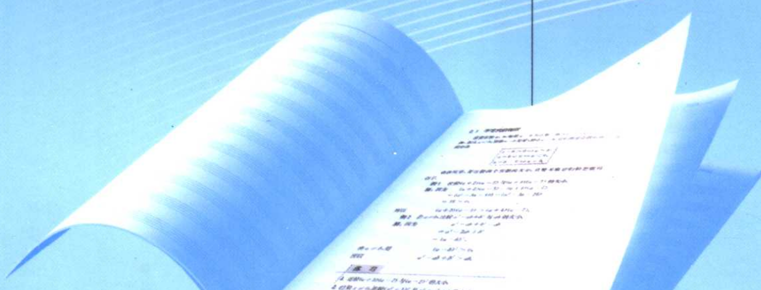
数学

SHUXUE

下册

师范（高职高专）院校

学前教育专业系列教材



河海大学出版社

下册

数学

SHUXUE

师范（高职高专）院校
学前教育专业系列教材

学前教育专业教材编写组◎编

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学·下册/姚敏，王晓凤主编. —南京：河海大学出版社，2006.8

师范(高职高专)院校学前教育专业系列教材

ISBN 7-5630-2291-0

Ⅰ. 数... Ⅱ. ①姚... ②王... Ⅲ. 数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 098519 号

书　　名/数学·下册

书　　号/ISBN 7-5630-2291-0/O·132

责任编辑/周　勤　潘仲华

装帧设计/杭永鸿

出　　版/河海大学出版社

地　　址/南京市西康路 1 号(邮编:210098)

电　　话/(025)83737852(行政部)　(025)83722833(发行部)

经　　销/江苏省新华书店

印　　刷/南京玉河印刷厂

开　　本/890 毫米×1240 毫米　1/32　10.5 印张　254 千字

版　　次/2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷

定　　价/16.00 元

序

国家的兴盛在教育，教育的基础在教师。《中共中央国务院关于深化教育改革，全面推进素质教育的决定》、《国务院关于基础教育改革与发展的决定》及教育部颁发的《基础教育课程改革纲要》对教师教育提出了新的更高的要求。我省的教师教育已在“九五”计划期间进行了规模、布局和结构调整，平稳地由三级师范过渡为二级师范，大学专科初等（学前）教育专业已经成为我省培养小学、幼儿园师资的主要阵地。

但是，适合培养大学专科程度小学、幼儿园教师的培养模式还在探索中，适合这种模式的课程体系还在构建中，特别是适应这个专业的教材体系也在开发之中。

为适应形势的需要，在省教育厅的关怀指导下，辽宁省教育学会师范专业委员会联合全省 17 所院校共同发起成立了辽宁省师范（高职高专）院校初等（学前）教育专业教材编写委员会，联合编写大学专科初等（学前）教育专业系列教材，供我省大学专科初等（学前）教育专业各学科选用。

这套系列教材编写的指导思想是以“教育要面向现代化，面向世界，面向未来”为指针，以国家教育部下发的《关于加强专科以上学历小学教师培养工作的几点意见》为依据，以目前专科学历小学、幼儿园教师培养的研究与教学实践为基础，积极适应基础教育课程改革，吸收借鉴国内外小学、幼儿园教师教育新成果，构建具有先进性、时代性的初等（学前）教育专业的教材体系。新教材要体现改革精神；体现以学生为本的教育理念；体现思想性、科学性、师范性和整体性，树立精品意识。

本套系列教材的编写人员绝大部分是省内外师范高等专科学校的学科带头人，他们具有丰富的大专教学经验和较高的学术水平。全部书稿都经过了知名专家的审定。

本套系列教材试用于初中起点、五年制大学专科初等（学前）教育专业的学生，包括普师、音乐、美术、体育、英语、双语、计算机各类专业的学生，其他专业的学生也可使用本套教材。

在教材编写的过程中，得到了省教育厅有关领导、省教育厅基础教育与教师教育处有关领导和省内有关学校的大力支持，在此一并表示诚挚的谢意。

辽宁省师范（高职高专）院校
初等（学前）教育专业教材编写委员会

二〇〇五年元月

目录

第六章　直线和圆的方程 …… 1
一　直线的方程 …… 1
6.1　直线的倾斜角和斜率 …… 1
6.2　直线方程的点斜式和斜截式 …… 5
6.3　直线方程的一般式 …… 10
二　两条直线的位置关系 …… 14
6.4　两条直线的平行和垂直 …… 14
6.5　两条直线的夹角 …… 20
6.6　两条直线的交点 …… 23
6.7　点到直线的距离 …… 25
6.8　简单的线性规划 …… 29
三　曲线和方程 …… 39
6.9　曲线和方程 …… 39
6.10　圆的方程 …… 46

第七章　圆锥曲线方程 …… 80
一　椭圆 …… 81
7.1　椭圆及其标准方程 …… 81

7.2　椭圆的简单几何性质 …… 87
二　双曲线 …… 95
7.3　双曲线及其标准方程 …… 95
7.4　双曲线的简单几何性质 …… 101
三　抛物线 …… 107
7.5　抛物线及其标准方程 …… 107
7.6　抛物线的简单几何性质 …… 113

第八章　直线、平面、简单几何体 …… 129
一　平面 …… 130
8.1　平面的概念 …… 130
8.2　平面的基本性质 …… 132
二　空间直线 …… 136
8.3　空间两条直线的位置关系 …… 137
8.4　平行直线 …… 140
8.5　两条异面直线所成的角 …… 143
三　空间直线和平面 …… 147
8.6　直线与平面平行的判定和性质 …… 148
8.7　直线与平面垂直的判定和性质 …… 152
8.8　三垂线定理 …… 159
四　空间两个平面 …… 166
8.9　平面与平面平行的判定和性质 …… 167
8.10　二面角 …… 171
8.11　两个平面垂直的判定和性质 …… 174
五　简单的几何体 …… 178
8.12　棱柱 …… 178
8.13　棱锥 …… 183
8.14　球 …… 188

第九章　排列、组合和概率 …… 208
一　排列与组合 …… 209
9.1　分类计数原理与分步计数原理 …… 209
9.2　排列 …… 214
9.3　排列数公式 …… 217
9.4　组合 …… 225
9.5　组合数公式 …… 227
二　二项式定理 …… 235
9.6　二项式定理 …… 235
9.7　二项式系数的性质 …… 239
三　概率 …… 243
9.8　随机事件的概率 …… 243
9.9　互斥事件有一个发生的概率 …… 253
9.10　相互独立事件同时发生的概率 …… 258
9.11　独立重复试验 …… 264

参考答案 …… 278

第六章
直线和圆的方程

一　直线的方程

知识要点：

斜率公式　$k=\tan\alpha\ (0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ)$

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ (x_1\neq x_2)$$

直线方程

点斜式　$y-y_1=k(x-x_1)$

斜截式　$y=kx+b$

一般式　$Ax+By+C=0$ (A, B 不同时为 0)

6.1　直线的倾斜角和斜率

1. 直线与方程的关系

在研究一次函数时，在平面直角坐标系中画出的一次函数图像是一条直线. 例如，函数 $y=2x+1$ 的图像是直线 l(图 6-1). 这时，满足函数式 $y=2x+1$ 的每一对 x, y 的值都是直线 l 上的点的坐标，例如数对(0, 1)满足函数式，在直线 l 上就有一点 A，它的坐标是(0, 1)；而直线 l 上的每一点的坐标都满足函数式，例如直

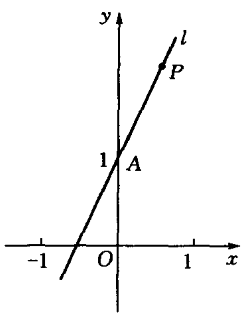


图 6-1

线 l 上点 P 的坐标是(1, 3)，数对(1, 3)就满足函数式.

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线，它是以满足 $y=kx+b$ 的每一对 x，y 的值为坐标的点构成的. 由于函数式 $y=kx+b$ 也可以看作二元一次方程，所以我们也可以说，这个方程的解和直线上的点存在这样的对应关系.

以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点，反过来，这条直线上的点的坐标都是这个方程的解，这时，这个方程就叫做这条**直线的方程**，这条直线就叫做这个**方程的直线**.

在平面直角坐标系中研究直线时，就是利用直线与方程的这种关系，建立直线的方程，并通过方程来研究直线的有关问题.

2. 直线的倾斜角和斜率

直线 l 在直角坐标系中与两条坐标轴有不同的夹角. 规定：**直线 l 向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角，叫做直线 l 的倾斜角**（图 6-2 中的 α）.

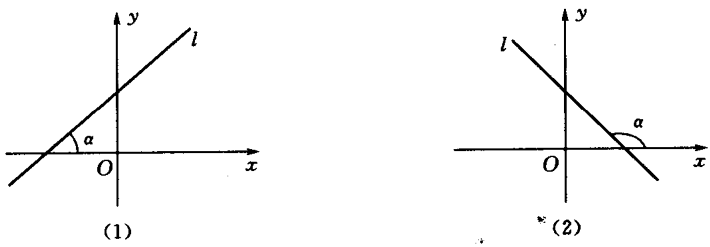


图 6-2

特别地，当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 0°. 因此，直线的倾斜角的取值范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$.

倾斜角不是 90°的直线，它的倾斜角的正切叫做**这条直线的斜率**. 直线的斜率通常用 k 表示，即

$$k=\tan\alpha$$

倾斜角是 90°的直线的斜率不存在；倾斜角为锐角时，$k>0$；倾斜角为钝角时，$k<0$.

现在设直线上两点 P_1, P_2 的坐标是 (x_1, y_1), (x_2, y_2)，直线 P_1P_2 的倾斜角 α 不等于 $90°$，我们来求直线 P_1P_2 的斜率.

过 P_1, P_2 分别向 x 轴作垂线 P_1M_1, P_2M_2，再过 P_1 作 $P_1Q \perp P_2M_2$，垂足分别是 M_1, M_2, Q，那么

$$\alpha = \angle QP_1P_2 \text{（图 6-3(1)）}$$

或

$$\alpha = \angle PP_1P_2 \text{（图 6-3(2)）}.$$

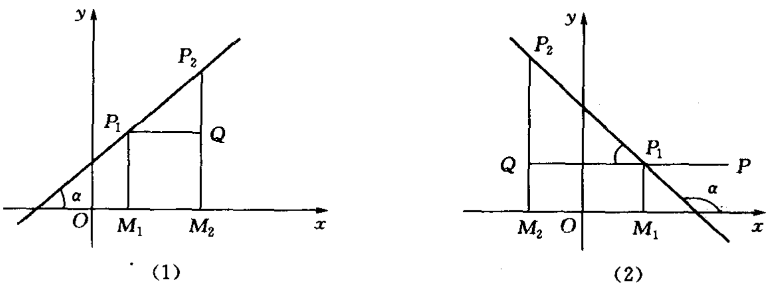


图 6-3

在图 6-3(1)里，

$$\tan\alpha = \tan\angle QP_1P_2 = \frac{QP_2}{P_1Q} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

在图 6-3(2)里，

$$\begin{aligned}\tan\alpha = \tan\angle PP_1P_2 &= \tan(180° - \angle QP_1P_2)\\ &= -\tan\angle QP_1P_2\\ &= -\frac{QP_2}{QP_1} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}\\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\end{aligned}$$

所以，我们得到经过 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 两点的直线的斜率公式

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_1 \neq x_2).$$

注意，当 $x_1=x_2$ 时，直线的倾斜角是 $90°$，斜率 k 不存在.

例 1　如图 6-4 所示，直线 l_1 的倾斜角 $\alpha_1=30°$，直线 $l_1\perp l_2$，求 l_1，l_2 的斜率.

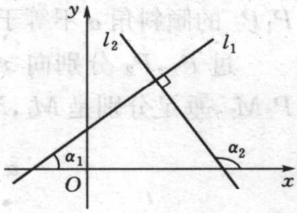


图 6-4

解：l_1 的斜率 $k_1=\tan\alpha_1=\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为 l_2 的倾斜角 $\alpha_2=90°+30°=120°$，所以 l_2 的斜率

$$k=\tan120°=\tan(180°-60°)=-\tan60°=-\sqrt{3}.$$

例 2　求经过 $A(-2,0)$，$B(-5,3)$ 两点的直线的斜率和倾斜角.

解：$k=\dfrac{3-0}{-5-(-2)}=-1$，即 $\tan\alpha=-1$.

因为 $0°\leqslant\alpha<180°$，所以 $\alpha=135°$.

因此，这条直线的斜率是 -1，倾斜角是 $135°$.

练　习

1. 已知直线的倾斜角，求直线的斜率：

(1) $\alpha=0$；　(2) $\alpha=\frac{\pi}{4}$；　(3) $\alpha=\frac{\pi}{2}$；　(4) $\alpha=\frac{5\pi}{6}$.

2. 根据下列条件确定直线 l 的倾斜角 α 和斜率 k：

(1) 直线 l 平行于 x 轴时，则 $\alpha=$ ________，$k=$ ________；

(2) 直线 l 平行于 y 轴时，则 $\alpha=$ ________，$k=$ ________.

3. 求经过下列每两点的直线的斜率和倾斜角：

(1) $(0,-2)$，$(4,2)$；

(2) $(0,-4)$，$(-\sqrt{3},-1)$；

(3) $(0,0)$，$(-1,-\sqrt{3})$；

(4) $(-\sqrt{3},\sqrt{2})$，$(\sqrt{2},-\sqrt{3})$.

4. 根据下列条件，求直线的倾斜角：

(1) 直线的斜率 $k=\sqrt{3}$；　　(2) 直线的斜率 $k=-1$；

(3) 直线的斜率 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$；　　(4) 直线与 x 轴平行.

习　题　6.1

1. 已知直线的倾斜角，求直线的斜率：

(1) $\alpha=\frac{\pi}{3}$；　　(2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$；

(3) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$；　　(4) $\alpha=2$.

2. 一直线通过 $A(-a, 3)$ 和 $B(5, -a)$ 两点，且斜率等于 1，求 a 的值.

3. 四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2, 3)$，$B(1, -1)$，$C(-1, -2)$，$D(-2, 2)$，求四条边所在直线的斜率和倾斜角.

4. 当且仅当 m 为何值时，经过两点 $A(m, 2)$，$B(-m, 2m-1)$ 的倾斜角是 45°？

5. 若三点 $A(-2, 3)$，$B(3, -2)$，$C\left(\frac{1}{2}, m\right)$ 共线，求 m 的值.

6. 已知两点 $A(-1, -5)$，$B(3, -2)$，直线 l 的倾斜角是直线 AB 倾斜角的一半，求直线 l 的斜率.

6.2　直线方程的点斜式和斜截式

1. 点斜式

如图 6-5 所示，直线 l 经过点 $P_1(x_1, y_1)$，并且它的斜率是 k，求直线 l 的方程.

设点 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于 P_1 的任意一点. 因直线 l 的斜率为 k，根据经过两点的直线的斜率公式，得

$$k=\frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

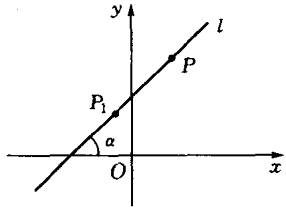


图 6-5

上式可化为　$y-y_1=k(x-x_1)$.

这个方程就是斜率为 k 且过点 $P_1(x_1, y_1)$的直线 l 的方程.

可以验证：直线 l 上的每个点的坐标都是这个方程的解；反过来，以这个方程的解为坐标的点都在直线 l 上.

由于这个方程是由直线上一点和直线的斜率确定的，所以叫做直线的**点斜式方程**.

例 1　一条直线经过点 $P_1(-2, 3)$，倾斜角 $\alpha=45^\circ$，求这条直线的方程，并画出图形.

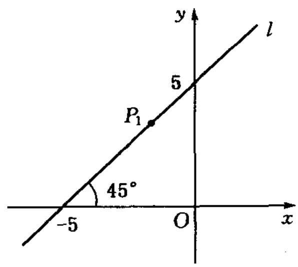


图 6-6

解：这条直线经过点 $P_1(-2, 3)$，斜率是

$$k=\tan 45^\circ=1.$$

代入点斜式，得

$$y-3=x+2,$$

即

$$x-y+5=0.$$

此方程为所求的直线方程，图形如图 6-6 所示.

例 2　求满足下列条件的直线方程.

(1) 直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1)$，且平行于 x 轴.

(2) 直线 l 过点 $P_1(x_1, y_1)$，且平行于 y 轴.

解：(1) 因为直线 l 平行于 x 轴，所以倾斜角 $\alpha=0^\circ$，斜率 $k=0$，由点斜式得直线 l 的方程为

$$y-y_1=0(x-x_1),$$

即

$$y=y_1.$$

(2) 因为直线 l 平行于 y 轴，所以倾斜角 $\alpha=90^\circ$，直线 l 没有斜

率，它的方程不能用点斜式表示，但因 l 上的每一点的横坐标都等于 x_1，所以它的方程为

$$x = x_1.$$

特别地，当直线 l 与 x 轴重合时，它的方程为 $y=0$；当直线 l 与 y 轴重合时，它的方程为 $x=0$.

1. 写出下列直线的点斜式方程，并画出图形：
   (1) 经过点 $A(2, 5)$，斜率是 4；
   (2) 经过点 $B(4, -2)$，倾斜角是 $120°$；
   (3) 经过点 $C(2, -3)$，倾斜角是 $0°$.
2. 根据下列直线的点斜式方程，写出各直线的斜率和倾斜角：
   (1) $y-2=x-1$；
   (2) $y+2=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$.

2. 斜截式

一条直线与 x 轴交点的横坐标，叫做这条直线**在 x 轴上的截距**；一条直线与 y 轴交点的纵坐标，叫做这条直线**在 y 轴上的截距**. 例如，直线 l 与 x 轴交于点 $(2, 0)$，与 y 轴交于点 $(0, -3)$，则实数 2 就叫做直线 l 在 x 轴上的截距，实数 -3 就叫做直线在 y 轴上的截距.

已知直线 l 的斜率是 k，在 y 轴上的截距是 b，求出直线的方程，并化为函数 $y=f(x)$ 的形式.

因为 b 是直线 l 与 y 轴交点的纵坐标，所以直线 l 与 y 轴交于点 $(0, b)$，又已知直线 l 的斜率为 k，由点斜式得出直线 l 的方程

$$y-b=k(x-0).$$

化为函数 $y=f(x)$ 的形式，得

$$y = kx + b.$$

这个方程是由直线的斜率和它在 y 轴上的截距确定的，所以叫做直线的**斜截式方程**.

例 3　求与 y 轴交于点 $(0, -3)$，且倾斜角为 $135°$ 的直线方程.

解：直线在 y 轴上的截距 $b=-3$，斜率 $k=\tan 135°=-1$，代入斜截式，得

$$y=-x-3,$$

即

$$x+y+3=0.$$

例 4　化直线的点斜式方程 $y-2=\frac{1}{3}(x+2)$ 为直线的斜截式方程，并指出直线的斜率和在 y 轴上的截距.

解：由方程 $y-2=\frac{1}{3}(x+2)$ 得

$$y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3},$$

所以，此直线的斜截式方程为 $y=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$，斜率为 $\frac{1}{3}$，在 y 轴上的截距为 $\frac{8}{3}$.

练习 2

1. 写出下列直线的斜截式方程，并画出图形：

   (1) 斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，在 y 轴上的截距是 -2；

   (2) 倾斜角是 $135°$，在 y 轴上的截距是 3.

2. 指出下列直线的斜率和在两坐标轴上的截距：

   (1) $y=2x+3$；　　(2) $y=-\sqrt{3}(x+5)$；

   (3) $x=2y-1$；　　(4) $2x-y-7=0$.

习题 6.2

1. 根据下列条件写出直线的方程,并画出图形:

(1) 倾斜角是$\frac{\pi}{6}$,经过点 $A(8, -2)$;

(2) 经过点 $B(-2, 0)$,且与 x 轴垂直;

(3) 斜率为-2,在 y 轴上的截距是 8;

(4) 在 y 轴上的截距是 2,且与 x 轴平行.

2. 一直线经过点 $A(2, -3)$,它的倾斜角等于直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角的 2 倍,求这条直线的方程.

3. 直线与 y 轴的交点到原点的距离为 2,且斜率为-3,求直线的方程.这样的直线有几条?请画出图形.

4. 一条直线在 y 轴上的截距为-2,它的倾斜角是锐角,且倾斜角的正弦值等于$\frac{4}{5}$,求此直线的方程.

5. 选择题:

(1) 已知直线经过点 $A(-2,0)$,$B(-5,3)$,那么该直线的倾斜角是 ( )

A. $150°$　　B. $135°$

C. $75°$　　D. $45°$;

(2) 直线 $y=kx+b(b\neq 0)$ 不经过第二象限,则 ( )

A. $k\cdot b<0$　　B. $k\cdot b\leqslant 0$

C. $k\cdot b>0$　　D. $k\cdot b\geqslant 0$;

(3) 直线 $y=ax-\frac{1}{a}$ 的图像可能是下图中的 ( )