赢定高考

上海高考**考案**

数学

上海科技教育出版社

赢定高考

上海高考考案

上海科技教育出版社

数学

本书编写组 编

图书在版编目(CIP)数据

赢定高考.数学:上海高考考案/《赢定高考:上海高考考案》编写组编.—上海:上海科技教育出版社,2006.7

ISBN 7-5428-4210-2

Ⅰ.赢... Ⅱ.赢... Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第057867号

赢定高考——上海高考考案
数 学
本书编写组 编

出版发行:上海世纪出版股份有限公司
上海科技教育出版社
(上海市冠生园路393号 邮政编码200235)
网 址:www.ewen.cc
www.sste.com
经 销:各地新华书店
印 刷:江苏大丰印刷二厂
开 本:787×1092 1/16
字 数:590 000
印 张:24.25
版 次:2006年7月第1版
印 次:2006年7月第1次印刷
印 数:1—5 000
书 号:ISBN 7-5428-4210-2/O·478
定 价:31.90元

目录

MULU

使用建议

第一版块　考点完全解读

如果考生对高一高二的学习内容已经有点淡忘的话，这部分内容不可不看 。如果考生对以前学习的内容烂熟于胸，也可以跳过这一部分内容，直接进入下一版块。

不可不看

第二版块　综合能力构建

这一部分是关于基础知识综合运用的内容，也是考试中考生不容易得高分，普遍感觉头疼的地方，因而考生一定要看这部分内容并细加体会。只有对所学知识融会贯通，举一反三，考试时才能熟练运用书上介绍的方法应对试卷中的难题。

一定要看

第三版块　考题剖析

考生可以自己解答题目，或者看书上名师的分析后再行解答。但无论采取哪一种方式，这些考题不可不做。如果都能自己解答，那么你离高分不远了。如果不能独立完成，那就要抓紧了，更有必要努力完成下一模块“针对训练提高”了。

不可不做

第四版块　针对训练提高

考生可以根据自己对每一知识点的实际掌握情况，灵活选做这些预测题。

灵活选做

第1章

集合与命题

考点1 集合的概念与运算

考点完全解读

1. 集合的基本概念

(1) 把某些能够确切指定的对象全体看作一个整体，这个整体就称为一个集合，简称“集”.

(2) 集合中每一个对象称为集合的元素. 集合的元素具有确定性、无序性与互异性.

(3) 任何一个对象 a 对于某一个集合 A 来说，要么属于集合(即 $a\in A$)要么不属于集合(即 $a\notin A$).

(4) 集合分为有限集和无限集.

2. 集合的表示方法

(1) 列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内.

(2) 描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内.

(3) 图示法：用适当的图形表示集合，如文氏图、数轴上的点、函数图像、方程的曲线等.

3. 集合与集合之间的关系

(1) 子集：对于两个集合 A 和 B，如果集合 A 中任何一个元素都属于集合 B，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$.

(2) 等集：对于两个集合 A 和 B，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，那么叫做集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

(3) 真子集：对于两个集合 A 和 B，如

综合能力构建

注意点

1. 注意准确描述集合中的元素，熟练运用集合中的各种符号，如$\in$、$\notin$、$\subseteq$、$\subsetneqq$、$\cup$、$\cap$、$\overline{A}$ 等.

2. 解决有关集合问题的关键是准确理解集合所描述的具体内容，即读懂问题中的集合，理解各元素的意义和元素表达的具体数学内容，能化简的应考虑先化简.

3. 集合之间的包含关系是集合的主要内容，解决问题时应尽量准确理解集合所描述的数学内容，不要忘记“空集是任何集合的子集”.

4. 集合的交、并、补运算是集合的中心内容，解答的关键是准确理解交、并、补的数学意义.

果 $A\subseteq B$,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

4. 集合的运算

(1) 交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$. 即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(2) 并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$. 即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(3) 补集:集合 I 为全集,$A\subseteq I$,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合叫做集合 A 的补集,记作 $\overline{A}$. 即 $\overline{A}=\{x|x\in I$ 且 $x\notin A\}$.

考题剖析

例题❶ 填空:(1)设集合 $A=\{1,2\}$,$B=\{2,3\}$,$P=\{x|x\subsetneqq A\}$,$Q=\{x|x\subsetneqq B\}$,则$P\cap Q=$________;(2)集合 $P=\{a|a=\sin^2\theta-2\sin\theta+2,\ \theta\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{b|$关于 x 的方程$x^2+2(b+3)x+2(b^2+7)=0$ 有实根$\}$,则 P 与 Q 的关系为________;(3)已知 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-4}{x-2}=-\dfrac{1}{2}\right.\right\}$,$B=\{(x,y)|x\cos^2\theta+y-6=0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$,若$A\cap B=\varnothing$,则 θ 值的集合是________.

解:(1) $P=\{\varnothing,\{1\},\{2\}\}$,$Q=\{\varnothing,\{2\},\{3\}\}$, $\therefore$ $P\cap Q=\{\varnothing,\{2\}\}$.

(2) P 集合的元素为函数 $f(\theta)=\sin^2\theta-2\sin\theta+2,\theta\in\mathbf{R}$ 的值域, $\therefore$ $P=\{a|1\leqslant a\leqslant 5\}$.
Q 集合的元素为使方程 $x^2+2(b+3)x+2(b^2+7)=0$ 有实根的 b 的取值范围,
由 $\Delta\geqslant 0$,得 $1\leqslant b\leqslant 5$, $\therefore$ $Q=\{b|1\leqslant b\leqslant 5\}$, $\therefore$ $P=Q$.

(3) A、B 都是点集,A 集合表示的图形是过点$(2,4)$,斜率为$-\dfrac{1}{2}$的直线除去点$(2,4)$;B 集合表示的图形也是直线,且 $A\cap B=\varnothing$,则 B 集合表示的直线斜率为$-\dfrac{1}{2}$,或过点$(2,4)$,即$-\cos^2\theta=-\dfrac{1}{2}$,或 $\cos^2\theta=1$,得 $\theta\in\left\{0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3}{4}\pi,\pi\right\}$.

例题❷ 集合 $A=\left\{x\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4}\geqslant 1\right.\right\}$,$B=\{x|x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$,若 $B\subseteq A$,求 a 的取值范围.

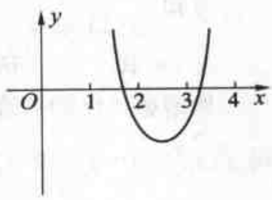

图 1-1-1

解:由$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-5x+4}\geqslant 1$,得 $x^2-5x+4\leqslant 0$, $\therefore$ $1\leqslant x\leqslant 4$.

$\therefore$ $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 4\}$,

$\because$ $B\subseteq A$,

若 $B=\varnothing$,即 $\Delta<0$,得$-1<a<2$.

若 $B\neq\varnothing$,

令 $f(x)=x^2-2ax+a+2$
$=(x-a)^2-a^2+a+2$,

由图 1-1-1 知$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ f(1)\geqslant 0,\\ f(4)\geqslant 0,\\ 1<a<4,\end{cases}$得 $2\leqslant a\leqslant\dfrac{18}{7}$.

小技巧

1. 可以通过数轴或图形来理解集合的交、并,帮助求解.

2. 在解决函数、方程、不等式、排列组合、概率等问题时,可以考虑运用集合的思想进行分析或解答.

综上，$a\in\left(-1,\frac{18}{7}\right]$.

例题❸ 已知 $A=\{-4,2a-1,a^2\}$，$B=\{9,a-5,1-a\}$，若 $A\cap B=\{9\}$，求 a 的值.

解：$\because$ $A\cap B=\{9\}$，$\therefore$ $9\in A$.

若 $2a-1=9\Rightarrow a=5$，此时 $A=\{-4,9,25\}$，$B=\{9,0,-4\}$，$A\cap B=\{9,-4\}$，与已知矛盾.

若 $a^2=9\Rightarrow a=\pm3$，

当 $a=3$ 时，$A=\{-4,5,9\}$，B 中 $a-5=1-a=-2$，与集合的互异性矛盾；

当 $a=-3$ 时，$A=\{-4,-7,9\}$，$B=\{9,-8,4\}$，符合题意.

综上，$a=-3$.

例题❹ (1) 设集合 $A=\{x|x^2-5x+4>0\}$，$B=\{x|x^2-2ax+(a+2)=0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求实数 a 的取值范围；(2) $f(x)=2x^2-(a-2)x-2a^2-a$，若在区间$[0,1]$内至少存在一个实数 b，使 $f(b)>0$，求实数 a 的取值范围.

解：(1) $A=\{x|x<1$ 或 $x>4\}$，$\because$ $A\cap B\neq\varnothing$，$\therefore$ 方程 $x^2-2ax+(a+2)=0$ 有解，且至少有一个解在区间$(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$内. 因直接求解情况较多，故考虑补集.

设全集 $I=\{a|(-2a)^2-4(a+2)\geqslant0\}=\{a|a\leqslant-1$ 或 $a\geqslant2\}$，$P=\{a|x^2-2ax+(a+2)=0$ 的两根都在$[1,4]$内$\}$. 记 $f(x)=x^2-2ax+(a+2)$.

由 $f(x)=0$ 的两根在$[1,4]$内，得$\begin{cases}\Delta\geqslant0,\\ f(1)\geqslant0,\\ f(4)\geqslant0,\\ 1<a<4,\end{cases}$ $\therefore$ $2\leqslant a\leqslant\frac{18}{7}$，

$\therefore$ $P=\left\{a\middle|2\leqslant a\leqslant\frac{18}{7}\right\}$. $\therefore$ a 的取值范围为$\left\{a\middle|a\leqslant-1\text{ 或 }a>\frac{18}{7}\right\}$.

(2) 研究其否定，即在区间$[0,1]$内 $f(x)\leqslant0$ 恒成立.

可知$\begin{cases}f(0)\leqslant0,\\ f(1)\leqslant0,\end{cases}$ $\therefore$ $a\geqslant1$ 或 $a\leqslant-2$.

又 $a\in\mathbf{R}$，$\therefore$ 所求 a 的取值范围为$(-2,1)$.

例题❺ 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：在定义域内存在实数 x_0，使得 $f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$ 成立. (1) $f(x)=\frac{1}{x}$ 是否属于集合 M? 说明理由；(2) 若 $f(x)=\lg\frac{a}{x^2+1}\in M$，求 a 的取值范围；(3) 已知 $y=2^x$ 与 $y=-x$ 的图像有公共点，求证：$f(x)=2^x+x^2\in M$.

解：(1) 假设存在 x_0，使得 $f(x_0+1)=f(x_0)+f(1)$，即 $\frac{1}{x_0+1}=\frac{1}{x_0}+1$，$x_0^2+x_0+1=0$，此方程无实数解，$\therefore$ $f(x)=\frac{1}{x}\notin M$.

(2) $f(x_0+1)=\lg\frac{a}{(x_0+1)^2+1}$，由题意 $\lg\frac{a}{(x_0+1)^2+1}=\lg\frac{a}{x_0^2+1}+\lg\frac{a}{2}$，整理得

$$(a-2)x_0^2+2ax_0+2(a-1)=0.$$

当 $a=2$ 时，方程有解.

当 $a\neq2$ 时，由 $\Delta\geqslant0$，得 $a\in[3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}]$. 综上，$a\in[3-\sqrt{5},3+\sqrt{5}]$.

(3) $f(x_0+1)-f(x_0)-f(1)=2^{x_0+1}+(x_0+1)^2-(2^{x_0}+x_0^2)-3=2[2^{x_0-1}+(x_0-1)]$.

$\because$ $y=2^x$ 与 $y=-x$ 有交点，设交点为 (a,b)，则 $2^a=-a$.

令 $x_0-1=a$，则 $2^{x_0-1}=-(x_0-1)$， $\therefore$ $f(x_0+1)-f(x_0)-f(1)=0$， $\therefore$ $f(x)\in M$.

例题● (1) 设全集 $I=\{1,2,3,\cdots,9\}$，A 与 B 是 I 的子集，若 $A\cap B=\{1,2,3\}$，则称 (A,B) 为优集，那么所有的优集有______个；(2) $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2\}$，则满足 $A\cap C=B\cup C$ 的集合 C 有______个.

解：(1) $A\cap B=\{1,2,3\}$，即 A 与 B 的公共元素有且只有 1,2,3.

$\therefore$ 元素 4 有 3 种可能：$4\in A$ 且 $4\notin B$，$4\in B$ 且 $4\notin A$，$4\notin A$ 且 $4\notin B$.

元素 5,6,7,8,9 也是如此. $\therefore$ 共有 $3^6=729$ 个优集.

(2) $\because$ $B\subseteq B\cup C=A\cap C\subseteq C$， $\therefore$ $B\subseteq C$.

又 $C\subseteq B\cup C=A\cap C\subseteq A$， $\therefore$ $C\subseteq A$.

$\therefore$ $B\subseteq C\subseteq A$，即 $\{1,2\}\subseteq C\subseteq\{1,2,3,4\}$，这样的 C 共有 4 个.

例题● 已知元素为实数的集合 S 满足下列条件：①$0\notin S$；②若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$.

(1) 若 $\{2,-2\}\subsetneqq S$，求元素个数最少的集合 S；

(2) 在(1)求得的 S 中，任取 3 个不同元素 a、b、c，求使 $abc=-1$ 的概率；

(3) 若非空集合 S 为有限集，请猜测集合 S 的元素个数符合的条件，并证明你的猜测.

解：(1) $2\in S\Rightarrow\frac{1}{1-2}=-1\in S\Rightarrow\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in S$，

$-2\in S\Rightarrow\frac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{3}{2}}=-2\in S$.

$\therefore$ 使 $\{-2,2\}\subsetneqq S$ 的元素个数最少的集合 S 为 $\left\{2,-1,\frac{1}{2},-2,\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right\}$.

(2) $\because$ S 中仅有 2 个负数， $\therefore$ 只有如下 2 种可能：$2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}=-1$，$(-2)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=-1$， $\therefore$ 所求概率为 $\frac{2}{C_6^3}=\frac{1}{10}$.

(3) 设 $a\in S$，则 $a\neq0$ 且 $a\neq1$. 由 $a\in S\Rightarrow\frac{1}{1-a}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{a-1}{a}\in S\Rightarrow\frac{1}{1-\frac{a-1}{a}}=a\in S$.

猜测非空有限集 S 的元素个数是 3 的倍数.

证明：由 $a=\frac{1}{1-a}\Rightarrow a^2-a+1=0\,(a\neq1)$，方程无实根，故 $a\neq\frac{1}{1-a}$. 同理，$\frac{1}{1-a}\neq\frac{a-1}{a}$，$\frac{a-1}{a}\neq a$. $\therefore$ $\left\{a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a}\right\}\subseteq S$.

若存在 $b\in S$ 且 $b\notin\left\{a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a}\right\}$，则 $\left\{b,\frac{1}{1-b},\frac{b-1}{b}\right\}\subseteq S$.

若 $\left\{b,\frac{1}{1-b},\frac{b-1}{b}\right\}$ 中有元素 $t\in\left\{a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a}\right\}$，则可得 $b\in\left\{a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a}\right\}$，

故$\left\{a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a}\right\}\cap\left\{b,\frac{1}{1-b},\frac{b-1}{b}\right\}=\varnothing$. 于是$\left\{a,\frac{1}{1-a},\frac{a-1}{a},b,\frac{1}{1-b},\frac{b-1}{b}\right\}\subseteq S$.

由于 S 为有限集，故上述推理经过有限步后中止. $\therefore$ S 中元素个数为 3 的倍数.

预测题 1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-6\leqslant 0\}$，$B=\left\{x\left|\frac{2}{x}\geqslant 1\right.\right\}$，则 $A\cap B$ $=$________.

预测题 2. 设全集 $I=\{1,3,5,7\}$，$M=\{1,|a-5|\}$，$M\subseteq I$，$\overline{M}=\{5,7\}$，则实数 a 的值为________.

预测题 3. 含有 3 个实数的集合可表示为$\left\{x,\frac{y}{x},1\right\}$，也可以表示为$\{|x|,x+y,0\}$，则 x^5-y^3 的值为________.

预测题 4. 集合 $P=\{(x,y)\mid y=k(x-1)+1,\ x\in\mathbf{R},\ y\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y)\mid x^2+y^2-2y=0,\ x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，那么集合 $P\cap Q$ 中的元素个数为________.

预测题 5. 数集 $M=\left\{x\left|m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\right.\right\}$，$N=\left\{x\left|n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\right.\right\}$，且 M、N 都是集合$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$的子集，如果 $b-a$ 叫做集合$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$的"长度"，那么集合 $M\cap N$ 的长度的最小值是________.

预测题 6. 设 M、P 为两个非空集合，定义 $M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$，若 $M=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2004,x\in\mathbf{N}\}$，$P=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 2005,x\in\mathbf{N}\}$，则 $P-M=$________.

预测题 7. 设集合 $A=\{x\mid x^2-a<0\}$，$B=\{x\mid x<2\}$，若 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围是________.

预测题 8. 设 A、B 是非空集合，定义 $A\times B=\{x\mid x\in A\cup B$ 且 $x\notin A\cap B\}$，已知 $A=\{x\mid y=\sqrt{2x-x^2}(y\geqslant 0)\}$，$B=\{y\mid y=2^x(x>0)\}$，则 $A\times B=$________.

预测题 9. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$，若 $A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x\mid 3<x\leqslant 4\}$，则 $a+b$ 的值等于________.

预测题 10. 集合 $M=\{x\mid x=2^n-2^m,m、n\in\mathbf{N}$ 且 $n>m\}$，$P=\{x\mid 1912\leqslant x\leqslant 2004,x\in\mathbf{N}\}$，则 $M\cap P$ 中所有元素的和等于________.

预测题 11. 已知集合 $A=\{x\mid -2k+6<x<k^2-3\}$，$B=\{x\mid -k<x<k\}$，若 $A\subsetneqq B$，求实数 k 的取值范围.

预测题 12. 对于函数 $f(x)$，若 $f(x)=x$，则称 x 为 $f(x)$的"不动点"；若 $f[f(x)]=x$，则称 x 为$f(x)$的稳定点. 函数 $f(x)$的"不动点"和"稳定点"的集合分别记为 A 和 B，即 $A=\{x\mid f(x)=x\}$，$B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$. (1)求证：$A\subseteq B$；(2)若 $f(x)=ax^2-1(a、x\in\mathbf{R})$，且 $A=B\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

预测题 13. 已知集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)(x\in D)$的全体：存在非零常数 k，对任意 $x\in D$，等式 $f(kx)=\frac{k}{2}+f(x)$恒成立. (1)判断一次函数 $f(x)=ax+b(a\neq 0)$是否属于集合 M；(2)证明 $f(x)=\log_2 x$ 属于集合 M，并找到符合条件的一个常数 k；(3)已知函数 $y=\log_a x(a>1)$与 $y=x$ 的图像有公共点，试证明 $f(x)=\log_a x\in M$.

考点2 命题的四种形式

考点完全解读

1. 命题:能判断真假的语句.

2. 四种命题形式:如果一个命题的条件为 A,结论为 B,$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 分别表示 A 和 B 的否定,则该命题的四种命题形式为:

原命题:若 A 成立,则 B 成立(即 $A\Rightarrow B$);

逆命题:若 B 成立,则 A 成立(即 $B\Rightarrow A$);

否命题:若 A 不成立,则 B 不成立(即 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$);

逆否命题:若 B 不成立,则 A 不成立(即 $\overline{B}\Rightarrow\overline{A}$).

3. 等价命题:如果甲、乙两个命题满足甲⇒乙,乙⇒甲,则称甲、乙两命题是等价命题.

原命题与逆否命题是等价命题,逆命题与否命题也是等价命题.

考题剖析

例题❶ 将下列命题写成"若 p 则 q"的形式,然后写出其逆命题、否命题及逆否命题:(1)能被 4 整除的整数一定是偶数;(2)乘积为奇数的两个整数都不是偶数;(3)三边不都相等的三角形不是正三角形.

解:(1) 原命题:若一个整数能被 4 整除,则它一定是偶数.

否命题:若一个整数不能被 4 整除,则它一定不是偶数.

逆命题:若一个整数是偶数,则它一定能被 4 整除.

逆否命题:若一个整数不是偶数,则它一定不能被 4 整除.

(2) 原命题:若两个整数的乘积为奇数,则这两个整数都不是偶数.

逆命题:若两个整数都不是偶数,则这两个整数的乘积为奇数.

否命题:若两个整数的乘积不为奇数,则这两个整数中至少有一个是偶数.

逆否命题:若两个整数中至少有一个是偶数,则这两个整数的乘积不为奇数.

(3) 原命题:若一个三角形的三边不都相等,则这个三角形不是正三角形.

逆命题:若一个三角形不是正三角形,则这个三角形的三边不都相等.

综合能力构建

注意点

1. 正确区分"命题的否定"与"否命题".

对命题"若 p 则 q"的否定是"若 p 则非 q",它否定的是命题所作的判断;而否命题则是同时否定命题的条件与结论,即"若非 p 则非 q".例如命题"两组对边平行的四边形是平行四边形"的否定形式为"两组对边平行的四边形不是平行四边形",而其否命题为"若一个四边形至少有一组对边不平行,则它不是平行四边形".

2. 常见的否定形式

①是—不是 ②">"—"≤" ③都是—不都是或至少有一个不是 ④一定是—一定不是 ⑤至多 n 个—多于 n 个 ⑥a 且 b—$\overline{a}$ 或 $\overline{b}$ ⑦有无穷多个—只有有限个 ⑧对任意 p,结论恒成立—至少有一个 p,使结论不成立.

否命题：若一个三角形的三边都相等，则这个三角形是正三角形.

逆否命题：若一个三角形是正三角形，则这个三角形的三边都相等.

例题❷ 判断下列命题的真假，并说明理由：(1)方程 $ax+1=x+2$ 有唯一解；(2)正整数集合内有且只有一个质数是偶数；(3)如果两个实数的和是无理数，那么这两个数中至少有一个是无理数.

解：(1) 假命题.举反例：当 $a=1$ 时方程无解.

(2) 真命题.(反证法) $\because$ 偶数 2 是质数，假设正整数集合内还有一个异于 2 的偶数也是质数，设其为 $2n(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$. $\because$ $n<2n$, $\therefore$ $2n$ 至少有三个约数：$1,n,2n$，这与质数的定义矛盾.

$\therefore$ 正整数集合内有且只有一个质数是偶数.

(3) 真命题.该命题的逆否命题为“如果两个实数都是有理数，那么这两个数的和是有理数”，显然正确.根据原命题与逆否命题是等价命题，可知原命题为真命题.

例题❸ 下列各组中的两个命题互为等价命题的是(　　).

(A) “$A\subseteq B$”与“$A\cup B=B$”　　(B) “$x\in A$”与“$x\in A\cup B$”

(C) “$a\in A\cap B$”与“$a\in B$”　　(D) “$m\in A\cap B$”与“$m\in A\cup B$”

解：可利用文氏图逐一作图验证，正确选项为 A.

例题❹ 给出如下两个命题：

命题 p：$f^{-1}(x)$是 $f(x)=1-3x$ 的反函数，且 $|f^{-1}(a)|<2$；

命题 q：集合 $A=\{x|x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x>0\}$，且 $A\cap B=\varnothing$.

求实数 a 的取值范围，使命题 p、q 中有且只有一个为真命题.

解：命题 p 正确，则 $f^{-1}(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$，$|f^{-1}(a)|=\left|-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\right|<2$，得 $-5<a<7$.

命题 q 正确，则 $x^2+(a+2)x+1=0$ 无实数解或所有解都小于等于 0.

由 $\Delta<0$，得 $-4<a<0$，由 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2\leqslant 0,\\ x_1x_2\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $a\geqslant 0$，　$\therefore$　$a>-4$.

若 p 真 q 假，则有 $-5<a\leqslant -4$；若 p 假 q 真，则有 $a\geqslant 7$.故当 $a\in(-5,-4]\cup[7,+\infty)$ 时，命题 p、q 中有且只有一个为真命题.

例题❺ (1) 试判断命题“一次函数 $f(x)=kx+h(k\neq 0)$，若 $m<n$，$f(m)>0$，$f(n)>0$，则对任意 $x\in(m,n)$都有 $f(x)>0$”是真命题还是假命题，并说明理由；(2)利用(1)的结论，判断命题“若 a、b、c 均为实数，且 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，则 $ab+bc+ca>-1$”是真命题还是假命题，并说明理由.

分析：一次函数的图像是一条直线，可利用函数增减性判定命题真假.要利用(1)的结论，就要构造一个相应的一

1. 确定一个命题为真命题，除了从已知条件出发，依据所学过的公理、定理、公式等逐步推导，得出结论外，还可以用间接证明法，如利用原命题与逆否命题等价来进行证明.

2. 确定一个命题为假命题，只需写出一个满足条件而不满足结论的例子就可以了，这在数学中叫举反例.

次函数 $f(x)=(b+c)x+bc+1$.

解：(1) 当 $k>0$ 时，$f(x)=kx+h$ 为增函数，由 $f(m)>0$ 得，当 $x\in(m,n)$ 时必有 $f(x)>0$；当 $k<0$ 时，$f(x)=kx+h$ 为减函数，由 $f(n)>0$ 得，当 $x\in(m,n)$ 时必有 $f(x)>0$.

因此所给命题为真命题.

(2) 构造 $f(x)=(b+c)x+bc+1(|b|<1,|c|<1)$，又知 $a\in(-1,1)$，且 $f(a)=(b+c)a+bc+1=ab+bc+ca+1$.

当 $b+c=0$ 时，$f(a)=-c^2+1>0$，这时 $ab+bc+ca>-1$；

当 $b+c\neq0$ 时， $\because\ |b|<1,|c|<1,\ \therefore\ f(1)=(b+c)+bc+1=(1+b)(1+c)>0$，$f(-1)=-(b+c)+bc+1=(1-b)(1-c)>0$，

根据(1)的结论，当 $x\in(-1,1)$ 时，一定有 $f(x)>0$.

$\because\ |a|<1,\ \therefore\ f(a)=ab+bc+ca+1>0$ 恒成立.

综上，$ab+bc+ca>-1$，所给命题为真命题.

针对训练提高

预测题 1. “四边相等的四边形是菱形”的否命题是__________.

预测题 2. 若 $x\in A$ 或 $x\in B$，则 $x\in A\cap B$ 的逆否命题是____________________.

预测题 3. 写出下列说法的否定形式：(1)$a>0$ 且 $b\leqslant0$；(2)三条直线两两相交；(3)$A\subsetneqq B$；(4)存在实数 x，使 $x^2-x-1=0$.

预测题 4. 设有两个命题：

命题 p：不等式 $|x|+|x-1|>m$ 的解集为 $\mathbf{R}$；

命题 q：$f(x)=-(7-3m)^x$ 是减函数.

如果这两个命题中有且只有一个为真命题，则 m 的取值范围是________.

预测题 5. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断真假. (1)两个有理数的和是有理数；(2)a、b、$c\in\mathbf{N}$，如果 ab 是 c 的倍数，那么 a、b 中至少有一个是 c 的倍数.

预测题 6. 将命题“$\frac{1}{3}$不是整数”写成“若 p 则 q”的形式.

预测题 7. 命题“若 $a^2+b^2=0(a,b\in\mathbf{R})$，则 $a=b=0$”的逆否命题是__________.

预测题 8. 下列四个命题：$A\cap B=A$，$A\cup B=B$，$A\cap\overline{B}=\varnothing$，$\overline{A}\cup B=I$，其中与 $A\subseteq B$ 等价的命题有______个.

考点 3 充要条件

考点完全解读

1. 充分条件与必要条件

如果 $\alpha\Rightarrow\beta$，那么 α 是 β 的充分条件；

如果 $\beta\Rightarrow\alpha$，那么 α 是 β 的必要条件；

如果 $\alpha\Rightarrow\beta$ 且 $\beta\Rightarrow\alpha$，那么 α 是 β 的充分且必要条件，简称充要条件.

2. 以集合表示充要条件

从集合观点看，若 $A\subseteq B$，则 A 是 B 的充分条件，B 是 A 的必要条件；若 $A=B$，则 A、B 互为充要条件.

例题❶ (1) 设 $abc\neq 0$，“$ac>0$”是“曲线 $ax^2+by^2=c$ 为椭圆”的________条件；

(2) a、$b\in\mathbf{R}$，“$a^2+b^2<1$”是“$ab+a<b+1$”的________条件；

(3) 在$\triangle ABC$中，“$A\neq B$”是“$\sin A\neq\sin B$”的________条件.

解：(1) “$ac>0$”不能推出 $ax^2+by^2=c$ 为椭圆，当 $bc<0$ 时曲线表示双曲线. 而“曲线 $ax^2+by^2=c$ 为椭圆”可推出 $ac>0$、$bc>0$，故为“必要非充分”条件.

(2) $ab+a-b-1=(a-1)(b+1)$. 由 $a^2+b^2<1$，得 $|a|<1$，$|b|<1$，可推出 $(a-1)(b+1)<0$. 而当 $a=-1$，$b=1$ 时，有 $ab+a<b+1$，$a^2+b^2>1$，不可推出 $a^2+b^2<1$. 故为“充分非必要”条件.

(3) ①在$\triangle ABC$中，若 $\sin A=\sin B$，则 $A=B$ 或 $A=180^\circ-B$. ②在$\triangle ABC$中，若 $A=B$，则 $\sin A=\sin B$.

对命题：在$\triangle ABC$中，若 $A\neq B$，则 $\sin A\neq\sin B$，由①知，该命题的逆否命题错误，故“$A\neq B$”不能推出“$\sin A\neq\sin B$”；由②知，该命题的否命题正确，故其逆命题也正确，即“$\sin A\neq\sin B$”能推出“$A\neq B$”. 故为“必要非充分”条件.

例题❷ (1)写出“$\frac{a}{b}>1$”的一个充分非必要条件；(2)函数 $f(x)=(a^2-1)x^2+(a-1)x+3$，分别写出 $f(x)>0(x\in\mathbf{R})$ 的一个充分非必要条件和充要条件.

解：(1) 由 $a>b>0$，可得 $\frac{a}{b}>1$，而 $a<b<0$ 时也有 $\frac{a}{b}>1$. 故“$a>b>0$”或“$a<b<0$”都是“$\frac{a}{b}>1$”的充分非必要条件.

(2) 由 $\begin{cases}a^2-1>0,\\ \Delta<0,\end{cases}$ 得 $a\in\left(-\infty,-\frac{13}{11}\right)\cup(1,+\infty)$，是 $f(x)>0(x\in\mathbf{R})$ 的一个充分非必要条件. $\begin{cases}a^2-1>0,\\ \Delta<0\end{cases}$ 表示 $f(x)$ 的图像是开口向上，且在 x 轴上方的抛物线，故有 $f(x)>0(x\in\mathbf{R})$，而当

综合能力构建

1. 判断 p 是 q 的什么条件，可以从以下几个方面入手：

(1) 直接推理：由条件 p 出发进行推导，再由结论 q 出发进行推导.

若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的充分非必要条件；

若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件；

若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要非充分条件；

若 $p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$，则 p 是 q 的既非充分又非必要条件.

(2) 如果条件 p 与结论 q 可以用集合来描述，则以集合思想考虑比较简单.

设 $P=\{p\}$，$Q=\{q\}$.

若 $P\subsetneqq Q$，则 p 是 q 的充分非必要条件；

若 $P=Q$，则 p 是 q 的充要条件；

若 $Q\subsetneqq P$，则 p 是 q 的必要非充分条件；

若 $P\not\subseteq Q$ 且 $Q\not\subseteq P$，则 p 是 q 的既非充分又非必要条件.

(3) 如果 p(或 q)比较复杂，则需要对 p(或 q)进行等价变换，即寻求 p 或 q 的充要条件，然后用它们的等价结论进行推导.

$a=1$ 时有 $f(x)=3>0(x\in\mathbf{R})$.

由上述结论得 $\begin{cases}a^2-1>0,\\ \Delta<0\end{cases}$ 或 $a=1$，即 $a\in\left(-\infty,-\dfrac{13}{11}\right)\cup[1,+\infty)$ 是 $f(x)>0(x\in\mathbf{R})$ 的充要条件.

例题❸ 设 $A=\{x||x^2-5|<4\}$，$B=\{x||x-2|<a\}$. 若 A 是 B 的必要非充分条件，求实数 a 的取值范围.

解： ∵ A 是 B 的必要非充分条件， ∴ $B\subsetneqq A$. ∵ $A=(-3,-1)\cup(1,3)$，当 $a\leqslant0$ 时，$B=\varnothing$，显然有 $B\subsetneqq A$；当 $a>0$ 时，$B=(2-a,2+a)$，由 $B\subsetneqq A$ 得 $\begin{cases}2-a\geqslant-3,\\ 2+a\leqslant-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-a\geqslant1,\\ 2+a\leqslant3,\end{cases}$ ∴ $a\leqslant-3$(舍)或 $a\leqslant1$. ∴ $0<a\leqslant1$.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

例题❹ (1) 集合 $A=\{x|ax^2+3-2x=0\}$ 是单元素集合的充要条件是________；

(2) 关于 x 的不等式 $|x-1|+|x-2|\leqslant a^2+a+1$ 的解集为空集的充要条件是________；

(3) 函数 $f(x)=x^2+|x-b|+c$（c 为常数）在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数的充要条件是________.

解： (1) 当 $a=0$ 时，$x=\dfrac{3}{2}$，A 是单元素集合. 当 $a\neq0$ 时，$\Delta=0$，即 $4-12a=0$，得 $a=\dfrac{1}{3}$.

综上，$a=0$ 或 $a=\dfrac{1}{3}$.

(2) 记 $f(x)=|x-1|+|x-2|$，由绝对值的意义知 $[f(x)]_{\min}=1$， ∴ 当 $a^2+a<0$ 即 $-1<a<0$ 时，$f(x)\leqslant a^2+a+1$ 的解集为空集.

(3) ∵ 在 $[0,+\infty)$ 上，x^2 为增函数，c 为常数， ∴ $|x-b|$ 为增函数， ∴ $b\leqslant0$.

例题❺ (1) 试举例说明命题 A：“若存在 $x_0\in D$，使得 $f(-x_0)\neq f(x_0)$，且 $f(-x_0)\neq-f(x_0)$”不是命题 B：“$y=f(x)$ 为非奇非偶函数”的必要条件；

(2) 试写出“$y=f(x)$ 为非奇非偶函数”的一个充要条件.

解： (1) $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq1),\\ -1 & (x=1)\end{cases}$ 显然为非奇非偶函数，除了 $x=\pm1$ 外，对其他任意的 x 都有 $f(-x)=f(x)$. 而 $f(-1)\neq f(1)$，$f(-1)=-f(1)$，因此同时满足 $f(-x_0)\neq f(x_0)$ 且 $f(-x_0)\neq-f(x_0)$ 的 x_0 不存在. ∴ A 不是 B 的必要条件.

2. 大多数证明问题就是证明条件的充分性. 如“求证：当 $m\geqslant0$ 时，方程 $x^2-(2m-1)x+(m^2-2m)=0$ 有实数解”，相当于证明 $m\geqslant0$ 是方程有实数解的充分条件. 如果命题改成“求使方程有实数解的 m 的取值范围”，则所求 m 的取值范围是方程有实数解的充要条件.

3. 在解方程、解不等式、求定义域、求值域、求参数取值范围等过程中，必须时刻保证推导的充要性，即每一步变换都必须是等价的. 因为所求得的解集、取值范围等都不能任意扩大或缩小.

应熟悉充要条件的各种同义词语. 常见的有“等价于”，“当且仅当”，“能且只能”，“必须且只需”，“……反之亦真”等. 尤其是在证明题中，除了证明充分性外，别忘了证明必要性.