信号与图像的稀疏分解及初步应用

王建英　尹忠科　张春梅　著

西南交通大学出版社
·成　都·

序　言

在信号处理和图像处理中，对信号和图像的表示方式的研究是一个根本性的问题，关系到信号处理与图像处理的多个方面。用尽可能简洁的方式表示信号或图像，将为信号或图像的处理带来很大的方便。信号与图像的稀疏表示就是力求得到信号与图像的一种最简洁的表示方式，而得到信号或图像稀疏表示方式的过程，就是信号或图像的稀疏分解。

近年来，信号和图像的稀疏表示与稀疏分解，在信号处理和图像处理的某些方面已经获得了很好的应用效果，引起了信号处理与图像处理国际学术界的广泛关注，如近年来国际图像处理年会（IEEE ICIP）对此方面的研究每年均进行专题讨论，著名刊物《Signal Processing》也以专刊的形式予以报道。而国内此方面研究起步比较晚，报道比较少。因此，作为前期研究成果的总结，作者写作此书，抛砖引玉，以引起国内研究人员对此方面研究的关注，进而推动、促进此项研究在国内的开展。

本书第 1 章简单介绍在信号与图像稀疏分解中常用的基础知识，即信号空间理论，这一章是本书的基础。第 2 章总结目前信号与图像稀疏分解的研究现状，并结合信号与图像稀疏分解的 MP 和 BP 算法，分析了稀疏分解中常见的研究问题和存在的研究难题。第 3 章分析信号与图像稀疏分解中最常用的一种算法（MP 算法）以及该算法常用的实现方法和存在的问题。第 4、第 5 两章介绍信号的稀疏分解快速算法及在信号处理中的应用。第 6、第 7 和第 8 章分别介绍图像稀疏分解快速算法及在图像处理中的应用研究。其中快速算法主要是根据过完备原子库的结构特性、原子的能量特性和稀疏分解过程的特性而提出的。在应用研究中，主要介绍了稀疏分解在图像去噪和压缩编码中的应用。特别是在图像压缩中的应用，是值得读者重点关注的，这是因为基于稀疏分解的图像压缩编码表现出了良好的视觉特性和巨大的压缩潜力，很可能成为未来图像低比特率压缩的标准。

本书作者近年来专心从事信号与图像的稀疏分解及应用的研究。三位作者均受到国家留学基金委员会的资助，到国外学习研究信号与图像的稀疏分解。此外，关于此方面的研究，王建英同志先后获得了四川省应用基础研究项目和重点科技攻关项目资助，尹忠科同志获得了教育部留学回国人员科研启动基金资助，张春梅同志获得了国家民族事务委员会的资助。作为科研成果的总结，

在重要学术期刊上已经发表论文（含正式录用论文）30余篇。本书就是结合三位作者的研究成果而编著的。

阅读本书的读者需要具有“信号分析”、“数字信号处理”、“高等代数”等方面的基础。另外，如果要学习研究图像稀疏分解，还需要有“数字图像处理”的基础。但阅读本书并不要求读者学习过“信号空间理论”，有关信号空间分析的内容在本书中将结合第一章内容自成体系。当然，熟悉信号空间理论，将更有利于读者学习。本书适合于从事信号与信息处理、图像处理与压缩编码的科研工作人员和研究生学习、研究中使用。

作　者

2006年4月

目　录

第 1 章　信号空间理论基础

在数字信号处理、数字图像处理等课程中，所研究的信号或图像通常是用低维简单空间中的复杂点集来表示。例如，通常表示一维信号用 $s(t)$，即信号幅度 s 是某一自变量 t 的函数；这样表示信号时，信号是二维空间中的点集 $\{(t,s)\}$。通常表示一幅图像用 $f(x,y)$，图像灰度 f 是图像行 x 和列 y 的二维函数；这样表示图像时，图像是三维空间中的点集 $\{(x,y,f)\}$。用低维简单空间中的复杂点集来表示信号或图像，形象直观，易于理解。但是用低维简单空间的复杂点集表示信号或图像，不利于采用现代分析数学的工具来研究信号或图像。为了充分利用现代分析数学的工具来研究信号或图像，把数学方面的新研究成果引入到信号或图像处理中，必须把信号或图像看成是高维复杂空间中的一个简单的点。为了便于读者理解信号或图像作为高维复杂空间中的点的表示方法，本书的第 1 章介绍信号与图像的空间理论，在此基础上讨论信号分解问题。这部分是全书的基础，内容可参考本章参考资料[1]。熟悉信号与图像空间理论的读者，可以直接阅读第 2 章的内容。

1.1　信号集及其映射

1.1.1　引　言

在研究信号空间之前，我们先把任一特定的信号看作是信号集中的一个元素。这样，便可容易地形成把信号看作是信号空间中的一个点的概念。

在日常生活中常用到集合的概念，如多面体的面的集合、教室里听众的集合、直线上点的集合、自然数的集合……作为数学领域的集合概念，是数学上最广泛和最基本的概念，不能直接给出定义，只能用公理法展开。我们这里只能依赖我们的直观来描述这一概念。按照 Cantor 的说法，集合是由"确定的、

各别的对象 m 组成一个整体（记为 M），而这些对象是我们感觉到的或我们想象到的”。用来形成集合的对象称为该集合的元素或元。因此，集合可以理解为“元素的汇合”、“元素的总体”，等等。显然，这些说法只不过是集合的同义语而已。

一般说来，用大写字母 A、B、C、S、…表示集合，用小写字母 a、b、c、x、…表示集合的元素。我们可以用两种方式表示一个集合的元素是什么。如果一个集合的元素不多，可以直接列出它的全部元素。例如，7 到 9 的自然数集可表示为 $A=\{7,8,9\}$。如果集合的元素很多，我们可以用写出集合全体元素都满足的共同性质的办法来表示集合。例如，上例中的集合可表示为 $A=\{x;\ x$ 是大于 6 小于 10 的整数$\}$。用这个办法来表示信号集 $S_p=\{x;p\}$，就意味着 S_p 是所有具有特性 p 的信号 x 的集合。

某元是一个集合的元素可以写作形如 $8\in A$ 的形式；读作“8 是集合 A 的元素”或“8 属于 A”。如果一个元素不属于该集合，可以记为形如 $6\notin A$ 的形式，读作“6 不属于 A”，或“6 不是 A 的元素”。

如果对于每一个 $x\in A$ 都有 $x\in B$，则称集合 A 是集合 B 的子集，或称 B 包含 A，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。例如，整数集便是实数集的一个子集。若 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 均成立，则集合 A 与 B 的元素完全相同，记为 $A=B$。如果 $A\subseteq B$，但 $A\neq B$，即 B 里至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A\subset B$。

不包含任何元素的集合叫空集，记为 $\varnothing$。例如，考察方程式根的集合，如果该方程无根，则其根的集合为空集。注意，空集 $\varnothing$ 与数 0 是完全不同的。0 是一个元素，如方程式唯一的根是 0，此时根的集合不是空集。显然，任何集合包含空集 $\varnothing$ 作为其子集。在信号理论中，常遇到零信号 $\{0\}=\{x;x(t)=0,t\in\mathbf{R}\}$，零信号是信号集中的一个元素，与空集的概念完全不同。

有了上述关于集合的基本概念，就很容易地了解任一信号不过是特定信号集中的一个元素，而最常用的信号集如下节所述。

1.1.2 常用的信号集

（1）矩形信号集 S_τ

矩形信号集 S_τ 可表示为

$$S_\tau=\left\{x;\ x(t)=A\prod\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right),\ \ t_0\in\mathbf{R};\ \ A,\tau>0\right\} \tag{1.1}$$

式中 $$\prod(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1/2\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{1.2}$$

显然，A 为矩形信号幅度，τ 为信号持续期，t_0 为矩形信号中心位置。给定 A、τ、t_0 值，则得到矩形信号集中的一个元素。矩形信号的傅里叶变换为

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t=A\int_{t_0-\frac{\tau}{2}}^{t_0+\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t=A\tau\cdot\mathrm{sinc}(f\tau)\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft_0} \tag{1.3}$$

式中，sinc 函数定义为

$$\mathrm{sinc}(z)=\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \tag{1.4}$$

（2）正弦信号集 S_c

正弦信号集 S_c 可表示为

$$S_c=\left\{x;x(t)=\mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{j}(2\pi ft+\theta)}],\quad \alpha,\theta,f\in\mathbf{R}\right\} \tag{1.5}$$

式中，e^{α}、f、θ 分别表示正弦信号的幅度、频率和相位，显然正弦信号集 S_c 包含所有可能的幅度、频率和相位的正弦信号。

（3）对称信号集

对称信号集可分为偶对称信号集 S_{ev} 和奇对称信号集 S_{od}，并分别表示如下

$$S_{ev}=\{x;\ x(t)=x(-t),-\infty<t<\infty\} \tag{1.6}$$
$$S_{od}=\{x;\ x(t)=-x(-t),-\infty<t<\infty\} \tag{1.7}$$

偶对称信号的傅里叶变换只有实部，即

$$\mathrm{Im}\,X_{ev}(f)=0 \tag{1.8}$$

而奇对称信号的傅里叶变换只有虚部，即

$$\mathrm{Re}\,X_{od}(f)=0 \tag{1.9}$$

（4）周期信号集 $S_p(T)$

周期信号集 $S_p(T)$ 是所有周期为 T 之信号的集合，它可表示为

$$S_p(T)=\left\{x;\ x(t+T)=x(t)\right\} \tag{1.10}$$

周期信号具有离散的傅里叶谱，可用傅里叶级数表示为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n\frac{t}{T}},\quad -\infty<t<\infty \tag{1.11}$$

式中

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n\frac{t}{T}}\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

（5）幅度有界信号集 $S_m(K)$

幅度有界信号集 $S_m(K)$ 表示信号幅度的瞬时值总不大于某一正实数 K 之信号集合，它可表示为

$$S_m(K) = \left\{x; \left|x(t)\right| \leqslant K,\ K > 0\right\} \tag{1.13}$$

显然，如果 $K_2 \geqslant K_1$，则

$$x \in S_m(K_1) \Rightarrow x \in S_m(K_2)$$

（6）能量有限信号集 $S_e(K)$

能量有限信号集 $S_e(K)$ 可表示为

$$S_e(K) = \left\{x; \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\mathrm{d}t \leqslant K\right\} \tag{1.14}$$

能量有限信号又称为平方可积信号。

（7）时限信号集 $S_d(T)$

时限信号集表示在区间 $-T \leqslant t \leqslant T$ 之外信号为零的所有信号的集合，其数学表达式为

$$S_d(T) = \left\{x; x(t) = 0,\ \left|t\right| > T\right\} \tag{1.15}$$

显然，如 $T_2 \geqslant T_1$，则

$$x \in S_d(T_1) \Rightarrow x \in S_d(T_2)$$

（8）带限信号集 $S_b(B)$

带限信号集 $S_b(B)$ 表示信号频谱在区间 $[-B,\ B]$ 之外为零的所有信号的集合，其数学表达式为

$$S_b(B) = \left\{x; X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t}\mathrm{d}t = 0,\ \ \left|f\right| > B\right\} \tag{1.16}$$

（9）时域离散信号集 $S_s(\tau)$

时域离散信号集 $S_s(\tau)$ 表示采样周期为 τ 的所有时域离散信号的集合，其数学表达式为

$$S_s(\tau)=\begin{cases} x(t)=x(n\tau)=x(n); & t=n\tau, n\in I \\ \text{无定义}; & t\neq n\tau \end{cases} \tag{1.17}$$

1.1.3 信号集的运算

信号集的运算是指已知若干信号集，通过运算得到新的信号集。集的基本运算有三种。

第一种运算是集合的并，定义为

$$A\bigcup B=\{x; x\in A \text{ 或 } x\in B\} \tag{1.18}$$

并集 $A\bigcup B$ 由属于集合 A 或属于集合 B 的一切元素组成。

第二种运算是集合的交，定义为

$$A\bigcap B=\{x; x\in A \text{ 与 } x\in B\} \tag{1.19}$$

交集 $A\bigcap B$ 由既属于集合 A 又属于集合 B 的一切元素组成。例如，A 表示偶数集，B 表示能被 3 整除的数集，则 $A\bigcup B$ 为被 2 或被 3 整除的一切整数的集合，而 $A\bigcap B$ 为被 6 整除的一切整数的集合。

集合的并与交运算有交换律、结合律以及分配律。交换律即

$$A\bigcup B=B\bigcup A$$
$$A\bigcap B=B\bigcap A$$

结合律即

$$(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$$
$$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C)$$

分配律即

$$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$$
$$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$$

第三种集合的运算是集合的差，定义为

$$S=A-B=\{x; x\in A \text{且} x\notin B\} \tag{1.20}$$

差集 $A-B$ 是由属于集合 A 但不属于集合 B 的一切元素构成的集合。例如，A 是整数集，B 是奇数集，则 $A-B$ 表示偶数集。

在研究集合（包括信号集）时，采用集合之间的关系图，即 Euler-Venn 图是有帮助的。通常将基础集合画成一个大的矩形，用 U 表示，而把所讨论的集合画在矩形内。图 1.1 给出了并集、交集和差集的 Euler-Venn 图。

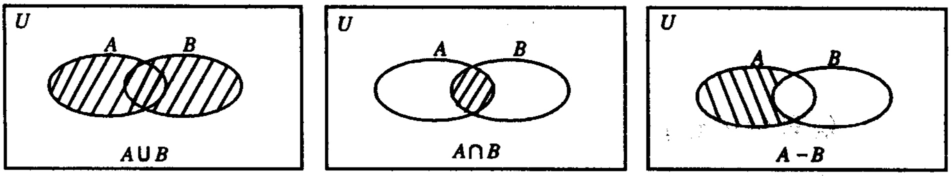

图 1.1　两集合的并集、交集和差集的 Euler-Venn 图

下面举出两个信号集运算的例子。

例 1.1　已知信号集 S_a 为

$$S_a = \{x_n(t); n = 1,2,3,\cdots\} \tag{1.21}$$

式中
$$x_n(t) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-nt}, & t \geqslant 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

试求 $S = S_a \cap S_m(12) \cap S_e(3)$。

由式（1.21）有 $\max|x_n(t)| = n$，且 $\int_{-\infty}^{\infty} x_n^2(t)\mathrm{d}t = \dfrac{n}{2}$，显然，因 $S_m(12)$ 要求 $n \leqslant 12$，$S_e(3)$ 要求 $\dfrac{n}{2} \leqslant 3$，故有 $n \leqslant 6$，则

$$S = \{x_n(t); n = 1,2,\cdots,6\}$$

例 1.2　众所周知，一个非零的信号不可能既是带限的又是时限的。这是因为，时限信号的傅里叶变换为 $\int_{-T}^{T} x(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi ft}\mathrm{d}t$，它只能在一些 f 的孤立点上为零，除非当 $|t| \leqslant T$ 时，$x(t) = 0$。也就是说，只有当 $|t| \leqslant T$ 时，$x(t) = 0$，才可能使上述积分在一个 f 的区间上为零，因此，时限信号中只有零信号才是带限的，即

$$S_d(T) \cap S_b(B) = \{0\} = \{x; x(t) = 0, t \in \mathbf{R}\} \tag{1.22}$$

1.1.4　信号集的划分与等价关系

为便于掌握一个信号集，常常需要把信号集划分成一些互不相交的子集，如图 1.2 所示。

从数学上讲，把集合 S 划分为 $\{S_1, S_2, \cdots\}$，可表示为

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \tag{1.23a}$$

和

$$S_i \cap S_j = \varnothing, \quad i \neq j \tag{1.23b}$$

例如，在人口统计中，按出生年把成都市的居民进行编组，即得出居民集合中一系列互不相交的子集，以便掌握人口的年龄结构。又如，三维空间点的集合，可以划分为不同半径的球面组成的子集。总之，集合划分的目的是为了便于处理集内的元素，也是为了产生一系列便于处理的信号子集。例如，通常一个信号集内包含了不可数无限多个元素，如果我们把这个集合划分成可数个，甚至有限个子集，则处理这些信号就方便得多。下面我们将给出一些在工程中常用的划分信号集的例子。

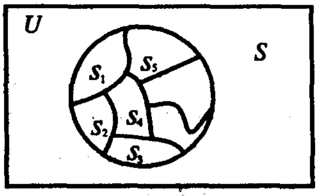

图 1.2 信号集的划分

为了给出集合 M 的一个划分，其规则不可能是任意的。通常，一个划分是由集内元素的等价关系产生的。两个元素 a、b 等价记为 $a \sim b$，必须要下述三个公设成立：

$$\left.\begin{array}{ll} ① \text{ 自反性：} & a \sim a;\ a \in M \\ ② \text{ 对称性：} & a \sim b \Rightarrow b \sim a;\ a,b \in M \\ ③ \text{ 传递性：} & a \sim b \text{ 和 } b \sim c \Rightarrow a \sim c;\ a,b,c \in M \end{array}\right\} \tag{1.24}$$

例如，在实数集合中不能定义 $b > a$ 作为 $b \sim a$。因为 $a \not> a$，故 $a \sim a$ 不成立，无自反性。同时，$b > a \Rightarrow a \not> b$，$a \sim b$ 不成立，无对称性。因此，用 $b > a$ 作为等价关系是不成立的，也不能形成一种划分。又如，是否能把成都市的居民按互相认识作为等价关系？a 认识 a，意味着 a 认识 a，a 认识 b 意味着 b 认识 a，所以有自反性和对称性。但如 a、b 互相认识，b、c 互相认识，并不意味着 a、c 互相认识，无传递性，故不能用互相认识作为等价关系，因而也不能形成一种划分。

不难证明，满足式（1.23）的任何一个划分产生一个等价关系，反之，满足式（1.24）的任何一个等价关系产生一个划分。因此，一个划分就是把集合 S 分解为互不相交的等价子集，其中每一个等价子集可表示为

$$S_x = \{y; y \sim x\} \tag{1.25}$$

也就是说，一种划分的每个子集内各元素等价，反之，等价元素组成的集合为一种划分的一个子集。

划分和等价关系在信号理论中有着广泛的用途，下面是一些十分有用而且有趣的例子。

例 1.3 在数论中，通常把整数集合 $\{n; n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 划分为有限个（m 个）等价集：

$$S_i = \{n; n = pm + i\},\ i = 0,1,2,\cdots,m-1 \tag{1.26}$$

式中，p 为任意整数。此时，等价关系就是模 m 同余，即 $n_1 \sim n_2 \Rightarrow n_1 - n_2 = pm \Rightarrow n_1 = n_2$（模 m）。例如，模 2 同余把整数集划分为奇数和偶数两个等价子集，而模 3 同余把整数集划分为与 0、1、2 三个数同余的三个子集，后者如图 1.3 所示。

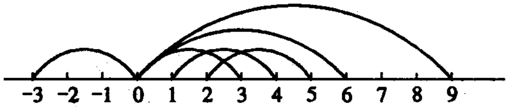

图 1.3　模 3 同余的等价关系示意图

例 1.4　对于信号集 S，我们可以建立等价关系 $x(t_0)\cdot y(t_0) > 0 \Rightarrow x \sim y$，即 $x(t)$ 与 $y(t)$ 在 t_0 时刻同号，则认为 x、y 等价。按此等价关系，可把信号集 S 划分为如下两个等价集：

$$\left.\begin{aligned} S_+ &= \{x; x(t_0) > 0\} \\ S_- &= \{x; x(t_0) < 0\} \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

上述划分排除了 $x(t_0) = 0$ 的情况，因为 $x(t_0)$ 恰好为零的概率极小。如果把 $x(t_0) = 0$ 的情况考虑在内，则可把它附加在 S_+ 或 S_- 的等价集内，此时，式(1.27)可改写为如下形式：

$$\left.\begin{aligned} S_+ &= \{x; x(t_0) \geqslant 0\} \\ S_- &= \{x; x(t_0) < 0\} \end{aligned}\right\} \tag{1.28}$$

这种划分广泛地应用于二进制数据传输系统，此时，S_+ 集合中所有信号看作是由发射端的 $x_1(t)$ 信号产生，而 S_- 集合中所有信号看作是由发射端的 $x_2(t)$ 信号产生。图 1.4 给出了这种系统的典型框图。

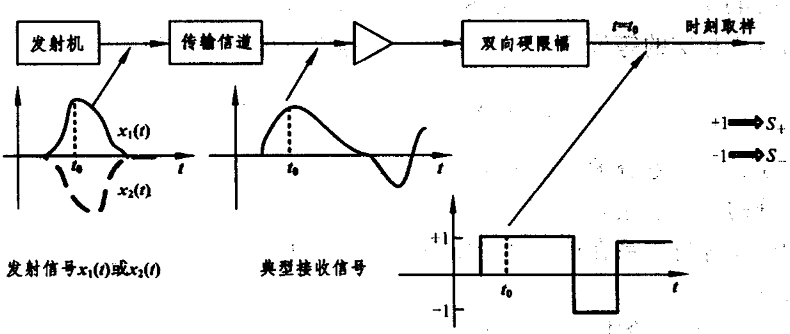

图 1.4　二进制数据传输系统

从图 1.4 可看出，虽然发射机仅可能发射两种信号 x_1 或 x_2，但由于信道对信号的畸变及各种干扰的影响，在接收机输入端的信号是不可预计的，有无限多种可能的波形。信号处理系统就是对这些接收波形进行划分，从而推测发射波形是 x_1 或 x_2。如果接收信号是属于集合 S_+，则判决发射端信号为 x_1；反之，如果接收信号是属于集合 S_-，则判决发射端信号为 x_2。显然，这种判决会出现错误，如何选择判决准则和计算其错误概率，那是检测理论所要解决的问题。这里我们要指出的是，像“检测”这样的信号处理问题，本质上就是对接收信号集进行一种特定的划分。

例 1.5 一种抗干扰性能较好的二进制数据传输系统是采用相关接收机把接收信号划分为两个子集 S_1 和 S_2。同上例一样，接收信号 $y(t)$ 属于 S_1 或 S_2 表明对发射端信号为 x_1 或 x_2 的判决。此时，集合 S_1 和 S_2 可写为：

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \left\{y;\ \int_0^T y(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \leqslant K\right\} \\ S_2 &= \left\{y;\ \int_0^T y(t)\varphi(t)\mathrm{d}t < K\right\} \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

式中，$\varphi(t)$ 为参考信号，K 为某一预置门限。完成式（1.29）的运算设备可由一乘法器、积分器、取样器和门限设备构成，如图 1.5 所示。

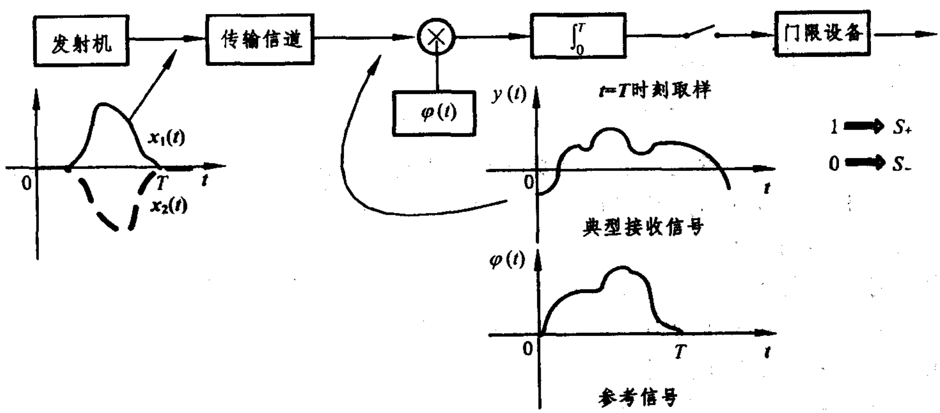

图 1.5 使用相关接收机的二进制数据通信系统

显然，这个系统本质上是对接收信号进行相关运算，并与一门限进行比较，从而把接收信号集划分为两个子集，以便判决发射信号是 x_1 或 x_2。有关最佳地选择 $\varphi(t)$ 和 K 的问题是信号检测理论的重要课题。这里只需说明，如果选择 $\varphi(t) = x(T-t)$，相关接收就完全与匹配滤波接收等效。

例 1.6 如果我们事先给出一个函数集$\{\varphi_i; i=1,2,\cdots,n\}$，今后将会看到，这个函数集内的元素通常是线性无关的，则我们可定义函数 x、y 的等价关系为

$$x \sim y \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\varphi_i(t)\,\mathrm{d}t, \quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.30}$$

显然，式（1.30）可以改写为

$$x \sim y \Rightarrow x-y \in M \Rightarrow x = y(\operatorname{mod} M) \tag{1.31}$$

式中，M 定义为一个函数子集

$$M = \left\{z; \int_{-\infty}^{\infty} z(t)\varphi_i(t)\mathrm{d}t = 0, \quad i=1,\ 2\cdots,n\right\} \tag{1.32}$$

即 M 中的元素 $z(t)$ 和 $\varphi_i(t)$ 乘积之积分均为零，后面一章的分析中将会看到，这是指 $z(t)$ 和 $\varphi_i(t)$ 正交。在式（1.31）中，我们实质上已定义 $x-y\in M$ 为 x、y 模 M 广义同余，因为式（1.31）在形式上与例 1.3 中 $n_1-n_2=pm \Rightarrow n_1=n_2$（模 m）完全一致。

按式（1.30）形成的每个等价子集中，可以挑选出一个典型元素 $\hat{x}$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \tag{1.33}$$

则每个等价子集可表示为

$$S_{\hat{x}} = \{x; x \sim \hat{x}\} = \{x; x = \hat{x} + z, z \in M\} \tag{1.34}$$

这个表示法的重大意义在于，只要选定的集合$\{\varphi_i\}$满足一定条件，则可在等价子集 $S_{\hat{x}}$ 和一个 n 元有序数组$\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$之间建立一一对应关系，因而每个等价子集 $S_{\hat{x}}$ 可以看作 n 维向量空间中的一个点。注意，这里 n 元有序数组是指 n 个有序的数的集合，今后简称为 n 维数组。当然，要完全解决这个问题，必须进一步学习信号空间理论中一系列其他基本概念，但这里至少可看出，这种等价集的表示法，可以让我们更方便地表示和处理信号。

应当指出，等价关系是一种特殊的关系，即满足式（1.24）所列的三个公设关系。一般的，在集合 A 上的关系，可定义为序偶$\{a, b\}$所形成的一个集合，此处，$a\in A$，$b\in A$，一般常用 R 表示关系，用 aRb 表示序偶$\{a, b\}$是关系集合的元素。注意，这里序偶是指一对有序的元素。用这个观点来解释等价关系，则意味着 xRx（自反性），$xRy \Rightarrow yRx$（对称性），xRy 和 $yRz \Rightarrow xRz$。

还应说明，如果两个集合的元素之间可以建立一一对应关系，则称它们互相等势。如果一个集合的某个子集与正整数集等势，则称这个集合是无限集。

如果一个集合本身与正整数集等势，则称之为可数无限集。不是无限的集合称为有限的。有限集与可数无限集统称为可数的。不是可数的集合称为不可数无限集。我们前面所讨论的信号集，大多数是不可数无限集。

1.1.5 信号集的映射

1.1.4 节我们用等价关系和划分来表征一个信号集中元素的特征，本节我们将用元素间更一般的关系形式，即映射来表征信号。映射是函数概念的拓展。在数学分析里，函数关系是这样的，即设 A、B 为实数集合 $\mathbf{R}$ 中的两个子集，如果对每一个元素 $x \in A$，有一个确定的 $y = f(x)$，$y \in B$ 与之对应，则在集 A 上定义了一个函数 f，A 为函数的定义域，B 为函数取值的集合，叫函数的值域。但是，信号集的元素并不一定是一个实数，它可能是一个实数序列（时域离散信号），也可能信号本身就是一个时间函数（时域连续信号）。把函数的概念推广到一般的集合，就是一个集合的元素到另一个集合的元素的映射。从数学上讲，设 A、B 为两个非空集，如果存在一个规则 f，使 A 中任一元素 x，在规则 f 下，确定 B 里的一个元素 y 与之对应，即 $f\colon\ A \to B$，则称此规则为映射。映射也可以记为

$$y = f(x);\ x \in A \text{ 和 } y \in B \tag{1.35}$$

并称元素 y 为元素 x（在映射 f 下）的象，称集 A 为映射 f 的定义域，所有元素 x 的象 y 的全体记为 $B'(B' \subseteq B)$，称之为映射 f 的值域。如果 $B' = B$，则称 f 为 A 到 B 上的映射。若 $B' \subseteq B$，则称 f 为 A 到 B 中的映射。

注意，映射总是单值的，即 A 中的每一个 x，只有唯一的一个象 y 与之对应。但反过来，并不要求所有 x 一定对应于不同的 y。如果可能有多个 x 的象为同一个元素 y，则称映射是多对一的。如果集 A 到集 B 的映射 f 为一对一的映射，即集 A 与集 B 中的元素存在着一一对应关系，则可以定义 f 的逆映射 $f^{-1}\colon\ B \to A$。

映射是数学中的基本概念之一，例如，实变函数是实数集到实数集的映射，积分可以看作是可积函数集到数集上的映射，求导可以看成是可导函数集到函数集的映射。广义来说，任何一种运算也可以看成是一种映射。信号处理系统就是对信号进行某些运算，因此信号处理系统的任何一个环节，都可以看成是一种信号集到信号集的映射。例如，采样过程是时域连续信号集到时域离散信号集的映射；幅度量化过程就是实数集到有限状态集的映射；前面所述相关接收机是输入信号集到相关系数（实数集）的映射。总之，任何一个信号处理系统可以看成如图 1.6 所示的系统，其输入为 $x \in X$，输出为 $y \in Y$，则它们可以

表示为一种映射 f: $X \to Y$。应当指出，图 1.6 中集合 X 和 Y，可以是时域连续信号集，也可以是时域离散信号集或者有限状态的码组，因此，它的应用是十分广泛的。

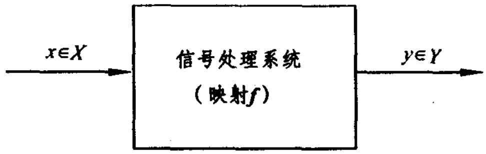

图 1.6　信号处理系统

一个信号处理系统可能包括两个或多个子系统，此时，用复合映射的观点来分析系统是十分方便的，如图 1.7 所示。显然映射 f: $X \to Z$ 是由两个映射 f_1: $X \to Y$ 和 f_2: $Y \to Z$ 复合而形成，可记为 $f = f_2 f_1$，它表示

$$f:\ X \to Z \Rightarrow z = f_2(y) = f_2[f_1(x)] = f(x)\ ,\ x \in X \tag{1.36}$$

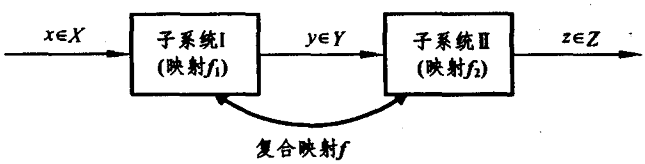

图 1.7　复合系统看作复合映射

为了进一步说明复合映射概念在信号处理中的应用，我们回到例 1.5 所讨论的使用相关接收机的二进制数据通讯系统。此时图 1.7 中的子系统 Ⅰ 完成相关运算，即 f_1 为输入信号集 Y 到数集 $\mathbf{R}$ 的映射：

$$f_1:\ Y \to \mathbf{R} \tag{1.37}$$

式中
$$Y = \{y; y(t), t \in \mathbf{R}\}$$

$$R = \left\{r; r = \int_0^T y(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right\}$$

而 f_2 即子系统 Ⅱ 完成的映射，为集合 $\mathbf{R}$ 到集合{+1，0}的映射：

$$f_2:\ R \to \{+1, 0\} \tag{1.38}$$

式中

$$f_2(r) = \begin{cases} 1, & r \geqslant K \\ 0, & r < K \end{cases}$$