纖維丛理論
及其应用中的几个問題

廖山濤著

高等教育出版社

纖維丛理論及其应用中的几个問題

廖山濤著

高等教育出版社出版北京宣武門内承恩寺7号

(北京市書刊出版业营业許可証出字第054号)

人民教育印刷厂印装　新华书店发行

統一書号13010·684　开本787×1092 1/16　印張 1

字数22,000　印数0001—1,000定价(8)￥0.17

1959年11月第1版　1959年11月北京第1次印刷

纖維丛理論及其应用中的几个問題*

廖山濤

（几何代数教研室）

§1. 引言 纖維丛或纖維空間的基本想法大約在三十年前在 E. Cartan 关于微分几何学的研究中已具端倪。二十多年前，H. Whitney 首先就这类想法形成較广泛的定义。自这时以迄后来，由于許多数学工作者的努力（包括与同倫論的滲透以及 Léray 譜理論及鏈束論的創立等），丛理論或其主导思想在拓扑学中幷且也在不少其他数学分支中（例如代数几何、多元复变函数論等），运用起来都极具效力。这情况已經是頗为周知的。本文目的不打算广泛地列举关于这些的許多細节上或过去发展上的事实，仅欲就目前情况下，对这理論本身及其一些应用中少数几个項目加以說明。

可从一較簡單的例子来看所欲說明的問題的性質。在微分几何学中有时考虑一个到处不为 0 的連續向量場的存在問題。設 M^n 为一紧致的 n 維微分流形。对每一 $x\in M^n$ 讓我們給一个切向量 $V(x)$，幷要求 V 在 M^n 上具有連續性。如果許可 $V(x)=0$，显然这样的 V 恒存在的。我們要問的是在何种条件下，M^n 上存在一个到处不为 0 的連續的切向量場 V。这方面最早一条为 H. Hopf 所給的定理是：M^n 上存在一个到处不为 0 的連續的切向量場 V 的充要条件是 M^n 的 Euler 示性数为 0。照这定理，則一 n 維球 $S^n(n\geqq 1)$ 有无这样一个向量場存在将按 n 为奇数或偶数而定。另一方面，可見一紧致 Lie 群的 Euler 示性数恒为 0，因 Lie 群上恒有这样的切向量場。

这类問題是纖維丛論中所遇到的截面存在問題。我們所指的纖維丛将是 N. E. Steenrod 式的坐标丛，其中构造群在若干情况的討論下占較重要的位置。这些見 [31, §§ 1, 2]。（但本文中提到的纖維空間則是在通常較广的意义下来了解的。）例如，关于前面提到的 M^n 上到处不为 0 的切向量場，如将向量正規化，則所涉及的丛是一个以 M^n 为底空間，$n-1$ 維球 S^{n-1} 为纖維及以正交群 $O(n)$ 为构造群的丛（M^n 中每一点 x 处的纖維是所有与 M^n 在 x 处相切的單位长向量所成的球）。較广地，假如我們要知 M^n 上是否有一組到处互不相关的 k 个連續的切向量場，則涉及一个以 M^n 为底空間，Stiefel 流形 $V_{n,k}=$ $=O(n)/O(n-k)$ 为纖維及以 $O(n)$ 为构造群的纖維丛的討論。

下面諸节中，除开阻碍类外，討論的范圍还包括丛的分类，同調性質及示性类等。最末 § 11 中所述关于空間上的映射扩充問題与丛空間的最初阻碍类、二阶阻碍类等的关系虽不一定有深意，但也許是可以注意的。

§2. 阻碍类 一般說来，前面提到的纖維丛的截面問題可变为这丛的底空間上某些上調类的計算問題。命 $\mathscr{B}=\{B, E, \Phi\}$ 为一丛，其底空間为一复合形（或較广地一 CW-

---

* 北京大学五四科学討論会（1959）上綜合性报告。

复合形)B，全空間为E，投射为Φ：$E\to B$（纖維为F，构造群是G）。記B^n为B的n維骨架，并命B_0为B的一子复合形。設$\mathscr{B}$在$B_0\cup B^{m-1}$上已有截面f而这截面可扩充至$B_0\cup B^m$上的一截面。欲测度$\mathscr{B}$是否在$B_0\cup B^{m+1}$上有截面，它在$B_0\cup B^{m-1}$上与f重合，我們通常对f联系一上調类

$$\bar{c}(f)\in H^{m+1}(B,B_0;\mathscr{B}(\pi_m)),$$

叫作扩充f的阻碍类，这里$\mathscr{B}(\pi_m)$表示由纖維上的m維同倫群自然地构成的局部系数群(欲定义这阻碍类，須作一(极弱的)假定，即纖維F是m-单式的)。f可扩充至$B_0\cup B^{m+1}$上一截面的充要条件是$\bar{c}(f)=0$。这样的$\bar{c}(f)$仅依賴于f的同倫类。

如上所述，則从的截面存在問題理論上一般变为阻碍类的計算❶。

例如，假設m是对纖維来說的最小整数使得$\pi_m\neq 0$，由是纖維是$(m-1)$-連通的，而$H^{i+1}(B,B_0;\mathscr{B}(\pi_i))=0$对$0\leqq i<m$。故在这情況下，$\mathscr{B}$在$B^m$上有截面，而$\mathscr{B}$是否在$B^{m+1}$上有截面一問題变为属于$H^{m+1}(B,\mathscr{B}(\pi_m))$內的阻碍类$\Omega(\mathscr{B})$的計算(在这情况下，对任何$f$及$f'$恒有$\bar{c}(f)=\bar{c}(f')$，因为从$\pi_i=0(0\leqq i<m)$的假設，$f$及$f'$在$B^{m-1}$上恒为同倫的截面；可記$\bar{c}(f)$为$\Omega(\mathscr{B})$)。同样地，設$B$在$B_0$上已有截面$f_0$，則$f_0$是否可扩充至$B_0\cup B^{m+1}$上一截面的問題变为阻碍类$\Omega(B,B_0;f_0)\in H^{m+1}(B,B_0;\mathscr{B}(\pi_m))$的計算(当$B_0=0$时，$\Omega(B,B_0;f_0)$即为$\Omega(\mathscr{B})$)。$\Omega(B,B_0;f_0)$通常叫作扩充$f_0$至$B$上的截面的最初阻碍类(对一个具有$(m-1)$-連通的纖維的从来說的)。$\Omega(\mathscr{B})$叫作$\mathscr{B}$的最初阻碍类。

回到§1，关于 Stiefel 流形$V_{n,k}$我們知道$\pi_i(V_{n,k})=0$对$1\leqq i<n-k$，而当$k<n$时，$V_{n,k}$是弧連通的且$\pi_{n-k}(V_{n,k})$是一无限阶或2阶循环群。故任一n維微分流形M^n在其m維骨架(对任一单純剖分而言)上恒有互不相关的$k=n-m$个連續切向量場，而是否在其$m+1$維骨架上也有互不相关的k个連續的切向量場这一問題即变为一个$m+1$維阻碍类(即通常所指的微分流形上的第$m+1$維 Stiefel-Whitney 示性类)的計算。一个以正交群为构造群的球从的 Whitney 示性类最早原是循阻碍类方式来給定的(参看后面§10)。

§3. 高阶阻碍类 就目前情况来說，纖維从截面存在問題的較一般的解答或阻碍类的較充分的处理牵涉到拓扑学在若干分支上的深入发展。这在从理論中的主要問題之一目下已有的具体成果要提出来說的是关于第二阻碍类方面的。

設有一纖維从$\mathscr{B}=\{B,E,\Phi\}$，如前§2中那样，并命$m\geqq 2$。設$\mathscr{B}$的最初阻碍类为0。命f为$\mathscr{B}$在$B_0\cup B^m$上一截面，它可扩充至$B_0\cup B^{m+1}$上一截面。与f相联系的阻碍类$\bar{c}(f)$是一上調类$\in H^{m+2}(B,B_0;\mathscr{B}(\pi_{m+1}))$(§2)。这叫作$\mathscr{B}$是否有截面的一个二阶阻碍类，記作$z^{m+2}(f)$。如前所述，$f$可扩充至$\mathscr{B}$在$B_0\cup B^{m+2}$上一截面的充要条件是$z^{m+2}(f)=0$。

当纖維从为笛卡儿积这特别情況时，从的第二阻碍类問題即为两个空間彼此間的映射扩充的第二阻碍类問題。对后面这一問題的工作有 N. E. Steenrod (Ann. of Math., 48 (1947), 425—505)以及 J. H. C. Whitehead 在(Ann. of Math., 54(1951), 68—84)中所給

❶ 于此，須提述的是：張素誠在[41]中(但非从阻碍类角度)討論到纖維从的截面問題。

的推广。

对一般的纖維丛第二阻碍类这情况，应提到 B. Болтянский [3, 4]。另外，H. Hopf [20]于此也有所闡述。Болтянский 在[3]中討論微分流形上互不相关的連續切向量場的存在問題，最早表現了 Whitney 示性类在二阶阻碍类中所起的作用。Болтянский [3, 4]及 Hopf [20]所考慮的丛，其纖維是适合某些条件（例如$(m-1)$-連通性等）的流形。故对象是比較广泛的。可是另一方面，他們所得的結果是关于两个二阶阻碍类的差异类的公式。因此对截面的存在問題相距較远。

关于球丛这情况，一个二阶阻碍类的公式見[23]中，这可以在这里簡短地叙述一下。設 $\mathscr{B}=\{B, E, \Phi\}$为一个由$m$維球$S^m$为纖維作成的球丛（构造群为任意一拓扑群），其最初阻碍类$\Omega(\mathscr{B})$为0。假定B的基本群对纖維上的m維同倫群不起作用（对$m>2$，这假定不是本質的）。記Z及Z_2分別为整数群及模 2 整数群，并以J表Z或Z_2按 $m=2$ 或 $m>2$ 而定。我們可以自然地等同 $\pi_m(S^m)$ 及Z并等同 $\pi_{m+1}(S^m)$ 及J。命f为$\mathscr{B}$在B^m上一截面，它可扩充至B^{m+1}上一截面。因为$\Omega(\mathscr{B})=0$，按 Léray 叙列的通常性質，則由Φ誘导出的同态 $\Phi^*: H^i(E, J)\to H^i(B, J)$ 为在中同构。对于 f 我們定义了一上鏈类 $\theta(f)\in H^m(E, \mathscr{B}(\pi_m))$（我們有$\theta(f)=\theta(f')$，如果$f$及$f'$是$m$-同倫的）。命$\beta: H^{m+i}(E, J)\to H^i(B, J)$ 为通常所指的經过在纖維上取积分后的同态。于是二阶阻碍类 $z^{m+2}(f)\in H^{m+2}(B, J)$，可由下面公式(A)及(B)确定。

(A) $$\Phi^* z^{m+2}(f)=\theta(f)\smile\Phi^*\beta(Sq^2\theta(f))+Sq^2\theta(f), \qquad m>2.$$

(B) $$\Phi^* z^4(f)=\theta(f)\smile\Phi^*\beta(\theta(f)\smile\theta(f))-\theta(f)\smile\theta(f), \qquad m=2.$$

当这丛的构造群为轉动群时，則 $\beta(Sq^2\theta(f))=2$ 維 Whitney 示性类 w^2，而(B)可化成$\Phi^* z^4(f)=\theta(f)\smile\bar{\theta}(f)$，这里$\bar{\theta}(f)$表示$\theta(f)$經过$E$中纖維上对徑映射后所得的象。

纖維丛的截面就二阶阻碍类来說的相对扩充定理以及（与此相关的截面的同倫）分类定理，在球丛这情况下，較早地見[23, § 20]。在纖維为适合某些条件的流形这較广的情况底下，一个相当的分类定理見最近的 Болтянский [5]。

用类似于[23]中一些方法，我們也可得出球丛的 4 阶阻碍类的一部分計算（見[25]）。此外，般球丛$\mathscr{B}$等仍給出如前，并命$m\geqq 3$。命p为一質数$\geqq 3$。由于$\pi_i(S^m)$的p准質子群$=0$对$m<i<m+2p-3$；$\approx Z_p$对$i=m+2p-3$，用这后一个不为 0 的p准質子群与模p Steenrod 約化幂 $\mathscr{P}^1$ 的关系（例如，見[24, 542 頁]），我們也有：$\Phi^* z^{2(p-1)}(f)=\theta(f)\smile\Phi^*\beta\,\mathscr{P}^1\theta(f)-\mathscr{P}^1\theta(f) \bmod p$，这里 f 表 $\mathscr{B}$ 在B^m上一截面，它可扩充至B^{m+2p-2}上。

自然，这些結果对在目下看来情况显得較复杂的高阶阻碍类（也許主要地是阶数$\geqq 4$）的具体分析工作来說是极不全面的。代数拓扑学中某些分支繼續深入的发展将使得这类几何問題的較完滿解决的可能性愈多。

§ 4. 对稱化 前节中已提到通常的两空間彼此間映射的扩充問題是从空間截面存在問題的一个特殊情况。在处理两空間彼此間映射的扩充問題时，一个基本想法是：将象空間嵌入一(π, n)-空間（它有这样的特性，即，其i維同倫群$\approx\pi$或 0 按$i=n$或$\neq n$而定）內以便于观察映射扩充的阻碍类，或循此延伸所得的（但深入的）办法（例如見[32, § 24]）。但在若干年前，据(π, n)-空間的作法（例如，用添加胞腔以消灭同倫群的办法），

这难以适用于丛空間这情况的。(因为这时如果将丛中每一个纖維都放在一个构造較为任意的同种型式的空間內，則我們将遇到是否可得一較大的丛它包含所給的丛为一子丛的問題。)

在[23]中处理二阶阻碍类时，我們曾經引入一关于丛的对称化办法以消除上述困难(另参看 [24, §14])。这有可能将是阻碍类一般处理上的一个合理的經过途徑。讓我們于此簡单地叙述一下。

設 W 为任一給定的空間。在 W 的 t 次笛卡儿积 $W^t=W\times W\times\cdots\times W$ 上的因子空間彼此間的排列构成的对称群是 W^t 上一拓扑变换群。命 $W^{[t]}$ 为由此所得的軌道空間，叫作 W 的 t 次对称积。現在設 F 为丛 $\mathscr{B}=\{B, E, \Phi\}$ 的纖維。考虑 $\mathscr{B}$ 的 t 次笛卡儿积 $\mathscr{B}^t=\{B^t, E^t, \Phi^t\}$。命 $\mathscr{B}'$ 为在 B^t 的对角空間 B' 下的部分纖維丛。于是在 $\mathscr{B}'$ 的底空間及全空間上同时施用恰才所述取軌道空間的办法，結果自然地使我們得到一个以 B' 为底空間，$F^{[t]}$ 为纖維的丛 $\mathscr{B}'=\{B', E', \Phi'\}$，其构造群与 $\mathscr{B}$ 的相同(事实上，如 G 为 $\mathscr{B}$ 的构造群，則 G^t 的对角群为 $\mathscr{B}'$ 的构造群)。$\mathscr{B}'$ 叫作 $\mathscr{B}$ 的 t 次对称化丛。

对 W 中任一給定点 s_0，記 $s_0(W)$ 为 $W^{[t]}$ 中所有的点 $[s, s_0, s_0, \cdots, s_0]$❶ 作成的集合，它是与 W 同胚的。我們說 $\mathscr{B}$ 正則实現在 $\mathscr{B}'$ 內[23, §6]，其意义如下。假令有一映射 $\omega:\{B, E\}\to\{B', E'\}$，它将任一点 $b\in B$ 映射至 $[b, b, \cdots, b]\in B'$，且它在 E 上滿足条件：对任一 $b\in B$，有一 $s_b\in\Phi^{-1}(b)$ 相对应，使得 $\omega(\Phi^{-1}(b))=s_b(\Phi^{-1}(b))\subset(\Phi^{-1}(b))^{[t]}$，而 ω 将任一 $s\in\Phi^{-1}(b)$ 映射至 $[s, s_b, \cdots, s_b]\in s_b(\Phi^{-1}(b))$。如果 F 为紧致的，B 为复合形，这时易将 $\{B', \omega(E), \Phi'|\omega(E)\}$ 作成一丛，可看作与 $\mathscr{B}$ 等价的。等同这个丛与 $\mathscr{B}$，則 $\mathscr{B}$ 实現在 $\mathscr{B}'$ 內，称为正則实現。要紧的是：当 $\mathscr{B}$ 有截面时，可証这样的实現是存在的。設 $\mathscr{B}$ 的一个部分丛有截面，則 $\mathscr{B}$ 可部分地正則实現在 $\mathscr{B}'$ 內。

欲探討 $\mathscr{B}$ 的截面存在的阻碍类，我們可先循上述办法然后比較 $\mathscr{B}$ 及 $\mathscr{B}'$ 的同調及同倫性質(看[23], §§ 17–18)❷。另一方面，对于我們的目的来說，一个頗为重要的事情是 F 的某些同倫群經过对称化手續后可以零化。如[24, §13; 23, §16]所給的是这样的情况。由于纖維丛阻碍类討論上的需要以及一些其他理由，我們曾經希望取空間的对称化办法可以代替用以前办法得出的一些 (π, n)-空間在同倫方面所起的某些作用(見 [24, §10])。

可注意的是 A. Dold 及 R. Thom 近間証明的一結果[16]，卽，对一連通的 CW-复合形 X，

$$\pi_i(X^{[\infty]})\approx H_i(X, Z), \qquad i>0,$$

这里 $X^{[\infty]}$ 表无穷次对称积 ($X^{[\infty]}=U_{t=1,2,3,\cdots}X^{[t]}$ 取誘导拓扑，$X=X^{[1]}\subset X^{[2]}\subset X^{[3]}\subset\subset\cdots$)，$Z$ 表整彼群。这給出一个与以前完全相异的办法来作 (π, n)-空間(若 $H_i(X, Z)\approx\approx\pi$ 或 $=0$，視 $i=n$ 或 $\neq n$ 且 $\neq 0$ 而定，則 $X^{[\infty]}$ 是一 (π, n)-空間)。

§5. 分类問題 这是一个在同一底空間 B 下具有多少个不相等价的但具有同样的纖維 F 及同样的构造群 G 的纖維丛的問題。設 $\mathscr{B}=\{B, E, \Phi\}$ 及 $\mathscr{B}'=\{B, E', \Phi'\}$ 为这样

---

❶ 任一屬于 W^t 內的点 $(w_1, w_2, \cdots, w_t)$ 經过自然映射所得的屬于 $W^{[t]}$ 內的点将記作 $[w_1, w_2, \cdots, w_t]$。

❷ 于此，我們可以順便指出，丛的构造群对于二阶阻碍类的計算来說意义不大。

的丛。我們提到 $\mathscr{B}$ 及 $\mathscr{B}'$ 是等价的，自然是說有一从 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}'$ 的丛映射 f，它将 E 拓扑映射至 E' 上，且对任一 $b\in B$，$f(\Phi^{-1}(b))\subset\Phi'^{-1}(b)$（$f$ 自然还須要求足以描述构造群起作用时的某些連續性等等）。这問題是一个如何用 B 上的拓扑不变量以及 G 在纖維上起作用时所产生的某种特殊不变量以决定丛 $\mathscr{B}$ 的問題。这种特殊不变量的例子如微分流形的 Stiefel-Whitney 示性类等。

一般說来，这問題不即包括截面問題，因为即令分类已无問題了，截面問題仍待研究（举一极端的例子来說，关于两空間彼此間的映射扩充及同倫分类，目下我們知道的仍屬不多）。

一个纖維丛叫作一主纖維丛或一 G-丛，如果其纖維等于其构造群 G，而 G 在纖維上的作用即为由左側变换所产生的。如我們所知，对任一个以 F 为纖維及以 G 为构造群的丛，都有一个叫作与它相配的 G-丛；其逆，任一 G-丛都相配于一个以 F 为纖維及以 G 为构造群的纖維丛。一个以 E 为全空間的 G-丛叫作一 n 泛 G-丛，如果 E 的同倫群滿足条件 $\pi_i(E)=0$，对 $0\leqq i<n$。对于分类問題来說，几个基础的經典性定理叙述如下。

主丛定理 两个具有同样的底空間、纖維及构造群的纖維丛等价的充要条件是与它們相配的两个主丛等价。

截面定理 一个主丛有截面的充要条件是这丛为笛卡儿积。

一纖維丛有截面不一定蘊涵与它相配的主丛也有截面。例如，一 n 維微分流形有到处不为 0 的連續的切向量場不即蘊涵它有到处互不相关的 n 个連續的切向量場。这后者是一个以正交群 $O(n)$ 为构造群的主丛的截面存在問題。自然，如果与一丛相配的主丛有截面，则原来的丛也有截面。

設 $\mathscr{B}=\{B,E,\Phi\}$ 为一丛，$f:B'\to B$ 为一映射。則 f 誘导出一纖維丛，記作 $f^{-1}\mathscr{B}$，其底空間是 B'，且它与 $\mathscr{B}$ 具有同样的纖維及构造群。$f^{-1}\mathscr{B}$ 并且有如下的性質，即：有一从 $f^{-1}\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}$ 的丛映射，它在底空間上导出的映射即为 f。記 $\mathrm{Map}(B',B)$ 为由映射：$B'\to B$ 得出的一切同倫类的集合。对任一給定的拓扑群 G，記 $\mathrm{Cl.}(B',G)$ 为在同一底空間 B' 下的一切 G-丛所給出的等价类的集合。

分类定理 設 $\mathscr{B}=\{B,E,\Phi\}$ 为一 n 泛 G-丛，B' 为一 CW-复合形，其維数$<n$。則从 f 到 $f^{-1}\mathscr{B}$ 确定一个 $\mathrm{Map}(B',B)$ 与 $\mathrm{Cl.}(B',G)$ 間的(1,1)-对应。

这定理的意义是在它把纖維丛的分类問題变为一般較直接的映射同倫分类問題。

当 $n=\infty$ 时，一 n 泛 G-丛以下将簡单地叫作一泛 G-丛，其底空間将記作 B_G。B_G 是通常所指的对 G 而言的分类空間。

当 G 为一連通的 Lie 群或一紧致 Lie 群时，我們早期知道对任一 n 都有一 n 泛 G-丛。下面定理中所含較广的叙述見[27]中。

存在定理 对任一拓扑群 G 及任一 $n(=1,2,3,\cdots,\infty)$，都有一 n 泛 G-丛。任一可数的連通的 CW-复合形都是一个对某一拓扑群 G 而言的分类空間。

例如，就 Stiefel 流形 $V_{n,k}=O(n)/O(n-k)$ 来說，我們有 $\pi_i(V_{n,k})=0$，$1\leqq i<n-k$，而当 $k<n$ 时，$V_{n,k}$ 是弧連通的。商空間

$$\begin{aligned}M_{n,k}&=O(n)/(O(n-k)\times O(k))=\\&=(O(n)/O(n-k))/O(k)=V_{n,k}/O(k)\end{aligned}$$

是一 $n-k$ 泛 $O(k)$-丛的底空間，其維数为 $(n-k)k$。这主丛的全空間是 $V_{n,k}$。$M_{n,k}$ 是 n 維欧氏空間 E^n 中所有以通过原点的 k 維子綫性空間为元素构成的 Grassmann 流形。对于一个通常以 $O(k)$ 为构造群及以 $k-1$ 維球 S^{k-1} 为纖維的球丛来說，这时相当的 m 泛 $O(k)$-丛的底空間是 $M_{m+k,k}$。一 n 維微分流形 M^n 的切球丛的一相当的 $n+1$ 泛 $O(n)$-丛的底空間是 $M_{2n+1,n}$。故这切球丛可由一映射 $f:M^n\to M_{2n+1,n}$ 誘导出来，同倫的映射誘导出等价的球丛。

我們可实現 $O(n)$ 在 $O(n+1)$ 內（取 $n+1$ 阶正交矩陣的第一行第一列的元素为 1），由是 $M_{n,k}$ 实现在 $M_{n+1,k}$ 內。$B_{O(k)}=\bigcup_{i\geq k}M_{i,k}$（取誘导拓扑）是一个就 $O(k)$ 而言的分类空間。

§6. 以球 S^n 为底空間的纖維丛 虽然据上节所述，纖維丛分类問題引导到一个从表面上看来較簡單的关于映射的同倫分类問題，但我們又遇到同倫論中目下尙存在的不少的困难。例如，如何有效計数从一給定流形到一 Grassmann 流形的映射的同倫类呢？設一纖維丛的底空間是一 n 維球 S^n，则这样的問題卽为分类空間上同倫群的計算（以及基本群如何对同倫群起作用）的問題。

为了省去不大要紧的复杂性，我們于此将假定拓扑群 G 为弧連通的，由是分类空間 B_G 上的基本群为 O。据丛空間的同倫叙列的恰切性及泛 G-丛的全空間上的同倫群为 O 的性質，我們有同构

$$\partial_*:\pi_n(B_G)\approx\pi_{n-1}(G),\qquad n\geqq 1,$$

这里 ∂_* 表同倫叙列中的下边緣同态。故以 S^n 为底空間的 G-丛的一切等价类与 $\pi_{n-1}(G)$ 的元素間有一个 $(1,1)$-对应。

这具体对应情况可以循下面具有交換性的图表看出。設已給一个以 S^n 为底空間的 G-丛 $\mathscr{B}$。

$$\begin{array}{ccc}\pi_n(B_G) & \xrightarrow[\approx]{\partial_*} & \pi_{n-1}(f(G))\\ \uparrow f_* & & \wr\!\!\wr\,\uparrow f_*\\ \pi_n(S^n) & \xrightarrow{\partial_*} & \pi_{n-1}(G),\end{array}$$

这里 f 表从 $\mathscr{B}$ 到泛 G-丛上的丛映射（下面一 ∂_* 也表关于 $\mathscr{B}$ 的同倫叙列的下边緣同态）。給 S^n 一定向并記 e_n 为由是决定的 $\pi_n(S^n)$（$\approx$整数群 Z）的生成元。则 $f:S^n\to B_G$ 为 $f_*(e_n)$ 的一代表映射。据前节及上面所述，$\mathscr{B}$ 所属的等价类由 $\partial_*f_*(e_n)\in\pi_{n-1}(f(G))$ 确定，由是亦由 $\partial_*(e_n)$ 确定。同倫类 $\partial_*(e_n)$ 中一代表映射：$S^{n-1}\to G$ 通常叫作 $\mathscr{B}$ 的一特征映射。取 S^n 的一个三角剖分，命 σ^n 为一 n 維单純形，它有定向与 S^n 的协同，我們易見上鏈 $\partial_*(e_n)\sigma^n$ 卽为前面 §2 中所述的关于 $\mathscr{B}$ 的截面存在的阻碍类 $\in H^n(S^n,\pi_{n-1}(G))$ 的一个代表鏈（注意 S^n 为 $(n-1)$-連通的，故恒有 $H^i(S^n,\mathscr{B}(\pi_{i-1}(G)))=0$, $1\leqq i<n$，由是 $\mathscr{B}$ 在 S^n 的 $(n-1)$-維骨架上恒有截面）。

卽令 G 是典型群，对于它們的同倫性質我們目下所知的也还是不多的（这些群在同倫性質方面，主要地有三类，卽(i)正交群 $O(n)$，(ii)酉群 $U(n)$ 及(iii)耦对群 $Sp(n)$）。关于它們的同倫群的計算的一些記录，見[9, 428 頁]。可注意的是最近的 R. Bott [12]，其中叙述这些群的穩定同倫群的周期性，卽，

$$\pi_k(O)\approx\pi_{k+4}(Sp),\qquad \pi_k(Sp)\approx\pi_{k+4}(O),$$
$$\pi_k(U)\approx\pi_{k+2}(U),\qquad (k\geqq 1)$$

$\pi(O)$的周期表是 $Z_2, O, Z, O, O, O, Z, Z_2$; $\pi(U)$的是 Z, O。这里 $O=\bigcup_i O(i)$, 因我們有自然的包含关系 $O(1)\subset O(2)\subset O(3)\subset\cdots$; 同样了解$U$及$Sp$。

迄今为止，虽然由于纖維丛理論上的需要因而涉及典型群的同倫性質的探討，这方面工作还在逐漸推进，但是循此途徑已經引出另一方面富有意义的結論。我們在下节中将举例来說說。

§7. 应用例子，具有不同微分构造的流形 本节中，我們所考虑的主要地是以 S^4 为底空間，S^3 为纖維及以旋轉群 $SO(4)$ 为构造群的球丛。Steenrod [31, 115—117 頁，138 頁]中指出：由于 $\pi_3(SO(4))\approx Z\oplus Z$，有 $\infty+\infty$ 个不相等价的这样的丛；与$(i,j)\in Z\oplus Z$ 相当的丛記作 $\mathscr{B}_{ij}$，其特征映射(看前节)可取作 $g_{ij}: S^3\to SO(4)$，它由 $g_{ij}(u)\cdot v=u^ivu^j$ 定义，这里等式右面了解为四元数乘法，可以算出 $\mathscr{B}_{ij}$ 的基本示性类(即最初阻碍类)是 $(i+j)\iota$，这里 ι 表$H^4(S^4;\pi_3(S^3))(\approx Z)$的一个适当的生成元。这些丛 $\mathscr{B}_{ij}$ 一般不能由同倫群及上調环这些拓扑不变量加以区分。

記 E_{ij} 为 $\mathscr{B}_{ij}$ 的全空間。E_{ij} 是連通的 7 維流形。它也是单連通的，其整系数上調群容易算出是：

$$H^0(E_{ij},Z)\approx H^7(E_{ij},Z)\approx Z,$$
$$H^i(E_{ij},Z)=0,\quad i=1,2,5,6,$$
$$H^3(E_{ij},Z)=0 \text{ 或 } \approx Z \text{ 按 } i+j\neq 0 \text{ 或 } =0 \text{ 而定},$$
$$H^4(E_{ij},Z)\approx Z/(i+j)Z.$$

由于 $\mathscr{B}_{ij}$ 的足数 i,j 是双重的而它們的全空間 E_{ij} 上所附属的拓扑不变量如上調环及同倫群显得比較单一的(例如，此处取 $i+j=1$ 就容易看出有无限多个(i,j)使得 $\mathscr{B}_{ij}$ 的全空間 E_{ij} 都与一 7 維球 S^7 具有相同的倫型)，若干作者曾对这类現象加以注意。

I. James 及 J. H. C. Whitehead 討論到取球为底空間的球丛时全空間的倫型問題(見[21]及其中 165 頁)。循上段所述途徑，R. Thom [36, 81 頁] 指出某些具有同样倫型的流形可就 Понтрягин 示性类来加以区别。

J. Milnor [28] 注意到这方面与可微分流形是否有不同的微分构造一問題有关联，方式如下：对任一可定向的且适合条件 $H^3(M^7,Z)=H^4(M^7,Z)=0$ 的紧致 7 維微分流形 M^7，[28] 基于 Thom [35] 等的較深远的理論，定义了一个对可微分的拓扑映射而言的不变量 $\lambda(M^7)\in$ 模 7 整数群。考虑 E_{ij} 如前，并取 $i+j=1$ 及 $i-j=k$，記 $M^7_k=E_{ij}$。則 M^7_k 有一自然的微分构造，而 $\lambda(M^7_k)$算出恰等于 $k^2-1 \bmod 7$。又对 S^7 的(通常的)微分构造而言的$\lambda(S^7)$为 0。故当 $k^2\neq 1 \bmod 7$ 时(例如 $k=1,3$)，在 M^7_k 及 S^7 間不可能存在可微分的拓扑映射。但是，另一方面，M^7_k 及 S^7 是同胚的。这首次給出例子解答我們长久以来未能解决的、是否具有不相同的微分构造的流形的一个問題。

稍后，在这方面的工作还有 I. Tamura [33] 及 N. Shimada [30] 等。后面这文中証明了 15 維球 S^{15} 也具有不同的微分构造。

§8. 同調性質，Léray 譜理論 虽然如前所述，纖維丛的分类問題，或者相当地，到分类空間上的映射的同倫分类問題中留待探討的地方极多，另一方面我們也遇到研討丛空

間的同調性質的問題(这主要地是要探討底空間，纖維及全空間等的同調性質的关系)。这两者互有关联，但不立即是一个包括另一个的一种情况。这是因为，显然地即令丛空間的某些同調性質已相当清楚了，自然不即等于解决了同倫分类問題，另一方面即令同倫分类够明确了，也不能說某些同調性質不須进一步研究。一般說来，虽然同倫分类显得比較基本，但在若干情况上所表現出来的又須先化作同調論来研究。

这同調性質方面的較具体的工作即令在球丛这情况下，目下仍有不甚清楚的地方(看 W. S. Massey[26])。在一般性理論上，如同大家所知道的，Léray 譜理論的引进(1946—1950)是首先值得提述的。它不但将在此以前許多关于丛空間的同調性質方面的結果作为个别特例。另一方面，它的主导思想又可灵活运用到至少表面上不完全是几何方面的数学分支。此外，由于 J-P. Serre 結合譜理論对道路空間的研討，使得同倫論中在以前仅有片断結果的一些基本問題的探索得到广闊的开展。但是限于本文的性質，对这些其他方面的重要成果我們在后面不打算多談。

設 $\mathscr{B}=\{B, E, \Phi\}$ 为一纖維丛以 F 为纖維(我們于此作些适当的但无甚宏旨假定，例如底空間是弧連通的或是复合形等等)。簡单地說，对 $\mathscr{B}$ 及系数群 G 来說的 Léray 譜叙列 $S(\mathscr{B}, G)$ 是以一定办法得出的一串具有微分运算 d_r 的群 E_r, $r=1, 2, 3, \cdots$, 使得 E_{r+1} 是 E_r 对 d_r 而言的同調群；$S(\mathscr{B}, G)$ 具有下面一些重要的性質(i)—(iv)。

(i) $E_r=\Sigma_p E_r^p$, $E_r^p=\Sigma_q E_r^{p,q}$ $(p, q=0, 1, 2, 3\cdots)$; d_r 的阶为 r $(d_r(E_r^p)\subset E_r^{p+r})$。

(ii) 联系底空間与纖維上的上調群：$E_2^{p,q}=H^p(B, \overline{H}^q(F, G))$, 这里 $\overline{H}$ 表 B 上由自然方式引出的(以 $H^q(F, G)$ 为纖維群)的局部系数群。

(iii) 丛空間所給的影响：对給定的 p, q, 当 r 充分大时，$E_r^{p,q}$ 是稳定的，即 $E_r^{p,q}=$ $=E_{r+1}^{p,q}=E_{r+2}^{p,q}=\cdots$。記 $E_\infty^{p,q}$ 为这稳定群，并記 $E_\infty^p=\Sigma_q E_\infty^{p,q}$。

(iv) 联系全空間上的上調群：$H^*(E, G)$ 有子群

$$H^*(E, G)=D^0\supset D^1\supset D^2\supset D^3\supset\cdots$$

使得

$$E_\infty^p=D^p/D^{p+1}.$$

当在 B 上取一局部系数群以代替 G, 或考虑下同調以代替上同調时，我們都有相当的 Léray 叙列。但在上同調这情况下，当 G 为一环时，$S(\mathscr{B}, G)$ 中有上积(如 $E_r^{p,q}\smile E_r^{p',q'}\to$ $\to E_r^{p+p',q+q'}$ 等等)。当 $r\geqq 2$ 时，这些都是丛不变量。

設 $f: \mathscr{B}\to\mathscr{B}'$ 为丛映射。則 f 誘导出譜叙列間的同态(例如在上同調情况下，有 $f^*: S(\mathscr{B}', G)\to S(\mathscr{B}, G)$)。

虽然如前所述，丛空間的譜叙列有效地揭出关于底空間、纖維及全空間三者間的同調性質的一些关系。但在具体应用上，常常是三者中的两个本身的同調性質明确愈多，則它們間的关系也由此可以指出得愈多的。可以取下面定理(見 A. Borel [9, 410 頁; 6, 171 頁; 8, 297 頁])作为例子来說明这方面探討的性質。設 $\mathscr{B}$ 为一泛 G- 丛，这里 G 是一連通紧致的 Lie 群，用記号 $y=\tau(x)$ 表示通常所指的具有轉送关系(transgressive)的元素 $x\in H^s(G, Z_p)$, $y\in H^{s+1}(B_G, Z_p)$, 这里 Z_p 表模 p 整数环($p=$素数)或有理数域($p=0$)。考虑譜叙列(这时 $\mathscr{B}$ 的全空間具有零同調)，我們得：

設 $H^*(G, Z_p)$ 是由其中每些奇数維的元素所作成的外代数，則(i) $H^*(G, Z_p)\approx$外代数 $\wedge(x_1, x_2, \cdots, x_m)$, 其中每一 x_i 都是可轉送的，維数为奇数，(ii) $H^*(B_G, Z_p)\approx$多項式代数

$Z_p[y_1, y_2, \cdots, y_m]$，其中 $y_i=\tau(x_i)$。其逆，設 $H^*(B_G, Z_p)\approx Z_p[y_1, y_2, \cdots, y_m]$，其中 y_i 有奇数維，則 $H^*(G, Z_p)\approx\wedge(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，其中 $\tau(x_i)=y_i$。

如我們所知，上述这类結果(卽令对泛主丛这情况来説)目下巳有的也还是有限的。

另外，我們还可以举一簡单例子来説明譜理論在处理問題时所具有的效力。如所周知，由 E. Cartan 多年前所給的一个漂亮的定理是：如一 n 維球 S^n 为一拓扑群，則 $n=0, 1, 3$。

現在，設 X 为一弧連通的拓扑群，与一 n 維球有同样的同調群，$n\geqq 1$。由于泛 X-丛 $\mathscr{B}$ 的全空間为零調的，在 $\mathscr{B}$ 的整系数譜敍列(或 Gysin 敍列)中，我們有

$$E_2^{i,0}\smile E_2^{0,n}=E_2^{i,n}\xrightarrow[\approx]{d_{n+1}}E_2^{i+n+1,0},$$

于是，因 $d_{n+1}(E_2^{i,0}\smile e)=E_2^{i,0}\smile d_{n+1}(e)$，这里 e 表 $E_2^{0,n}\approx H^n(X, Z)$ 的生成元，故 $H^*(B_X, Z)$ 同构于 $d_{n+1}(e)$ $(\in E_2^{n+1,0}\approx H^{n+1}(B_X, Z))$ 所产生的整系数多項式环。但是，在这一点上，据一个周知的給在 J. Adem [2, 637 頁]中的定理❶。这惟有在 $n+1$ 为2的冪数 2^k 且 $k\leqq 2$ 这情况下才有可能。这証明 E. Cartan 定理。

于此，我們可注意，这証明中不涉及 X 是否为流形的性質。

§9. 可除代数存在問題的解决 我們知道除开球 S^1, S^3 可作拓扑群外，尙有 S^7 其上可由 Cayley 数系引出一(連續的)乘法。这乘法有左右单位元素 e $(ex=xe=x)$ 及对每一元素的逆元素，但不滿足結合律。長久以来有这样的問題，卽：除开 $n=0, 1, 3, 7$ 外，是否尙有其他維数 n 的球，其上也有类如 S^7 上的一个乘法。

这不能用上节末所述的办法来解决，因为彼处的 X 須是一拓扑群。我們甚至不能有一个对一拓扑群 G 而言的泛 G-丛使得 G 与 S^7 有相同的倫型，因不然，这将引出一个与 Adem [2, 637 頁]中所述定理相矛盾的結論。由此也可以看出，拓扑群与 H-空間在倫型的区别上，我們目下有甚不了然的地方。

在代数学中，有一个与上相类的所謂在实数域上可除代数的存在問題。这些問題包括在下面的二問題內，卽：对何等維数 n 的欧氏空間 E^n,

(α) 存在一連續的乘法 η(卽映射)：$E^n\times E^n\to E^n$ 使得

(i) 有左右单位元素，

(ii) $xy=0$ 蘊涵，$x=0$ 或 $y=0$,

(iii) $(tx)y=t(xy)=x(ty)$

对任意的实数 $t\geqq 0$ 及 $x, y\in E^n$，这里 xy 表 $\eta(x, y)$，或

(β) S^{n-1} 是一 H- 空間；

据 S. Eilenberg (Ann. of Math. 41(1940), 662—673)，当 $n\geqq 2$ 时，条件(α)或(β)都与下面(γ)等价。

(γ) 存在映射：$S^{2n-1}\to S^n$，其 Hopf 不变量是 1。

条件(γ)所表現的問題由于上同調运算及同倫論中一些理由曾經特别地使我們注意。在(α)中，若乘法是双綫性的且保持模($|xy|=|x||y|$)，如所周知，这时所得的代数必同构于

❶ 可以証明 Adem 这定理对一般空間仍成立。

实数域，复数域，四元数系或 Cayley 数系四者中之一，而由是 $n=1, 2, 4, 8$。若仅要求这乘法是双綫性的，則 H. Hopf 曾証明 n 必是 2 的一个冪数(Comm. Math. Helv. 13(1941), 219—239)。J. Adem 曾进一步証明只滿足(α)，(β)或(γ)的 n 也必是 2 的一个冪数 2^j (Proc. Nat. Acad. Sci. 38(1952), 720—726)。

最近若干作者同时分別地从同倫論，或上同調运算論或纖維丛論方面証明上述条件(α)等的 n 只能是 $n=1, 2, 4, 8$。这些作者包括 F. Adams [1], M. A. Kervaire [22] 及 Milnor [29]。

关于纖維丛論与这些問題的关系可參看[29]。例如，設有一秩为 n 的在实数域上的可除代数，或有一个如前述(α)中且滿足双綫性条件的乘法：$E^n\times E^n\to E^n$。則据前述 Adem 的結果有 $n=2^j$，且可定义一个从球 S^{n-1}(中心在原点)到一般綫性群的映射 ξ: $S^{n-1}\to GL(n)$，使 $\xi(x)\cdot y=xy\in E^n$ $(y\in E^n)$。由是有一 $GL(n)$-丛或一 $O(n)$-丛以 S^n 为底空間(看前面 § 6)，其 n 維(模 2) Whitney 示性类 $w^n\neq 0$。命 $j\geqq 2$，則有 $n=4k$。考慮这时 $O(n)$-丛的 Понтрягин 示性类 $p^k\in H^{4k}(S^{4k}, Z)$，据最近 Bott [13]中一定理，有 $p^k=0 \bmod (2k-1)!$。其次，据吳文俊[40; 29, 447—448 頁]的关于模 4 Понтрягин 示性类与 Whitney 示性类的关系一定理，用在球 S^{4k} 上即得 $i_* w^{4k}=p^k \bmod 4$，这里 i_* 表由包含同态 $Z_2\to Z_4$ 所誘导的模 2 及模 4 整系数上調群間的同态。由是 $p^k=0 \bmod 4$ 的充要条件是 $w^{4k}=0$。結合这些，有 $k\leqq 2$。

通常所指的关于球的平行化問題也有了解答(例如見[22, 29])。可平行化的球的維数只能是 1, 3, 7。❶ 这是因为，如果 S^{n-1} 可平行化，則可得一个如(α)中的在 E^n 上的乘法。

§ 10. 示性类 在前面 §§ 2, 9 中已涉及到示性类，这方面的意义可以从下面看出。如同 § 5 中所述，一个以 G 为构造群及以 B 为底空間的纖維丛 $\mathscr{B}$，例如当 B 为复合形时，是由某一个从 B 到分类空間 B_G 的映射的同倫类所完全确定。故泛 G-丛上的同調性質由 f 定出 $\mathscr{B}$ 上的某些同調性質，这后者是 $\mathscr{B}$ 的丛不变量。特别地，B_G 上的同調性質由 f 定出 B 上的某些同調性質，这后者是 $\mathscr{B}$ 的丛不变量，如通常所指的示性环 $f^*H^*(B_G)$ $(\subset H^*(B)$，系数取在一环中)等。f^* 通常叫作示性同态。

在这里，除开由于 f 所屬的同倫类及 B 的胚形等所定的特有的同調性質(例如上节中提到过的 Bott [13] 关于 S^n 为底空間的 $O(n)$-丛的一个結果)不去談外，我們将仅考慮上段所描述的关于 $f^*H^*(B_G)$ 的同調性質，这基本上是要去討論 B_G 上的同調性質(包括上調群、环及約化冪运算等)。

这方面，我們通常注意到的实际上是 $G=$ Lie 群这情况，这些包括正交群 $O(n)$，旋轉群 $SO(n)$ 及酉群 $U(n)$ 等(这至少是因为微分流形及复流形的理論上遇到的纖維丛，其构造群常是这类群)。

分类空間 $B_{O(n)}$, $B_{SO(n)}$ 及 $B_{U(n)}$ 的上調群、环等的性質我們現在已清楚了的。例如，整系数上調环 $H^*(B_{U(n)}, Z)$ 同构于一个具有 n 个未定元的整系数多項式代数，$H^*(B_{O(n)}, Z)$ 及 $H^*(B_{SO(n)}, Z)$ 的撓系数只能为 2 等等。用 Schubert 几何給出(实及复) Grassmann 流形的明确的胞腔剖分以从事这些分类空間的同調群及上調环的計算起于 C. Ehresmann

---

❶ 当 $n=1, 3, 7$ 时，S^n 可平行化；例如可參看 T. H. Kiang [Bull. AMS., 51(1945), 417—428]。

(J. Math. Pures Appl. 16(1937), 69—100), 后見陈省身[16] 及 (Ann. of Math. 49(1948), 362—372); 它們的 Steenrod 平方及約化冪以及 Понтрягин 平方的計算，吳文俊首在 [37, 38, 40]中給出(自然也涉及上积的計算)。設 G 为紧致 Lie 群。用譜理論及 Lie 群的性質以从事分类空間 B_G 的同調性質的丰富的討論(特別地也涉及 G＝一些典型群这情況)見 Borel, Serre 及 Hirzebruch[6, 7, 8, 10, 11]❶。我們还可参看[9, 407—414 頁; 29, 447—448 頁]。

現在，設本节前面所考虑的丛 $\mathscr{B}$ 是一个球丛，以 S^n 为纖維，其底空間 B 为一复合形(或一 CW 复合形)。設 $\mathscr{B}$ 的构造群是 $O(n)$、分类空間 $B_{O(n)}$ 上某个具有特別意义的 i 維上調类經过 f^* 后所得的屬于 B 的上調类久已知道是通常所指的 $\mathscr{B}$ 的 i 維 Whitney 示性类 c^i。Whitney 原是循阻碍类方式来定义这些 c^i 的。命 $\mathscr{B}^n$ 为与 $\mathscr{B}$ 相配的 $O(n)$-丛。則对每一 $1\leqq k\leqq n$, $\mathscr{B}^n$ 亦相配于一个(与 $\mathscr{B}$ 有同样的底空間及构造群)以 Stiefel 流形 $V_{n,k}$ 为纖維的丛 $\mathscr{B}^k$, 而 c^i 卽为 $\mathscr{B}^{n-i+1}$ 的最初阻碍类(看前面 § 2)。由于对每一 $1\leqq k\leqq n$, (以 $B_{O(n)}$ 为底空間)的泛 $O(n)$－丛亦相配于一个以 $V_{n,k}$ 为纖維的丛，据 § 5 中所述之分类定理等等，这丛的最初阻碍类 $\bar{c}^{n-k+1}$(是 $B_{O(n)}$ 上一 $n-k+1$ 維上調类)經过 f^* 后所得的屬于 B 上的上調类卽为 c^{n-k+1}❷。$\bar{c}^i$ 通常叫作 i 維的泛 Whitney 示性类。我們知道，除开当 n＝偶数时 $\bar{c}^n$ 的阶为 ∞ 外，在其余的情况下 $\bar{c}^i$ 的阶均为 2, 而 $\bar{w}^i=\bar{c}^i \bmod 2$, $1\leqq i\leqq n$, 构成上調环 $H^*(B_{O(n)}, Z_2)$的一組生成元。我們常常考虑 $\mathscr{B}$ 的(模 2) Whitney 示性类 $w^i=f^*\bar{w}^i(=c^i \bmod 2)\in H^i(B, Z_2)$。

同样地，分类空間 $B_{O(n)}$ 上某个具有特別意义的 $4k$ 維整系数上調类經过 f^* 后所得的屬于 B 的上調类是通常所指的 $\mathscr{B}$ 的第 k 个 Понтрягин 示性类 p^k。設 n 为偶数: $n=2n'$, 而 $\mathscr{B}$ 的构造群为酉群 $U(n')$。則分类空間 $B_{U(n)}$ 上某个 $2k$ 維的整系数上調类經过 f^* 后所得的在 B 上的上調类是通常所指的第 k 个陈省身示性类 c'^k, $1\leqq k\leqq n$。这些示性类也可循类如上段所述关于阻碍类的办法来得出(于此，我們只須考虑复流形以代替上段中的(实)Stiefel 流形。参看[31, 210 頁])。特別地，泛 $U(n)$-丛上的所有的陈示性类卽构成上調环 $H^*(B_{U(n)}, Z)$ 的一組生成元。此外，我們知道 Понтрягин 示性类也可循阻碍类方式来定义的(虽然 Понтрягин 原意不直接是这样的)，例如可取$(-1)^k p^k$ 作为由包含同态 $O(n)\subset U(n)$ 所导出的陈示性类 c'^{2k}(参看[38, 14, 17])。

設 M^n 为一 n 維連通的流形，具有一个微分构造，$\mathscr{B}$ 为其切球丛(纖維为 S^{n-1}, 构造群为 $O(n)$)。这时 $\mathscr{B}$ 的示性类就叫作 M^n 的示性类($\mathscr{B}$ 的 Whitney 示性类通常叫作 M^n 的 Stiefel-Whitney 示性类)。显然，在这里，如果 M^n 具有不相等价的微分构造，我們会問由此定出的 M^n 的示性类是否与 M^n 的微分构造无关(換言之，卽示性类是否为 M^n 的拓扑不变量)。設 M^n 是紧致的。R. Thom[34] 給出 M^n 的 Stiefel-Whitney 示性类 w^i 与 M^n 的微分构造无关。吳文俊 [38, 40] 給出 M^n 的 Понтрягин 示性类 p^k 取模 3 及模 4 后与 M^n 的微分构造无关。

由于据前所述，这些示性类是經过一个由丛 $\mathscr{B}$ 所决定的映射 $M^n\to B_{O(n)}$ 来确定的，

❶ 这些长文的部分摘要見 C. R. Acad. Sci. Paris(1950—1951) (看文 [6] 所附文献), 及 Proc. Nat Acad. Sci. 39(1953), 1142—1146。

❷ 看 [31, 168 頁] 及李培信 [数学学报, 8(1958), 384—395] 在这方面的补充。

或由与这丛相关的一些阻碍类来定义的，因此要知它們是否为 M^n 的拓扑量，我們就须要将它們表成仅与 M^n 的拓扑性相关的一些不变量。

設 M^n 实现在其 t 次笛卡儿积 $D_t(M^n)=M^n\times M^n\times\cdots\times M^n$ 內作为其对角空間。这实现是一微分实現，因此可考虑其法球丛 $\mathscr{B}_*=\{M^n, E, \Phi\}$（纖維为球 S^{q-1}, $q=(p-1)n$）。命 C_Φ 为投射 Φ 的映射柱。則由丛的构造給出一同构 τ: $H^i(B)\approx H^{i+q}(C_\Phi, E)$（系数群取为 Z 如果 M^n 是可定向的，否則取为 Z_2）。（这是目下所指的关于球丛的 Gysin 叙列中一同态的几何解釋，首見[34]。）可是，另一方面，τ 也仅由流形 $D_p(M^n)$ 的通常的对偶性質完全确定（这是 M^n 的拓扑性。这也仍就可溯源到 Gysin 原意（Comm. Math. Helv., 14(1941), 61—122)）。Thom[34] 与吳文俊[38, 39] 关于微分流形 M^n 的示性类是否为 M^n 的拓扑不变量的探討的主要想法是在寻找 M^n 的示性类与群 $H^i(C_\Phi, E)$ 由目下已知的拓扑不变量（如上积，約化幂等）所表达的关系式。例如，在 Stiefel-Whitney 示性类 w^i 这情况下，Thom[34] 首取 $t=2$，有 $\tau(w^i)=Sq^i\tau(1)$，这 ι 表 $H^0(M^n, Z_2)$ 的生成元。故 w^i 为 M^n 的拓扑不变量。但就 Понтрягин 示性类来說，情况要复杂些的。吳結合分类空間 $B_{U(n)}$（或复 Grassmann 流形）上的約化幂的計算等，得出由 Понтрягин 示性类取模 p 后所組成的某些多項式是 M^n 的拓扑不变量，特別地 $p^k \bmod 3$ 为 M^n 的拓扑不变量[38, 39]❶。因 $p^k \bmod 4$ 可表成 Stiefel-Whitney 示性类及 Понтрягин 平方所組成的关系式，故亦为 M^n 的拓扑不变量[40]。这結果的一应用在前面 § 9 中已提述过。

关于这方面进一步的描述与討論还可以参看[19]。最近 Milnor[28] 指出：或者存在一紧致的 8 維流形不具有微分构造，或者存在一开的 8 維流形其 Понтрягин 示性类 p^1 不是一个拓扑不变量。

不管这类拓扑不变性究竟如何，示性类在拓扑，微分几何及复流形的理論中具有的深入的意义已被不少数学工作者发現了的（例見 Thom[35], S. S. Chern[14] 及 Hirzebruch [17, 18]）。

§ 11. 同倫問題 如所周知，同倫論中映射扩充問題的解決归到上同調运算的有效計算。虽然在广泛的情况下，目下已知最初运算由 Steenrod 循环約化幂及广义的 Понтрягин 幂（包括平方）确定（見[32, 50 頁]），但一般高阶的适当的有效处理有待于 Постников 系的进一步的探索（看[32, 55—56 頁]）。

或許有趣的是，我們可以指出：映射扩充的一般阻碍类問題关联到一适当的丛空間的最初阻碍类問題。

設 X 为一弧連及单連通的空間，B 为任一复合形。設在 B 的 m 維骨架上有一映射 f: $B^m\to X$，它可扩充至 B^{m+1} 上，$m\geqq 2$。則如通常，对 f 联系了一阻碍类

$$c(f)\in H^{m+2}(B, \pi_{m+1}(X));$$

f 可扩充至 B^{m+2} 上一映射的充要条件是 $c(f)=0$（S. Eilenberg, Ann. of Math., 41(1940), 231—251）。这方面一个周知的例子是 N. E. Steenrod (Ann. of Math., 48(1947), 290—

❶ 可看[39, 197 頁]的公式(14)及[39, 192 頁]的公式(18)。吳文俊給在[数学学报, 5(1955), 37—63]中关于 Понтрягин 示性类 mod 3 为拓扑不变量的另一証明所依賴的公式見这文前言中。这公式中的上調类 U^i 由流形的 p 次笛卡儿积 D_p 的对角空間在 D_p 內的邻域以及 D_p 上的自然的周期变换所确定，由是 U^i 仅由 M^n 的拓扑性質決定。

320)取 X 为 m 維球 S^m 时所得的二阶阻碍类 $c(f)=z^{m+2}(f)$ 的計算。但此处 $c(f)$ 一般自然不是这些二阶或三阶的,因为沒有 X 为 $(m-1)$- 連通空間等假設。

对 X 可联系一 Постников 系,即:有

$$X_0 \xleftarrow{p_1} X_1 \xleftarrow{p_2} X_2 \xleftarrow{p_3} \cdots \xleftarrow{p_{n-1}} X_{n-1} \xleftarrow{p_n} X_n \xleftarrow{p_{n+1}} X_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

及映射 $f_n: X \to X_n$ 具有性質

(i) X_0 只包含一点, $\pi_i(X_n)=0$ 对 $i>n$,

(ii) $f_{n*}: \pi_i(X) \approx \pi_i(X_n)$ 对 $i \leq n$,

(iii) $p_n f_n \simeq f_{n-1}$,

(iv) $p_n: X_n \to X_{n-1}$ 是一纖維映射,其纖維是一 $(\pi_n(X), n)$- 空間 K_n,

[32, 56—57 頁]。

据(ii), f_{m+1} 导出同构

$$f_{m+1*}: H^{m+2}(B, \pi_{m+1}(X)) \approx H^{m+2}(B, \pi_{m+1}(X)).$$

命 $g=f_{m+1}f: B^m \to X_{m+1}$。則 g 显然可扩充至一在 B^{m+1} 上的映射,而 g 是否可扩充至一在 B^{m+2} 上的映射的阻碍类即为

$$c(g)=f_{m+1*}(c(f)) \in H^{m+2}(B, \pi_{m+1}(X_m)).$$

$c(g)=0$ 的充要条件是 $c(f)=0$。因此我們可考虑 $c(g)$ 以代替 $c(f)$(如果 $c(g)=0$, 我們也可用空間偶 $(c_{f_{m+1}}, X)$ 的同倫叙列的性質直接証明 f 在 B^{m+2} 上有扩充,这里 $c_{f_{m+1}}$ 表 f_{m+1} 的映射柱)。以下,我們将仅就 $c(g)$ 来討論。

为了簡便,我們将假定 $\pi_{m+1}(X)$ 具有有限个生成元,由是可取 K_{m+1} 为一拓扑群,而 $\mathscr{B}=\{X_m, X_{m+1}, p_{m+1}\}$ 为一 K_{m+1}- 从(参看[32, 56—57 頁; 27; 31, § 10])。考虑映射 $h=f_m f: B^m \to X_m$。因 f 可扩充至 B^{m+1} 上,据(i) h 可扩充至一映射 $h: B \to X_m$(且任意两个如此的扩充都是同倫的)。由是 h 誘导出一 K_{m+1}- 从

$$\mathscr{F}=h^{-1}\mathscr{B}=\{B, E, \Phi\}.$$

(注意同倫的映射誘导出等价的从。) K_{m+1} 是一 $(\pi_{m+1}(X), m+1)$- 空間,特別地,它是 m- 連通的。我們由是可考慮 $\mathscr{F}$ 的最初阻碍类

$$\Omega(\mathscr{F}) \in H^{m+2}(B, \pi_{m+1}(K_{m+1}))$$

(这时 $\pi_{m+1}(K_{m+1})$ 在 B 上作成的局部系数群是单式的,因 $\pi_1(X_m) \approx \pi_1(X)=0$)。

仍記 $h: \{B, E\} \to \{X_m, X_{m+1}\}$ 为由 $h: B \to X_m$ 以自然方式导出的从映射。命 $x \in B$ 为任一点。并記 $\iota=\iota' f: \Phi^{-1}(x) \to X_{m+1}$, 这里 ι' 表包含映射 $p_{m+1}^{-1}(h(x)) \subset X_{m+1}$。考慮具有交换性的图表

$$\begin{tikzcd}
\pi_{m+1}(p_{m+1}^{-1}(h(x))) \arrow[rr, "\iota'_*"] & & \pi_{m+1}(X_{m+1}) \\
& \pi_{m+1}(\Phi^{-1}(x)) \arrow[ul, "h_*"] \arrow[ur, "\iota_*"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 h_* 显然是同构。又从(i)及(iv)以及从 $\mathscr{B}$ 的同倫叙列的恰切性, ι'_* 为同构。这給出 ι_* 是同构。故 ι_* 导出同构

$$\iota_*: H^{m+2}(B, \pi_{m+1}(K_{m+1})) \approx H^{m+2}(B, \pi_{m+1}(X_{m+1})).$$

阻碍类 $c(f)$与从 $\mathscr{F}$ 的最初阻碍类 $\Omega(\mathscr{F})$ 的关联由下式表出，即，

$$\iota_*(\Omega(\mathscr{F}))=f_{m+1*}(c(f)).$$

显然，要証明这等式，只余証明 $\iota_*(\Omega(\mathscr{F}))=c(g)$。事实上，$g$ 可扩充至一映射：$B^{m+1}\to\to X_{m+1}$。仍記 g 为这样的一扩充。据(iii)，不失一般性可假定 $h|B^{m+1}=p_{m+1}g:B^{m+1}\to\to X_m$。从誘导丛的性質，$\mathscr{F}$ 在 B^{m+1} 上有截面 $q:B^{m+1}\to E$ 使得 $g=hq$ 成立。于是，取 $\Omega(\mathscr{F})$中由 q 所定的一代表阻碍鏈，从定义[31, § 32]，易驗証这上鏈也是 $c(g)$ 的一代表鏈。这完成証明❶。

同样地，我們也可以看出：进一步关于 f 是否可扩充到 B^{m+3} 上一映射所遇到的阻碍类(例如，Adem 及 Shimad-Uehara❷ 关于复合形到 $(m-1)$- 連通空間上的三阶阻碍类的討論)也可归到一相当的从空間上二阶阻碍的計算(这时纖維仅有两个不同維数的同倫群不为 0)。

补記(1959 年 7 月 27 日)。在这稿子送出了以后，至最近写作者获知 R. Hermann (Secondary obstrunctions for fiber spaces, Bull. AMS., 65(1959), 5—8)用不同于[23]中的法子对于前面 § 3 中提到的二阶阻碍类問題得出一些进展，但在一般纖維丛的情况下这阻碍类的有效处理仍待探索。Hermann 用的想法类于这里 § 11 中提及的想法，但对象是从空間因此是較广泛的。

參 考 文 献

(这里所举的文献仅以本文直接涉及与較近期的为限)

[1] F. Adams, On the nonexistence of elements of Hopf invariant one, Bull. AMS., 64 (1958), 279—282.

[2] J. Adem, Relations on iterated reduced powers, Proc. Nat. Acad. Sci., 39(1953), 636–638.

[3] В. Болтянский, Векторные поля на многообразии, Докл. АН СССР, 80(1951), 305–307.

[4] В. Болтянский Секущие поверхности косых произведений. Докл. АН СССР, 85(1952), 17–20; 詳文見 Вторые препятствия для секущих поверхностей, Изв. АН СССР, серия Матем., 20(1956), 99–186.

[5] В. Болтянский, Гототопическая классификация секущих поверхностей, Матем. Сборник Н. С., 46(1958), 91—124.

[6] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., 57(1953), 115—207.

[7] A. Borel, La cohomologie mod 2 de certain espaces homogènes, Comment Math. Helv., 27(1953), 165—197.

[8] A. Borel, Sur L'homologie et La cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. of Math., 76(1954), 273—342.

[9] A. Borel, Topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. AMS., 61(1955),

❶ 循此也可以看出：設 o 是对(拓扑群) K_{m+1} 而言的分类空間，则 o 即为一 $(\pi, m+2)$-空間，这里 $\pi=\pi_{m+1}(K_{m+1})=\pi_{m+1}(X)$。这时泛 K_{m+1}-丛的最初阻碍类 Ω 即为 o 的基本上調类。$\mathscr{F}$ 为一映射 $\eta=\xi h$: $B\to o$ 导出，这里 ξ 为某一映射：$X_m\to o$。显然有 $\eta^*\Omega=\Omega(\mathscr{F})$，这也表明与 k-不变量的关系。

❷ 見 J. Adem, Proc. Nat. Acad. Sci., 38(1952), 720–726 及 N. Shimada 与 H. Uehara, Mem. Fac. Sci Kyûsyû Univ. Ser. A. 9(1955), 37–46。

397—433.

[10] A. Borel and J-P. Serre, Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod, Amer. J. of Math., 75(1953), 409—443.

[11] A. Borel and F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, Amer. J. of Math., 80(1958), 458—538.

[12] R. Bott, On the stable homotopy of the classical groups, Proc. Nat. Acad. Sci., USA., 43(1957), 933—935.

[13] R. Bott, The space of loops on a Lie group, Michigan Math. Jour., 5(1958), 35—61.

[14] S. S. Chern, Topics in differential geometry, Princeton 1951 (Mimeographed).

[15] S. S. Chern, Differential geometry of fiber bundles, Proceedings of the International Congress of Mathematics, 1950, 397—411.

[16] A. Dold und R. Thom, Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symmétriques infinis, C. R. Acad. Sci., Paris, 242(1956), 1680—1682.

[17] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraische Geometrie, Springer 1956.

[18] F. Hirzebruch, On Steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the Todd genus, Proc. Nat. Acad. Sci., USA., 40(1953), 110—114.

[19] F. Hirzebruch, Some problems on differentiable and complex manifolds, Ann. of Math., 60(1954), 213—236.

[20] H. Hopf, Sur une formule de la théorie des espaces fibrés, Colloques de Topologie, Bruxelles, 1950, 117—121; 詳文見書 (Algebraic Geometry and Topology, Princeton 1957).

[21] I. James and J. H. C. Whitehead, The homotopy theory of sphere bundles over spheres, I. II., Proc. London Math. Soc., 4(1954), 196—218; 5(1955), 148—166.

[22] M. A. Kervaire, Non-paralleizability of the n-sphere for $n>7$, Proc. Nat. Acad. Sci., 44(1958), 280—283.

[23] S. D. Liao, On the theory of obstructions of fiber bundles, Ann. of Math., 60(1954), 146—191.

[24] S. D. Liao, On the topology of cyclic products of spheres, Trans. of Amer. Math. Soc., 77(1954), 520—551.

[25] S. D. Liao, On fourth obstruction of sphere bundles, Bull. AMS., 59(1953), 585 頁 (摘要 709).

[26] W. S. Massey, On the cohomology ring of a sphere bundle, Jour. of Math. and Mech., 7(1958), 265—266.

[27] J. Milnor, Construction of Universal bundles, I. II., Ann. of Math., 63(1956), 272—284; 430—436.

[28] J. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math., 64(1956), 399—405.

[29] J. Milnor, Some consequences of a theorem of Bott, Ann. of Math., 68(1958), 444—449.

[30] N. Shimada, Differentiable structure on the 15-sphere and Pontrjagin classes of certain manifolds, Nagoya Math. J., 12(1957), 59—69.

[31] N. E. Steenrod, The topology of fiber bundles, Princeton 1951.

[32] N. E. Steenrod, Cohomology operations and obstructions to extending continuous functions, Princeton 1957 (Mimeographed).

[33] I. Tamera, Homeomorphic classification of total spaces of sphere bundles over spheres, J. Math. Soc. Japan, 10(1958), 29—43.

[34] R. Thom, Classes caractéristiques et i-carrés, C. R. Acad. Sci. Paris, 230(1950), 427—429; Variétés plongées et i-carrés, 同一杂志卷数, 507—508.