4. 用函数图形的对称性.

注 任意一个定义在对称区间的函数 $f(x)$，都可写成一个偶函数 $F(x)$ 与一个奇函数 $G(x)$ 之和. 其中
$$F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

【例 1.8】 判定下列函数的奇偶性：

(1) $|f(x)|$；

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $f(x)=F(x)(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2})$，其中 $a>0$，且 $a\neq1$，$F(x)$ 是奇函数.

解 (1) $|f(x)|$ 不是奇函数，也不是偶函数，如 $f(x)=e^x$，则 $|f(x)|=e^x$

(2)函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因
$$\begin{aligned} f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2}) \\ &=\ln(\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &=-\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \\ &=-f(x) \end{aligned}$$

所以，$f(x)$ 是奇函数.

(3) 设$G(x)=\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}$，因 $G(-x)=\frac{a^x}{1+a^x}-\frac{1}{2}=\frac{1+a^x-1}{1+a^x}-\frac{1}{2}=-G(x)$

又 $F(x)$是奇函数，故 $f(x)$是偶函数.

【例 1.9】 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x<0\\ \cos x+x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$，证明 $f(x)$是偶函数.

证法一 用定义证明. 为便于理解，已知函数可写作

$$f(x)=\begin{cases}\cos x-x, & -\pi\leqslant x<0\\ 1, & x=0\\ \cos x+x, & 0<x\leqslant\pi\end{cases}$$

由于

$$f(-x)=\begin{cases}\cos(-x)-(-x), & -\pi\leqslant(-x)<0\\ 1, & -x=0\\ \cos(-x)+(-x), & 0<(-x)\leqslant\pi\end{cases}$$

即

$$f(-x)=\begin{cases}\cos x+x, & 0<x\leqslant\pi\\ 1, & x=0\\ \cos x-x, & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$$

因 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$是偶函数.

证法二 用奇偶函数的性质证明.

设 $\varphi(x)=\cos x$, $x\in[-\pi,\pi]$, $g(x)=|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$，则 $f(x)=\varphi(x)+g(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$

因 $\varphi(x)$和 $g(x)$都是偶函数，其和也是偶函数，故 $f(x)$是偶函数.

题型 6 判定函数 $f(x)$在某区间上的单调性

1. 依据函数单调增减性的定义.

2. 用奇偶函数的单调性：在区间$(-l,0)$和$(0,l)$内，奇函数的单调性保持一致，偶函数的单调性恰好相反.

3. 用复合函数的单调性：若 $f(x)$是增函数，$\varphi(x)$是减函数，则 $f(f(x))$，$\varphi(\varphi(x))$是增函数，而 $f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$是减函数.

【例 1.10】 设 $f(x)=2^{\cos x}$，$g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$，在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内(　　).

A. $f(x)$是增函数，$g(x)$是减函数　　B. $f(x)$是减函数，$g(x)$是增函数

C. $f(x)$，$g(x)$都是增函数　　D. $f(x)$，$g(x)$都是减函数

解 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，$2^x$ 是增函数，而 $\cos x$ 是减函数，故 $2^{\cos x}$是减函数.

在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内，$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是减函数，而 $\sin x$ 是增函数，故$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$是减函数.

选 D.

【例 1.11】 设 $f(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$是$(-\infty,+\infty)$内的单调增函数，证明：若 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$，则

$$\varphi(\varphi(x))\leqslant f(f(x))\leqslant\psi(\psi(x))$$

证 设 x_0 为$(-\infty,+\infty)$内的任一点，由题设，有 $\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0)$

由 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)$ 及函数的单调增加性，得

$$f(\varphi(x_0)\leqslant f(f(x_0))\qquad \psi(\psi(x_0))\leqslant f(\psi(x_0))$$

从而

$$\psi(\psi(x_0))\leqslant f(f(x_0))$$

同理可证 $f(f(x_0))\leqslant\psi(\psi(x_0))$

由 x_0 的任意，可知在$(-\infty,+\infty)$内，有 $\psi(\psi(x))\leqslant f(f(x))\leqslant\psi(\psi(x))$

题型 7 函数有界性的判定

按函数有界性的定义判定函数 $f(x)$在区间 I 上有界，可有如下情况：

(1)若存在一个正数 M,使得下式成立即可　$|f(x)|\leqslant M, x\in I$(可以没有等号);

(2)若存在的两个数 m 和 M,使得下式成立即可　$m\leqslant f(x)\leqslant M, x\in I$(可以没有等号);

(3)若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上是单调增加(减少)的,因

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)\quad (f(b)\leqslant f(x)\leqslant f(a)), x\in[a,b]$$

故 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

【例 1.12】 求证下列函数在其定义域内是有界的.(1)$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$;

(2)$f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

证　(1)函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,

都有
$$x^2\pm 2x+1=(x\pm 1)^2\geqslant 0$$
所以
$$x^2+1\geqslant \pm 2x$$
由 $x^2+1\geqslant 2x$　得
$$\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$$
由 $x^2+1\geqslant -2x$　得
$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}$$
故
$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}\text{或}\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

由有界性定性,$f(x)$在定义域内是有界函数

(2)对二次三项式 x^2+2x+5,其判别式
$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\cdot 5<0$$
故它没有实根.因此,函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有
$$x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geqslant 4$$
即
$$0\leqslant\frac{1}{x^2+2x+5}\leqslant\frac{1}{4}$$

因此,函数 $f(x)$在其定义域内是有界的.

题型 8　求解给定函数的周期或周期性证明

【思路点拨】 1.依据函数周期性的定义.

2.若函数 $f(x)$的周期为 T,则 $f(ax+b)$的周期为$\dfrac{T}{|a|}$.

3.若函数 $f(x)$,$g(x)$的周期都是 T,则 $f(x)\pm g(x)$的周期也是 T.

4.若函数 $f(x)$,$g(x)$的周期分别是 T_1,T_2($T_1\neq T_2$),则 $f(x)\pm g(x)$和 $f(x)\cdot g(x)$都是以 T_1 和 T_2 的最小公倍数 T 为周期的函数.

几个常见的周期函数:$\sin x$,$\cos x$ 的周期是 2π;$\tan x$,$\cot x$ 的周期为 π.

【例 1.13】 设 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$,则在$(-\infty,+\infty)$内,$f(x)$(　　).

A.是周期函数,周期是 π　　B.是周期函数,周期是 2π

C.是周期函数,周期是 3π　　D.不是周期函数

解由题设,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$f(x+2\pi)=f((x+\pi)+\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+\pi)=f(x)+\sin x-\sin x=f(x)$

而当 $x\neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$时,$f(x+\pi)\neq f(x)$.

所以,$f(x)$是以 2π 为周期的周期函数.选 B.

【例 1.14】 证明 $f(x)=x-[x]$在$(-\infty,+\infty)$上是有界周期函数.

证 当 $n\leqslant x<n+1(n=0,x\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，有

$$f(x)=x-[x]<n+1-n=1$$

$$f(x)=x-[x]\geqslant n-n=0$$

即 $0\leqslant f(x)<1$，所以，$f(x)$ 是有界函数.

对于任意的 $k\in N$，因为 $f(x+k)=x+k-[x+k]=x+k-([x]+k)=x-[x]=f(x)$

所以 $f(x)$ 是以 $k(k\in N)$ 为周期的周期函数.

【例 1.15】 设 $f(x)$ 是奇函数，$f(1)=a$，且 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1)试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$；

(2)问 a 取何值时，$f(x)$ 以 2 为周期.

解 (1)取 $x=-1$，得 $f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)$

取 $x=1$，得

$$f(2)=f(3)-f(1)$$

取 $x=3$，得

$$f(2)=f(5)-f(3)$$

所以

$$f(2)=2a,f(5)=2f(2)+f(1)=5a$$

(2)若使 $f(x)$ 以 2 为周期，即对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+2)-f(x)=0$

由题设知 $f(2)=0$，于是取 $a=0$ 时，$f(x)$ 以 2 为周期.

题型 9 求反函数

首先，由已知函数式式 $y=f(x)$ 解出 x，得到关系式 $x=f^{-1}(y)$；

其次，将字母 x 与 y 互换，便得到所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$.

【例 1.16】 已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$，且 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，则 $g(x)$ ________.

解 依题设知，这是求 $f(x)$ 的反函数，设 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

由此式解出 x 得 $\quad ye^{2x}+y=e^{2x}-1$ 或 $e^{2x}=\dfrac{1+y}{1-y},x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$

于是

$$g(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

【例 1.17】 设 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$，求 $f^{-1}(3)$.

【分析】 由 $x=f^{-1}(f(x))$ 知，当 $f(x)=3$ 时所对应的 x 即为所求.

解 将 3 代入已知式 $f(x)=\dfrac{4x}{x-1}$ 的左端，所求 x 的值即为 $f^{-1}(3)$. 于是 $3=\dfrac{4x}{x-1}$，得 $x=-3$，即 $f^{-1}(3)=-3$.

【例 1.18】 设 $f(x)=\begin{cases}x,-\infty<x<1\\x^2,1\leqslant x\leqslant4\\2^x,4<x<+\infty\end{cases}$，求 $f^{-1}(x)$.

解 求分段函数的反函数，只要求出各区间段的反函数及定义域即可.

由 $y=x,-\infty<x<1\Rightarrow x=y,-\infty<y<1$，

由 $y=x^2,1\leqslant x\leqslant4\Rightarrow x=\sqrt{y},1\leqslant y\leqslant16$

由 $y=2^x,4<x<+\infty\Rightarrow x=\log_2 y,16<y<+\infty$.

将以上所得各式中的字母 x 与 y 对换，则得到 $f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}$$

题型 10 求复合函数

【思路点拨】 将两个或两个以上函数进行复合，通常有三种方法：

1 代入法

将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法，称之为代入法. 该法适用于初等函数的复合.

2 分析法

所谓分析法就是根据最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法. 该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合.

3 图示法

所谓图示法是借助于图形的直观性达到将函数复合的一种方法. 该法适用于分段函数，尤其是两个均为分段函数的复合.

【例 1.19】 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求(1) $f[\dfrac{1}{f(x)}]$；(2) $f\{f[f(x)]\}$.

解 (1) $f[\dfrac{1}{f(x)}]=f(1-x)=\dfrac{1}{1-(1-x)}=\dfrac{1}{x}(x\neq 1,x\neq 0)$

(2) $f[f(x)]=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}(x\neq 1,\ x\neq 0)$

则
$$f\{f[f(x)]\}=f(1-\frac{1}{x})=\frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})}=x,(x\neq 1.\ x\neq 0).$$

【例 1.20】 设 $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)\cdots))$，若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f_n(x)$.

解
$$f_2(x)=f(f(x))=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$
$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^{\,2}(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

比较上述两式，由数学归纳法可证 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

题型 11 抽象复合函数的定义域

【思路点拨】 根据外层函数的定义域，结合中间变量的具体表达式，求出自变量取值范围.

【例 1.21】 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域.

解 记 $F(x)=f(x+a)+f(x-a)$，由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，若 x 为 $F(x)$ 定义域内的点，则
$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}(a>0)$$

从而，$a\leqslant x\leqslant 1-a$

因此，当 $a<1-a$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $[a,1-a]$；当 $a=1-a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 $\{\dfrac{1}{2}\}$；当 $a>1-a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，定义域为 Φ.

【例 1.22】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$