

高等学校教学用书

球面三角学

Ф. Ф. 巴甫洛夫, В. П. 馬希克維奇著

商务印书馆

高等學校教學用書



球面三角學

Ф. Ф. 巴甫洛夫, В. П. 馬希克維奇著

劉亞星譯

商務印書館

本書系根据苏联煤炭工業出版社 (Углетехиздат) 出版的巴甫洛夫 (Ф. Ф. Павлов) 和馬希克維奇 (В. П. Машкевич) 合著的“球面三角学” (Сферическая тригонометрия) 1951 年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为高等学校礦山測量專業教学参考書。

球 面 · 三 角 学

Ф. Ф. 巴甫洛夫, В. П. 馬希克維奇著

刘亞星譯

★ 版 权 所 有 ★

商 务 印 书 馆 出 版

上海河南中路二一〇号

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五号)

新 华 书 店 总 經 售

京 华 印 书 局 印 刷

(13017·61)

1953 年 10 月初版

1956 年 5 月 4 版

1957 年 4 月北京第三次印刷

印张: 6/16

開本 320×1168¹/₃₂

字數 79,000

印數 23,501—30,500

定價 (8) ¥ 0.40

目 录

緒言.....	5
历史介紹.....	5

第一編 球面几何

§ 1 球面上的圓	8
§ 2 軸、極、極綫、球面角及其度量	11
§ 3 球面坐标	12
a) 赤道坐标系	12
6) 水平坐标系	13
§ 4 球在平面上的投影、制圖網	14
§ 5 一般評論及制圖網对解球面几何問題的应用	17
§ 6 球面上的圖形: 球面二角形、球面三角形、極綫三角形和对称 三角形	20
§ 7 極綫球面三角形的性質	22
I. 原球面三角形和極綫球面三角形的关系	22
II. 球面三角形角的性質	25
III. 球面三角形的相等	26
IV. 球面三角形中边和角的关系	28
§ 8' 球面三角形的內切圓和外接圓	29
§ 9 球面二角形的面积、球面三角形的面积、球面剩余的定義	30
§ 10 大圓弧和小圓弧的直綫長度	33
§ 11 球面三角形作圖問題	34

第二編 球面三角

§ 1 导論	37
§ 2 球面三角形边的余弦公式	37
§ 3 正弦公式	40
§ 4 角的余弦公式	42
§ 5 球面三角形五个元素的公式	43
§ 6 角的正弦和鄰边余弦的乘积公式	43
§ 7 球面三角形相鄰四元素間的关系式或余切公式	44
§ 8 球面直角三角形	46
§ 9 球面直边三角形	50

§ 10 球面直角三角形解法	51
§ 11 解球面任意三角形的公式	55
I. 用边的函数定角的任意三角形公式	55
a) 半角正弦公式	55
b) 半角余弦公式	57
c) 半角正切公式	58
II. 半边正弦、半边余弦及半边正切的公式	60
III. 用球面剩余确定球面三角形的边的公式	62
IV. 用边的函数表示球面剩余的公式	63
V. 用三边一角的函数表示球面剩余的公式	66
VI. 球面三角形相邻三元素的公式	68
VII. 相似	69
§ 12 球面三角形的分析和解法	73
§ 13 初等球面三角形	84
附录	9
第一編“球面几何”的例题和习题	92
第二編“球面三角”的例题和习题	98

緒 言

球面三角是数学的一个分科，研究球面上由大圆弧構成的三角形的解法。

球面三角有重要的理論上和实用上的价值，并且在天文学、高等測量学、制圖学、結晶学、矿山几何学、仪器学及其他科学各方面有广泛的应用，只要是需要应用補助球来研究点、綫、面在空間中的相互位置时，都必須用到球面三角。

历史介紹

球面三角出現在古代东方国家并在那里获得初步發展。

在古代已有巨大發展的天文学促进了这門科学的發展，由于天文学的發展，三角学首先是以球面三角的形式出現的，以后平面三角始作为球面三角的特殊情形而出現。

球面和平面三角的創始人一般認為是希臘学者吉巴尔哈，他于紀元前 180—125 年生活于亞历山大里亞。

希臘学者在球面三角領域中有貢獻的还有的黎波里的狄奥多西、門涅賴和托勒密。

以后在印度人以及特別在阿剌伯人和中亞細亞人[阿布-瓦法、納西尔·爱丁以及曾在撒馬尔罕工作过一段時間的阿尔-巴丹(850—920)]那里球面三角以及平面三角获得了新的發展。

納西尔·爱丁在自己的著作“关于四边形的論文”中作出了关于球面和平面三角的一般性总结工作。

以后球面三角的發展归功于勒吉奧蒙旦(1435—1476)、替荷-德-布拉格(1546—1610)、开普勒(1571—1630)等人。

十七世紀初對數的發明及詳細的三角函數及三角函數對數表的出版根本改進了球面三角的計算，而十八世紀數學分析的發展給與球面三角的公式以優美簡單的形式。

歐勒、拉格倫奇和高斯給與球面三角以現代的形式。

俄羅斯科學院院士歐勒(1707—1783)是現代球面三角的創始人，在這方面他有兩種重要著作：“球面三角基礎”(1753)和“綜合球面三角學”(1779)。

歐勒球面三角形的特征在於：1)球面三角形的每個邊和每個角都大於零而小於 π ；2)假設球面上三點中的任兩點都不在同一直徑的兩端，則它們確定一個而且只確定一個球面三角形。

馬比阿斯(1846年)推廣球面三角形邊 a 和角的界限到 2π ，這樣的球面三角形叫做馬比阿斯三角形。

關於球面角的更廣泛的毫無限制的概念是高斯、斯圖第以及特別是天才俄羅斯數學家羅巴契夫斯基(1793—1856)給出的。

H. H. 羅巴契夫斯基在自己的著作“想像幾何學”(1835—1836)中給出了以下關於球面三角形邊和角的公式。

$$a' = p_a + q_a,$$

即

$$a = p_a a + q_a$$

$$a' = p_a^2 + q_a$$

(對其餘兩邊和兩角有同樣的公式)。

我們知道的俄羅斯第一個球面三角的教程是西門·莫爾德維諾夫船長經著的，出版於1748年，在這里球面三角是“航海全書”的一部分。

在序言中著者說了下面的話：

“為此我有勇氣向親切的航海人員提出航海全書：根本上從幾何學開始，論及有幾何證明的球面和平面三角，論及天體和天文。”

* 原書此處作三邊的和，按歐勒球面三角形三邊的和已可到達 2π ，故此處當為每邊的外限 譯者。

1787年彼得堡出版了一本不知作者姓名的“球面和平面三角学”。

同一年彼得堡出版了名叫依凡·高尔德也夫的乘轡練習生著的“布格洛夫航海新著作中事物的定义”。

在球面三角部分叙述了下列問題：

第一章“关于球面三角形中边和角的比例”。

第二章“直角三角形解法”。

第三章“鈍角三角形的計算、等腰三角形、等边三角形”。

每章都有習題。

以后球面三角在俄罗斯和苏联的發展是与天文和航海的进步同时，也是与这些科学杰出代表者的名字分不开的。

列宁格勒采矿学院首任矿山測量教研室主任 B. II. 巴吾曼教授和“坑藏几何”創始人 II. K. 索巴列夫斯基教授注意到球面三角对矿山測量的价值。他兩人都著有球面三角教科書，巴吾曼的書广泛地流行于矿山測量者中間，索巴列夫斯基的小冊子以富于創造性著称。

第一編 球面几何

在着手研究球面三角以前，首先需要熟悉球面几何的基本原理，而球面几何是研究分布在球面上的圖形的性質的。

§ 1. 球面上的圓

在空間中與一個定點 O ——球心（圖 1）——等距離的點的軌

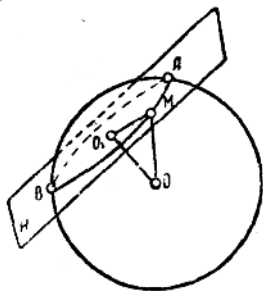


圖 1

迹叫做球面。包圍在球面中的空間叫做球。換句話說，球面可以定義為半圓周圍繞它的直徑的旋轉面。連接球心和球面上任意點的線段叫做球的半徑 R ，而連接球面上兩點並且通過球心的線段叫做直徑；很明顯，同一個球的半徑相等，而直徑等於兩個半徑。

在球面几何的基礎中有以下定

理：

定理 1. 任意平面和球相截而成的截痕是圓（圖 1）。

假設，曲線 AMB 表示用平面 H 截半徑為 R 的球面所得的截痕。

從球心向平面 H 引垂線 $OO_1=d$ 並且在截痕上取任意點 M ；把它和 O 點、 O_1 點連接起來，我們得到直角三角形 O_1OM ；我們用 r 表示 O_1M ，則

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} \dots \dots (1)$$

因為當 M 點沿曲線 AMB 運動時 MO 和 MO_1 的長度不變因而

$MO_1=r$ 也是常数,而曲綫上所有的点都在平面 H 上;所以,平面 H 和球面的交綫是圓周,这个圓周叫做小圓。小圓可以互相交截,互相平行或互相傾斜。距球心相等的小圓有相等的半徑因而相等。

从等式(1)推出,当 $d=0$ 时截面通过球心 O 并且 $r=R$ 。在这种情况下平面和球面的截痕叫做大圓。

定理 2. 大圓分球和球面为相等的兩部分。

用通过球心的平面截球,此时我們所得的是大圓;把一部分球翻轉,并且把它这样嵌入第二部分中,使它們的底互相重合,因为所有球面上的点距离球心都相等;所以一部分球面上所有的点都和第二部分球面上对应的点重合。所以,大圓分球和球面为相等的兩部分。

定理 3. 通过球面上不在同一直徑兩端上的两个点,能作而仅能作一个大圓(圖 2)。

取以 O 为心的球面上的两个点 A 和 B , 这两点不在同一个直徑的兩端上。因为任意平面为不在一条直綫上的三个点所确定,所以通过 AOB 三点能作而仅能作一个平面,但因这个平面通过球心 O , 所以,很明显,它和球面的交綫是大圓。

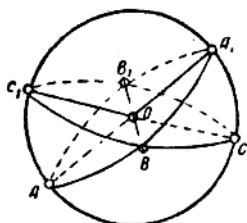


圖 2

定理 4. 两个大圓的平面的交綫是它們的直徑并且把它們平分。

因为大圓 ABA_1 和 CBC_1 的平面通过圓心 O (圖 2), 所以 O 点同时在两个大圓的平面上因而也在它們的交綫上, 也就是說直綫 BB_1 同时是两个圓的直徑并且平分圓周。

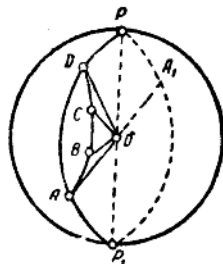


圖 3

定理 5. 小于 180° 的大圓弧

(圖 3) 是球面上兩點間的最短球面距離。

設 A 和 D 為球面上不在同一直徑兩端的二點，則大圓 APA_1P_1 上的兩個圓弧中較短的一個叫做 AD 間的球面距離。

設 A 和 A_1 在一個直徑的兩端，則 A 和 A_1 間的球面距離等於大圓的一半。

為了證明球面上兩點間的最短距離是大圓弧，我們通過 A 和 D 作大圓弧和曲線 $ABCD$ 。以 $B, C \dots$ 等點分後一曲線為無窮小的弧 $AB, BC, CD \dots$ ，使在極小的誤差範圍內可以認為它們是大圓弧。把 $ABCD \dots$ 和球心 O 連接起來，我們得到多面角 $OABCD$ 。平面角 $\widehat{AOD} < \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} \dots$ ；用相等的弧代替中心角，我們得到 $\widehat{AD} < \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD}$ 或 $\widehat{AD} < \widehat{ABCD}$ ；如此，大圓在球面上就像直線在平面上一樣。

還有另一個證明，這個證明是根據下面的定理：大地綫是任意曲面上兩點間的最短距離；所謂大地綫是指具有這樣性質的曲線，即在這曲線任一點上曲面的法綫和在這一點含於密切面內曲線自身的法綫（即主法綫）重合*。

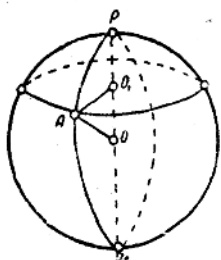


圖 4

在球面上（圖 4）取一點 A 並通過它作大圓弧和小圓弧，把 A 點和大圓心 O 連接起來，而 O 點同時也就是球心。

設 O_1 點是小圓心。球半徑 AO 是球面在 A 點的法綫同時也是曲線 PAP_1 在 A 點的法綫。因為對大圓弧上任意點都是如此，所以大圓弧是大地綫，因而也是球上的最短距離。對於小圓上的點情形

就不同了；在這裡球面的法綫 AO 不和曲線的主法綫 AO_1 重合，所

① 根據“歐勒約定”。

* 原書誤作“在這曲線任一點上，曲面的含於密切面內的法綫，與曲線自身在此點的法綫重合”。茲改正之——譯者。

以小圓不是大地綫，因而也不是球面上兩點間的最短距離。

§ 2. 軸、極、極綫、球面角及其度量

垂直于任意已知圓所在平面的球直徑叫做這個圓的軸。軸交球面于相反的兩點 P 和 P_1 ，這兩點叫做極(圖 5)。

任意圓上所有的點，例如 B_1, B_2, B_3, B_4 ，和這個圓的極 P 的距離都相等，即大圓弧 PB_1, PB_2, PB_3, PB_4 相等。極叫做小圓弧的球面中心。 PB_1, PB_2 等弧的長度叫做球面半徑；如果球面半徑等于 90° ，則大圓弧叫做 P 和 P_1 點的極綫。極是垂直于極綫的大圓的交點。假設 A_2, A_3 或其他的點在 P 點的極綫上，則 $A_2P = 90^\circ$ ，但 A_2 自己又在 A_1 點的極綫 PA_2P_1 上，所以大圓 $PB_2A_2P_1$ 以及 $PB_4A_4P_1$ 等和極綫互相垂直。

球面角 大圓弧相交所成的角 P 和 P_1 (圖 5)叫做球面角。圓弧的交點叫做球面角的頂點，而圓弧叫做球面角的邊。設兩個圓弧 A_2P 和 A_3P 在 P 點相交，則角 A_2PA_3 叫做球面角，它的頂點是 P 而邊是 PB_2 和 PB_3 。球面角的度量有四種方法：1) 用由平面 POA_2 和 POA_3 所構成的二面角來度量，2) 用直線角 A_2OA_3 來度量，3) 用弧 A_2A_3 來度量，此處 A_2A_3 是頂點 P 的極綫，4) 用在頂點 P 處切于球面角的邊的切綫間的夾角來度量。

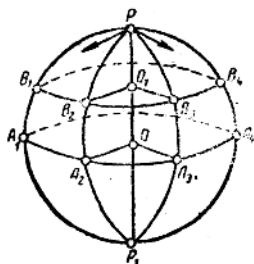


圖 5

球面角，也像平面角一樣，可以是銳角、直角或鈍角并且它的值在從 0° 到 360° 之間。有一個公共邊而在外兩邊是同一個弧的延長綫的兩個球面角叫做互補。由于球面角可用直線角 A_2OA_3 來度量，我們有：1) 兩個互補球面角的和等于 180° ，2) 有一個公共

頂点的所有球面角的和等于 360° 。

§ 3. 球面坐标

球面上点的位置可用任意坐标系确定，但在天文学、测量学、结晶学、实用地质学中最常用的是球面——赤道和水平的坐标系。

a) 赤道坐标系

在球面上取一点 A 并通过 A 作大圆弧。以 A 点为极作极线。把地球当作一个球，我们这样转动球面，使 A 点和地球的极 P 重合（圖 6）。于是通过极的大圆弧 PQP_1Q_1 叫做本初经线，极线 QmQ_1 叫做赤道。

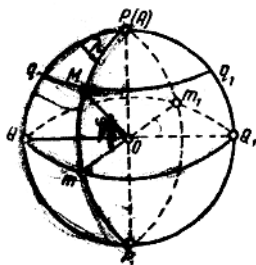


圖 6

为了确定球面上一点 M 对于赤道 QQ_1 和本初经线 PQP_1Q_1 的位置，通过 M 点和极点 P 作大圆弧。得到的半圆周 PMP_1 叫做 M 点的经线，或经圆。从 M 点沿大圆弧到赤道的距离 m 叫做 M 点的纬度。

纬度用字母 φ 来表示并且从赤道到北极或南极是从 0° 到 90° 变化。从赤道到北极的纬度叫北纬，从赤道到南极的纬度叫南纬。

有时不用纬度而用对应于中心角 MOP 的弧 MP ， MP 叫做极距，并且用字母 Δ 表示。极距和纬度的和等于 90° ，即

$$\varphi + \Delta = 90^\circ.$$

在球面上，也像在平面上一样，一个坐标是不够的；因为在平行于赤道 QQ_1 的小圆 qMq_1 上，所有的点的纬度都是相同的。

通常把经度取作第二个坐标，经度是用本初经线（对地球来说本初经线就是格林威治经线）所在平面与 M 点的经线所在平面中

間的二面角 QPP_1M 来度量的。二面角 QPP_1M 对应于球面角 qPM 。經度用 λ ① 表示并且按时針的方向从 0° 到 360° 变化或者分为东西兩方面在 0° 和 180° 之間变化(东經和西經)。

假設 M 点有緯度 $\varphi_M = 46^\circ$ 和經度 $\lambda_M = 82^\circ$ ，則一般縮写为： $M(46^\circ; 82^\circ)$ 。

6) 水平坐标系

假設轉动球面使 A 点和天頂 Z 重合，則極綫 SHN 在水平面內(圖 7)。

球面上任一点 M 的位置在这种場合用下面两个坐标确定：第一个是天頂距——就是圓弧 ZM 或中心角 ZOM ，第二个是这样得到的，假設经过 Z 点 Z_1 点(底点)和 M 点作半圓，則第二个坐标就是方位角 NH (从 N 点——北——到 H 点的圓弧，此处 H 点是半圓 ZMZ_1 和水平綫 $NHSE$ 的交点)。

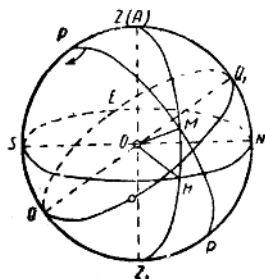


圖 7

方位角从 N 点(北)或 S 点(南)开始按照时針方向从 0° 变到 360° 。方位角用字母 A 或 α 表示。

有时第一个坐标不用天頂距而取 M 点的傾角 α ，傾角是用弧 HM 或中心角 HOM 度量并且确定 M 到水平綫的距离。同一个点的天頂距离和傾角之間存在一个关系式：

$$Z + \alpha = 90^\circ.$$

假設 M 点有天頂距 $Z_M = 60^\circ$ 和方位角 $\alpha_M = 30^\circ$ ，則縮写成这样： $M(60^\circ; 30^\circ)$ 。

① 在結晶学中經度用字母 φ 緯度用字母 ψ 極距用字母 ρ 来表示。

§ 4. 球在平面上的投影、制圖網

設 OM_0 為通過投射中心 O 和被投射點 M_0 的射綫，則投影平面 K 和 OM_0 的交點 M 叫做 M_0 在 K 上的投影(透視影)(圖 8)。

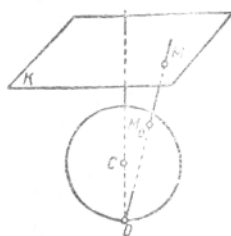


圖 8

假設投射中心在球面上，則投影叫做制圖投影(圖 9)。

坐標相同的點的軌迹叫做坐標曲綫。有一定經度的坐標曲綫叫做經綫，有一定緯度的坐標曲綫叫做緯綫。這兩種坐標曲綫的總體叫做

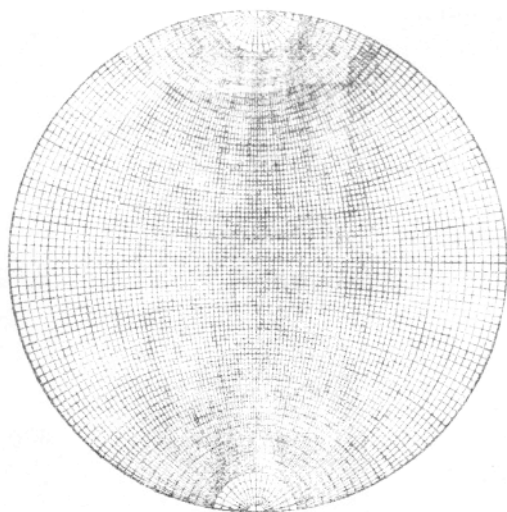


圖 9

球上的坐標網，而在已知投影中它們在平面上的像叫做制圖網。

設有从 O 点射出的光线照射在以 C 为中心的薄玻璃球上 (圖 10), 而这个球上画有在 M_0 点相交的經綫和緯綫。如果这个坐标

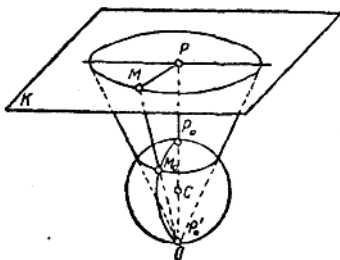


圖 10

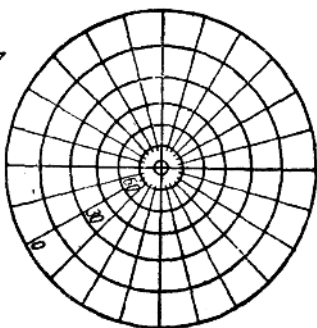


圖 11

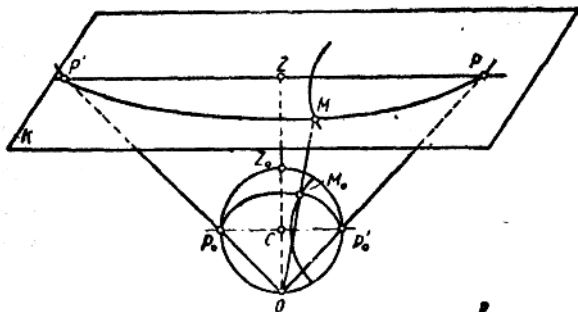


圖 12

系的軸 $P_0P'_0$ 正指着光綫, 則經綫在投影平面上的投影成为从 P 点 (軸 $P_0P'_0$ 的投影) 射出的射綫束, 而緯綫則投射成为以 P 为中心的同心圓。这样的網叫做規則網。圖 11 表示規則制圖網的一般形式。

假設球軸 $P_0P'_0$ 的位置和中心

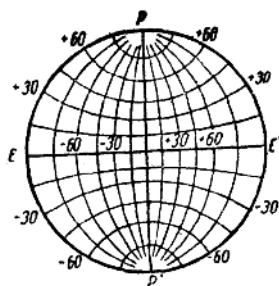


圖 13

射线 OZ 垂直 (圖 12), 則在球上得到橫断坐标系, 而在平面 K 上得到橫断或等距方位網, 在这上面無論經綫或緯綫都投射成为圓周。

赤道和中央經綫投射成为互相垂直的直綫。

圖 13 表示橫断制圖網的一般形狀。

还有第三种制圖網——斜制圖網——这是当球軸 $P_0P'_0$ 对中心光綫 OC 斜放着时得到的。

制圖網在球面三角中当解作圖問題时有很大的用处, 同时在天文学、測量学、結晶学等方面也有很大的用处。这种網保存無限小圖形的相似性, 并且仅有这种網具有这种性質, 就是把球上的任一圓周还投射成为圓周^①。

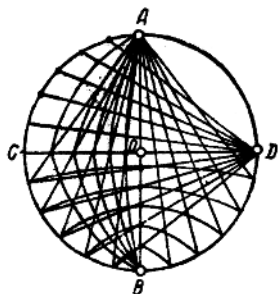


圖 14

用作圖的方法很容易得到制圖網。为此目的, 例如, 用 10 公分長的半徑作圓 (圖 14), 并且分圓周 $ACBD$ 为 24 部分。把得到的点和 A, D 兩点用直綫連接起来。如此, 直徑 AB 和 CD 都被分成 12 部分。在互相垂直的直徑上得到一系列的点, 我們依次通过每这样三个点作圓弧, 即三个点中有兩個在圓周上

一个在直徑上。結果我們得到的圓弧就是在橫断制圖投影中經綫和緯綫的像。

两个直徑的交点 O 乃是網的極点。

在圖 9 上弧中間的間隔是 2° 。为了構造網时圓周的作圖最好用特別柔軟的金屬尺, 例如, 偉大的俄罗斯学者——結晶学家 E. C. 非达罗維所制的尺。

^① 橫断制圖網这个性質的証明牽涉很遠, 在制圖教程“高等測量学”中可以見到。