大学本科数学教材

高等数学（上册）

GAODENG SHUXUE

习题解答与测试

XITI JIEDA YU CESHI

邱忠文　蔡高厅　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

大学本科数学教材

高等数学

（上册）

习题解答与测试

邱忠文　蔡高厅　主编

天津大学出版社
Tianjin University Press

内容提要

本书是与天津大学出版社出版、由相同作者主编的《高等数学》(上册)配套的辅导教材.内容包括函数、极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何等7章的全部习题的解答过程及答案.每一章后都另配有复习题及自我测试题.复习题随题给出了解答过程及答案;自我测试题的解答过程及答案在书末统一给出.

本书不仅适合全日制普通高等学校本科生使用,而且适合网络高等教育、函授教育、高等职业技术教育及成人高等教育的本科生使用,也适合自学.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)习题解答与测试./邱忠文,蔡高厅主编.—天津:天津大学出版社,2004.9
ISBN 7-5618-2008-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①邱…②蔡… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 080457 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
网 址 www.tjup.com
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印 刷 河北省昌黎县第一印刷厂
经 销 全国各地新华书店
开 本 148mm×210mm
印 张 11.5
字 数 343千
版 次 2004年9月第1版
印 次 2004年9月第1次
印 数 1- 4 000
定 价 19.00元

前言

为了适应高等理工科院校本科生对高等数学课程的学习需要，结合当前的教学实际，我们编写了《高等数学(上、下册)习题解答与测试》作为高等数学课程的教学参考书.本书无论对全日制普通高等学校的学生，或是网络高等教育、函授、高等职业技术教育及成人高等教育的学生学习高等数学课程都是较为适用的辅导参考书.如果能与我们编写的《高等数学》(上、下册)课本配套使用，则效果更好.

高等数学是高等理工类、经济和管理类院校本科生最主要的基础理论课之一.对学生在校期间学习后继课程与今后的专业发展都有深远影响.本书编者在全日制普通高等学校长期从事高等数学及应用数学的教学工作，最近几年又在远程网络高等教育及高等职业技术教育和成人高等教育的教学中积累了丰富的教学经验，深刻了解学生的学习情况和要求.本书就是为了满足学生的学习要求，辅导学生更好地学习《高等数学》而编写的.

本书分为上、下册，与我们编写的《高等数学》教材上、下册配套使用.全书内容覆盖了现行的理工类院校高等数学(本科生)教学的全部内容.上册包括：函数、极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及向量代数与空间解析几何等7章的全部习题解答过程及答案，每一章另附有复习题及自我测试题，并且也都给出了全部解答过程及答案，更便于读者学习.

本书的编写和出版，得到了天津大学网络教育学院的大力支持和教学管理部的具体帮助，编者在此深表感谢.

参加本书编写工作的有：邱忠文、蔡高厅、李君湘、严丽、韩健、韩月丽、孙秀萍、刘瑞金等.由于编者的水平有限，书中若有疏误之处，敬请读者批评指正.

编者

2004.2　于天津大学

目 录

第 1 章　函　数

习题　1-1

1. 用区间记号表示下列实数集.

(1) $\{x \mid x \leqslant 0\}$.

解　$(-\infty, 0] = \{x \mid -\infty < x \leqslant 0\}$.

(2) $\{x \mid -1 < x \leqslant 3\}$.

解　$(-1, 3] = \{x \mid -1 < x \leqslant 3\}$.

(3) $\{x \mid |x-1| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$.

解　$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) = \{x \mid |x-1| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$.

(4) $\{x \mid x \in N(a, \delta), \delta > 0\}$.

解　$(a-\delta, a+\delta) = \{x \mid x \in N(a, \delta), \delta > 0\}$.

2. 下列 $f(x)$ 和 $g(x)$ 哪些是相同的函数.

(1) $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$.

解　$f(x)$ 的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$，$g(x)$ 的定义域 $D_g = [0, +\infty)$，因为 $D_f \neq D_g$，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不是相同函数.

(2) $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = |x|$.

解　因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同 $D_f = D_g = (-\infty, +\infty)$，且对应规律相同 $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是相同函数.

(3) $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$.

解　$f(x)$ 的定义域 $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，$g(x)$ 的定义域 $D_g = (0, +\infty)$，因为 $D_f \neq D_g$，所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不是相同函数.

(4)$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg|x|$.

解 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同 $D_f=D_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且对应规律相同 $f(x)=\lg x^2=\lg|x|^2=2\lg|x|=g(x)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数.

(5)$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同 $D_f=D_g=(-\infty,+\infty)$，且对应规律相同 $f(x)=[x^3(x-1)]^{\frac{1}{3}}=x(x-1)^{\frac{1}{3}}=x\sqrt[3]{x-1}=g(x)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数.

(6)$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}, g(x)=x-1$.

解 $f(x)$ 的定义域 $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域 $D_g=(-\infty,+\infty)$，因为 $D_f\neq D_g$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同函数.

3.求下列函数的定义域.

(1)$y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$.

解 为了使函数 y 有定义，其自变量 x 必须满足不等式：$x^2-4\neq 0$，即 $x\neq\pm2$，因此函数 y 的定义域 $D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)$y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

解 为了使函数 y 有定义，其自变量 x 必须满足不等式

$$\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\text{即}|2x-1|\leqslant 7,$$

或 $$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,\ -3\leqslant x\leqslant 4,$$

因此函数 y 的定义域 $D_f=[-3,4]$.

(3)$y=\sqrt{\lg(x^2-3)}$.

解 为了使函数 y 有定义，其自变量 x 必须满足不等式组

$$\begin{cases}x^2-3>0,\\ \lg(x^2-3)\geqslant 0,\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x^2>3,\\ x^2-3\geqslant 1,\end{cases}$$

取其公共部分 $x^2\geqslant 4$，即 $x\geqslant 2$，或 $x\leqslant -2$. 因此函数 y 的定义域 $D_f=$

$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(4) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\lg(1-x)}$.

解　为了使函数 y 有定义,其自变量 x 必须满足不等式组

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 1-x>0,\\ 1-x\neq 1,\end{cases}\quad 或\begin{cases}x\geqslant -1,\\ x<1,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

因此函数 y 的定义域 $D_f=[-1,0)\cup(0,1)$.

4.设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-2),f(0),f(5)$ 及 $f(x-1)$.

解　由函数的表示式 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 有

$$f(-2)=(1+x)|_{x=-2}=-1,$$

$$f(0)=(1+x)|_{x=0}=1,$$

$$f(5)=2^x|_{x=5}=2^5=32,$$

$$f(x-1)=\begin{cases}1+(x-1), & -\infty<x-1\leqslant 0,\\ 2^{x-1}, & 0<x-1<+\infty,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x, & -\infty<x\leqslant 1,\\ 2^{x-1}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

5.设 $y=\dfrac{x}{2}f(t-x)$,且当 $x=1$ 时,$y=\dfrac{1}{2}t^2-t+\dfrac{1}{2}$,求 $f(x)$.

解　依题设有

$$y|_{x=1}=\frac{x}{2}f(t-x)|_{x=1}=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2},$$

即　$f(t-1)=t^2-2t+1=(t-1)^2$,

于是有　$f(x)=x^2$.

6.设 $g(x)=x^2+2x$,求 $\dfrac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$,$(h\neq 0)$.

解　设 $g(x)=x^2+2x$,则

$$\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^2+2(x_0+h)-(x_0^2+2x_0)}{h}$$
$$=2(x_0+1)+h.$$

7.设 $\varphi(t-1)=t(t-1)$,求 $\varphi(t)$.

解 由题设有

$$\varphi(t-1)=t(t-1)=(t-1+1)(t-1),$$

于是 $\quad\varphi(t)=(t+1)t.$

8.讨论下列函数的单调增减性.

(1)$f(x)=3x+2$.

解 函数 $f(x)=3x+2$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,对任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=3x_1+2-(3x_2+2)=3(x_1-x_2)<0,$$

即 $\quad f(x_1)<f(x_2)$,

所以 $f(x)=3x+2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调增函数.

(2)$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

解 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,对任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则有

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1-x_2}=3^{x_2-x_1},$$

由于 $x_2-x_1>0$,故 $3^{x_2-x_1}>1$,因此有 $f(x_1)>f(x_2)$,所以 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是严格单调减函数.

(3)$f(x)=\lg x$.

解 函数 $f(x)$ 的定义域 $D_f=(0,+\infty)$.对任意的实数 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则有

$$f(x_1)-f(x_2)=\lg x_1-\lg x_2=\lg\frac{x_1}{x_2},$$

由于$\frac{x_1}{x_2}<1$,故$\lg\frac{x_1}{x_2}<0$,即$f(x_1)<f(x_2)$,所以$f(x)=\lg x$在定义域$(0,+\infty)$内是严格单调增函数.

(4)$f(x)=1-3x^2$.

解　函数$f(x)=1-3x^2$的定义域$D_f=(-\infty,+\infty)$,对任意的实数$x_2>x_1$,有

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=(1-3x_1^2)-(1-3x_2^2)\\&=3(x_2^2-x_1^2)=3(x_2+x_1)(x_2-x_1).\end{aligned}$$

当$x_1,x_2\in(-\infty,0]$,且$x_2>x_1$时,有$x_2+x_1<0,x_2-x_1>0$,从而

可知　$f(x_1)-f(x_2)=3(x_2+x_1)(x_2-x_1)<0$,

即　$f(x_1)<f(x_2)$,

所以,$f(x)=1-3x^2$在$(-\infty,0]$内是严格单调增函数;

当$x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且$x_2>x_1$时,有$x_2+x_1>0,x_2-x_1>0$,从而

可知　$f(x_1)-f(x_2)=3(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$,

即　$f(x_1)>f(x_2)$.

所以,$f(x)=1-3x^2$在$[0,+\infty)$内是严格单调减函数.

9.判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=e^{x^2}$.

解　因为$f(x)=e^{x^2}$的定义域$D_f=(-\infty,+\infty)$,它是关于原点O对称的,对任意的$x\in D_f$,恒有等式

$$f(-x)=e^{(-x)^2}=f(x)$$

成立,所以$f(x)=e^{x^2}$是偶函数.

(2)$f(x)=\tan x$.

解　因为函数$f(x)=\tan x$的定义域为$D_f=\{x\mid-\infty<x<+\infty$,但$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\}$.它是关于原点$O$对称的,对任意的$x\in D_f$,应有等式

$$f(-x)=\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x=-f(x)$$

成立,所以 $f(x)=\tan x$ 是奇函数.

(3) $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$.

解 因为 $f(x)=a^x$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,它是关于原点对称的,但对任意的 $x\in D_f$, $f(-x)=a^{-x}$,

$$f(-x)\neq f(x)(x\neq 0),\text{且 } f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)=a^x$ 是非奇非偶函数.

(4) $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$.

解 般为 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,它是关于原点对称的,对于任意的 $x\in D_f$,恒有等式

$$f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-x}+a^{-(-x)})=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})=f(x)$$

成立,所以 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$是偶函数.

(5) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$.

解 为了使函数 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$有定义,其自变量 x 必须满足不等式

$$\frac{1-x}{1+x}>0.$$

由 $\begin{cases}1-x>0,\\1+x>0\end{cases}$ 可推知 $-1<x<1$;

由 $\begin{cases}1-x<0,\\1+x<0\end{cases}$ 可推知 x 无解集.

函数 $f(x)$的定义域 $D_f=(-1,1)$是关于原点对称的,对任意的 $x\in D_f$,恒有等式

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$$

成立,所以 $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$是奇函数.

(6)$f(x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$.

解 函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$ 的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,它是关于原点对称的,对任意的 $x\in D_f$,恒有等式

$$f(-x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{-x}=(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x$$

$$=\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x=f(x)$$

成立,所以 $f(x)$是偶函数.

10.设 $f(x)$是定义在$(-a,a)(a>0)$内的偶函数,若 $f(x)$在$(0,a)$内是严格单调增加的,证明:$f(x)$在$(-a,0)$内是严格单调减少的.

证 对任意的实数 $x_1,x_2\in(-a,0)$,设 $x_1<x_2$,则有$(-x_1)$,$(-x_2)\in(0,a)$,且$(-x_1)>(-x_2)$.据题设 $f(x)$是定义在$(-a,a)$内的偶函数,必有

$$f(-x_1)=f(x_1),f(-x_2)=f(x_2),$$

又 $f(x)$在$(0,a)$上是严格单调增加的,从而有

$$f(x_1)-f(x_2)=f(-x_1)-f(-x_2)>0,$$

即 $$f(x_1)>f(x_2),$$

所以 $f(x)$在$(-a,0)$内是严格单调减少的.

11.设函数 $f(x)=x^3-x^2+3$,

(1)求函数 $\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$;

(2)判定函数 $\varphi(x)$、$\psi(x)$的奇偶性.

解 已知 $f(x)=x^3-x^2+3$,则:

(1)$\varphi(x)=\frac{1}{2}[(x^3-x^2+3)+(-x^3-x^2+3)]=-x^2+3$,

$$\psi(x)=\frac{1}{2}[(x^3-x^2+3)-(-x^3-x^2+3)]=x^3;$$

(2)易判定 $\varphi(x)$是偶函数,$\psi(x)$是奇函数.这是因为 $\varphi(-x)=$

$\varphi(x)$，$\psi(-x)=-\psi(x)$的缘故.

12*.试证明:定义在对称区间$(-a,a)$，$(a>0)$内的任意函数$f(x)$，都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和(提示:参考11题).

证 设$f(x)$是定义在对称区间$(-a,a)$内的任一函数，作定义在$(-a,a)$内的两个函数:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)];\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

因为对任意的实数$x\in(-a,a)$，则恒有等式

$$\varphi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\varphi(x),$$

$$\psi(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$
$$=-\psi(x)$$

成立，所以$\varphi(x)$是偶函数，$\psi(x)$是奇函数，且恒有

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)]$$
$$=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$
$$=\varphi(x)+\psi(x),x\in(-a,a),$$

即定义在$(-a,a)$内的任意函数$f(x)$可以表示为一个奇函数$\psi(x)$与一个偶函数$\varphi(x)$的和.

13.下列这些函数中哪些是周期函数?并指出周期函数的周期.

(1)$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

解 设函数$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的周期为$T$，那么，

$$f(x+T)=\sin\left(x+T-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}+T\right),$$

为了使得等式

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，亦即使等式

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}+T\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

成立，当且仅当

$$T=2n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

显然，使得上式成立的最小正数 $T=2\pi$（即取 $n=1$），所以，

$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$是以 2π 为周期的周期函数.

(2) $f(x)=\cos 2x$.

解 设函数 $f(x)=\cos 2x$ 的周期为 T，那么

$$f(x+T)=\cos 2(x+T)=\cos(2x+2T),$$

为了使得等式

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，亦即使等式

$$\cos(2x+2T)=\cos 2x$$

成立，当且仅当

$$2T=2n\pi,\ T=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

显然，使得上式成立的最小正数 $T=\pi$（即取 $n=1$），所以 $f(x)=\cos 2x$ 是以 π 为周期的周期函数.

(3) $f(x)=1-\sin\frac{\pi x}{4}$.

解 设函数 $f(x)=1-\sin\frac{\pi x}{4}$的周期为 T，那么

$$f(x+T)=1-\sin\frac{\pi}{4}(x+T)=1-\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}T\right),$$

为了使得等式

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，亦即使等式

$$1-\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}T\right)=1-\sin\frac{\pi x}{4}$$

或等式

$$\sin\left(\frac{\pi x}{4}+\frac{\pi}{4}T\right)=\sin\frac{\pi x}{4}$$

成立，当且仅当

$$\frac{\pi}{4}T=2n\pi,T=8n(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

显然,使得上式成立的最小正数 $T=8$(即取 $n=1$),所以 $f(x)=1-\sin\frac{\pi x}{4}$是以8为周期的周期函数.

(4)$f(x)=|\sin x|$.

解 设函数$f(x)=|\sin x|$的周期为T,那么

$$f(x+T)=|\sin(x+T)|,$$

为了使等式

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,亦即使等式

$$|\sin(x+T)|=|\sin x|$$

或使等式

$$\sin(x+T)=\pm\sin x$$

成立,当且仅当

$$T=n\pi(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

显然,使得上式成立的最小正数 $T=\pi$(即取 $n=1$),所以 $f(x)=|\sin x|$是以π为周期的周期函数.

习题 1-2

1.下列各组函数中哪些不能复合成复合函数?把能复合成复合函数的写成复合函数,并指出其定义域.

(1)$y=x^3,x=\sin t$.

解 $y=\sin^3 t$,定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$.

(2)$y=e^u,u=x^2$.

解 $y=e^{x^2}$,定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$.

(3)$y=\lg u,u=x^2+2$.

解 $y=\lg(x^2+2)$,定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$.

(4)$y=\sqrt{u},u=\sin x-2$.