

高等学校水利类教材

环境水力学



李大美 黄克中 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

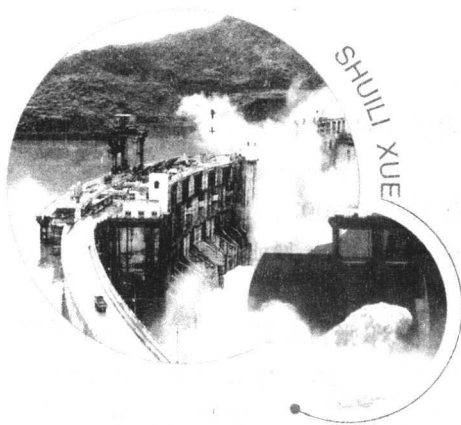
武汉大学出版社

X52
12
2007

高等学校水利类教材

环境水力学

■ 李大美 黄克中 编著



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

环境水力学/李大美,黄克中编著. —武汉:武汉大学出版社,2007.3
高等学校水利类教材
ISBN 978-7-307-05468-4

I. 环… II. ①李… ②黄… III. 环境水力学—高等学校—教材
IV. X52

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 031729 号

责任编辑:李汉保 责任校对:刘欣 版式设计:支笛

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)
(电子邮件:wdp4@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北鄂东印务有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:15.25 字数:364千字

版次:2007年3月第1版 2007年3月第1次印刷

ISBN 978-7-307-05468-4/X·20 定价:22.00元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

内 容 简 介

环境水力学是一门新兴学科,是水力学的延伸与发展。随着工农业生产的发展、人口膨胀和水污染日益严重,水环境引起人类社会的广泛关注,也促使环境水力学有了较大的发展。其研究内容不断丰富,研究体系日臻完善。本书系统地介绍了环境水力学理论,全书共分七章及三个附录,第一章绪论,第二章分子扩散,第三章随流扩散和紊动扩散,第四章剪切流动的分散,第五章河流中的混合,第六章河口及海湾中的混合,第七章污水浮力射流。

本书可以作为环境、水利、土木、动力机械等专业的本科生和研究生的教材,也可以用做相关专业的教师和工程技术人员的参考书。

前 言

环境水力学是一门新兴学科,是水力学的延伸与拓展。主要研究污染物质在水体中的扩散输移规律。环境水力学的研究成果将为水环境评价、预测预报以及环境规划、治理提供科学依据。自泰勒 1921 年提出紊动扩散以来,环境水力学经历了一段缓慢的发展过程。进入 20 世纪 60 年代以来,随着工农业生产的发展、人口膨胀和水污染日益严重,水环境引起人类社会的广泛关注,也促使环境水力学有了较大的发展。其研究内容不断丰富,研究体系日臻完善。

一个新兴学科的产生和形成是与人类历史发展密切相关的。过去人类一直从地球上自由地索取各种物资,似乎地球上的资源是“取之不尽”的;同时又自由地向周围环境抛弃各种使用后的废弃物,似乎地球的环境容量是“无穷大”的。直到 19 世纪末,英国伦敦发生燃煤烟雾事件,致使上千人死亡,才对人类敲起了警钟。20 世纪初,各资本主义国家工业加速发展,更加剧了环境问题的严峻形势。地球资源及环境容量的有限性不仅越来越受到人类社会的关注,而且直接关系到人类的生存与发展。

水是生命之源,是人类生存和各项活动的基本物质,也是不可替代的自然资源,水的供给与需求成为当今一个世界性的问题。世界各大洲陆地年径流总量(包括南极冰川径流在内)为 468 000 亿 m^3 ,按 1985 年人口计,人均径流量是 9 000 m^3 。

我国的水资源总量 28 124 亿 m^3 ,仅次于巴西、俄罗斯、加拿大、美国和印度尼西亚,居世界第 6 位,但按人口计,年人均水资源只有约 2 400 m^3 ,只相当于世界人均径流量的 1/4,在世界排到第 100 位以后,被列为世界上 12 个贫水国家之一。同时,由于水资源分布的不均衡,北方地区,土地、耕地面积占全国的近 2/3,人口占全国的 46%,而径流量只占全国的 12%,尤其是海河流域,人口、耕地均占全国的 10% 以上,而多年平均地表径流量只有 246 亿 m^3 ,按 1990 年人口计,人均地表径流量仅 250 m^3 ,仅约相当于全国人均水资源量的 1/10,因此水资源供需矛盾十分突出。

随着经济发展、人口的增加和用水量迅速增长,到 20 世纪 80 年代初,全国城市总用水量已达到 700 亿 m^3 ,约为中华人民共和国成立初期的 4.7 倍,许多地区水资源供不应求。1979 年全国已有 154 座城市缺水,到 1984 年缺水城市为 188 个。目前全国有 200 多个城市缺水,日缺水量 1 000 万 m^3 。一些缺水城市,每到干旱季节自来水便定时定量供水,有些城市遇枯水年自来水公司竟数日无水可供,给群众生活造成极大困难,使工农业生产造成严重损失。在山区还有 5 000 万人畜饮水问题没有得到解决。

水资源的过度开发利用,随之而来的是河川断流,湖淀干涸。素有中华民族摇篮之称的黄河,近年来每到灌溉季节也要断流,且断流时间不断提前,不断加长。黄河首次断流是 1972 年,在 1972 ~ 1997 年的 26 年中有 19 年出现断流。断流次数、历时、河长不断增加。

在水资源量日趋短缺的同时,水污染问题也日趋严重。随着工农业发展和人们生活用

水量的增加,工业废水和生活污水排放量急剧增加,未经处理的污水任意排放,污染了水源,又进一步造成了水资源短缺。据相关资料统计,全世界每年排放的污水约 4 600 亿 m^3 ,使 55 000 亿 m^3 的水体受到污染,约占全球径流的 14%,全世界河流稳定径流量的 40% 左右已受到不同程度的污染。

我国的水污染问题极为严重。20 世纪 70 年代初全国日排放污水量已超过 1 亿 m^3 ,其中 80% 以上是未经任何处理直接排入水域的,使河流、湖泊、水库遭受到不同程度的污染。根据对 532 条河流的监测,有 426 条河流受到不同程度的污染。我国七大江河流经的 15 个主要城市河段中,有 13 个河段水质污染严重。据相关部门统计,每年水污染造成的直接经济损失超过 434 亿元。

淮河流域自 1979 年以来,共发生水污染事故 160 多起,其中特大的就有 6 起,使淮河上游一半支流的河水完全丧失了利用价值。据淮河水利委员会监测,淮河超 V 类(废水,不能用于灌溉)水质的河段已占 78.1%。

海河流域在七大江河中水资源最为紧缺,水的自净能力差,因而污染问题更加严重。1990 年河北省对其境内的河流设 228 个断面进行了监测,控制河长 8 227km,除 605km 河段全年干涸外,余下的 7 622km 河段中,只有 1 200km 山区河段水质较好,可用于饮用,其余均受不同程度污染,其中有 2 200km 河段的水质已不符合任何用水标准。

1995 年海河水利委员会水保局对流域内的各河系的主要河道进行了水质评价,除引滦专线和海河干流(大部分时间)未受到严重污染外,其余各河均在不同范围内受到严重污染,海河干流(在部分时间)也受到一定程度污染,且污染面积为 100%,全流域严重污染(大于 V 类)的河长占总河道长度的 42.6%。

水资源短缺和水污染加剧越来越引起人们的关注,同时也促进了环境水力学的进一步发展。作为教材,旨在指导学生学习环境水力学基本理论和基本研究方法。本书由七章和三个附录组成,第一章,绪论;第二章,分子扩散;第三章,随流扩散和紊动扩散;第四章,剪切流动的分散;第五章,河流中的混合;第六章,河口及海湾中的混合;第七章,污水浮力射流。其中第一章~第四章由武汉大学李大美教授编写,第五章~第七章由中山大学黄克中教授编著。

本书可以作为环境、水利、土木、动力机械等专业的本科生和研究生的教材,也可以用做相关专业的教师和工程技术人员的参考书。由于作者水平所限,错误与疏漏在所难免,恳请读者批评指正。

作 者

2006 年 12 月于武汉大学

目 录

第一章 绪论	1
§ 1.1 环境水力学研究任务	1
§ 1.2 环境问题的几个基本概念	1
§ 1.3 环境水力学研究方法	4
习题	4
第二章 分子扩散	5
§ 2.1 分子扩散的非克定律	5
§ 2.2 一维扩散方程的基本解	7
§ 2.3 浓度分布的各阶矩	9
§ 2.4 若干定解条件下一维扩散方程的解析解	11
§ 2.5 有界水域中一维扩散方程的解	18
§ 2.6 二维和三维扩散方程的几种解答	20
§ 2.7 随机游动法	23
习题	25
第三章 随流扩散和紊动扩散	27
§ 3.1 随流扩散方程	27
§ 3.2 随流扩散方程的某些解析解	28
§ 3.3 紊流统计量和紊流尺度	37
§ 3.4 紊动扩散理论	43
§ 3.5 随流紊动扩散方程	48
§ 3.6 紊动扩散系数的确定	50
§ 3.7 随流紊动扩散方程的某些解析解	54
习题	57
第四章 剪切流动的分散	59
§ 4.1 一维纵向分散方程	59
§ 4.2 圆管均匀流的纵向分散	61
§ 4.3 明渠均匀流的纵向分散	65
§ 4.4 河流的纵向分散	68
§ 4.5 一维纵向分散方程的适用范围	75

§ 4.6	一维纵向分散方程的某些解析解	76
§ 4.7	二维分散	78
	习题	81
第五章	河流中的混合	84
§ 5.1	河流中的混合过程	84
§ 5.2	矩形河道均匀流污染带的计算	85
§ 5.3	不规则河道非均匀流污染带的计算(累积流量法)	93
§ 5.4	累积流量法污染带方程的解析解	99
§ 5.5	累积流量法污染带方程的数值解	101
§ 5.6	河流中非守恒物质污染带的计算	105
§ 5.7	初始段浓度场的动态数值解	108
§ 5.8	河道均匀流远区稳态浓度场的解析解	111
§ 5.9	河道均匀流远区浓度场的某些动态解析解	113
§ 5.10	河道恒定流远区浓度场的动态数值解	114
	习题	118
第六章	河口及海湾中的混合	120
§ 6.1	河口及海湾中的混合成因	120
§ 6.2	河口及海湾的紊动扩散系数和纵向分散系数	126
§ 6.3	河口一维纵向分散方程	128
§ 6.4	河口一维纵向稳态平均分散方程的解析解	130
§ 6.5	河口一维纵向分散方程的数值解	132
§ 6.6	海湾水平二维的非恒定流方程和浓度动态方程	134
§ 6.7	海湾水平二维非恒定流的数值解	138
§ 6.8	海湾水平二维浓度动态方程的数值解	145
§ 6.9	余流	149
§ 6.10	海上污染带的随流扩散	152
	习题	156
第七章	污水浮力射流	158
§ 7.1	一般概念	158
§ 7.2	纯射流	160
§ 7.3	羽流	165
§ 7.4	浮力射流的属性判别	169
§ 7.5	浮力射流守恒方程及其计算	171
§ 7.6	多孔扩散器浮力射流	183
§ 7.7	密度分层水体中的浮力射流	187
§ 7.8	横流中的圆形浮力射流	192

§ 7.9 横流和密度分层中的圆形浮力射流	201
§ 7.10 横流中的平面纯射流	204
§ 7.11 横流中的平面羽流	210
§ 7.12 横流和密度分层中的平面羽流	213
习题	217
附录 1 淡水和海水的密度	219
附录 2 误差函数	222
附录 3 拉普拉斯变换	226
参考文献	229

第一章 绪 论

§ 1.1 环境水力学研究任务

随着工农业生产的发展和人口迅速增长,人类活动向自然界排放的污染物越来越多,强度越来越大。如农药、化肥的广泛使用,大量工业、生活污水无节制地排放等。这些污染物随水流进入江、河、湖泊、水库、海湾或渗入地下,大片的地表水域和地下水受到污染,使我国原本紧缺的水资源日趋恶化。我国人口居世界第一,水资源概况总量仅为 2.8 万亿 m^3 ,其中地表水:2.7 万亿 m^3 ,地下水:1 000 亿 m^3 。按 2001 年人口计,世界人均水量:7342 m^3/p ,我国人均水量 2200 m^3/p ,仅为世界人均水量的 1/4。到 2003 年我国人均水量仅为 1760 m^3/p ,已接近缺水警戒线 1700 m^3/p 。加之时间分布和地区分布极不均衡,一般雨季降水量占全年水量的 70% 以上;长江以南地区土地面积仅为 38%,降水量却占 81%,长江以北地区降水量仅为 19%。水、旱灾害频频发生,更加剧了我国水环境问题的严重性和紧迫性。随着经济发展和生活水平的提高,人类对水资源的需求和对环境问题的关注也在与日俱增。保护和改善水域环境,实现经济社会的可持续发展,是我国人民面临的一项紧迫而艰巨的任务。

环境水力学是水力学的一个分支,也是环境科学的组成部分。主要研究污染物在水体中的扩散、输移规律及其在各种水环境问题中的应用。环境水力学的研究成果可以为水域保护,水质预报,水环境评价、规划、治理,以及水资源开发、利用提供科学依据。

环境水力学是一门新兴学科,自 1921 年泰勒(G. I. Taylor)首次提出水流的紊动扩散理论,至今不过 80 余年历史。其间经历了一段缓慢的发展阶段,直至 20 世纪 60 年代后期才开始有了较大的发展。目前环境水力学的内容还在不断的丰富和更新之中。

§ 1.2 环境问题的几个基本概念

1.2.1 水域中的污染物

影响水环境的污染物质有 150 多种。按其性质及污染特性可以归纳为如下八类:

1. 无毒有机物:主要来自轻工业污水和生活污水中的有机物,如淀粉、蛋白质、糖类等。这类污染物在水中经生物降解,可以分解成二氧化碳、水、硝酸盐等。这种生物降解会消耗水体中的溶解氧(未受污染的自然水体溶解氧约为 9.17 mg/L)。过多的无毒有机物会造成水体缺氧,形成富营养化,导致大量水生物因缺氧死亡。

2. 无毒无机物:主要指各种无毒的中性(或弱酸性、弱碱性)无机盐。如食盐等。

3. 有毒有机物: 主要指酚、醛、多氯联苯、有机磷、有机氯等农药及其他化工产品。这类物质化学稳定性强, 难分解, 能在水体中存留很长时间, 且能在生物体内累积、传递。

4. 有毒无机物: 主要指氰化物、氟化物、亚硝酸盐等剧毒无机盐。这类物质一旦进入生物体内, 会导致功能紊乱或丧失, 引起急性中毒死亡。但这类物质易氧化分解, 在水中存留时间不长。

5. 重金属: 来自重工业、化工、造纸、制漆, 以及有色金属开采、加工的三废(废渣、废水、废气)。主要有汞、镉、铅、锌、镉、钴、锡、钨及其氧化物。水体只要含微量浓度(1~2mg/L), 就具有毒性。由于这类物质不能被微生物降解, 一旦进入生物体内, 就会长期积存在某些器官中, 危害极大。重金属污染物只能通过沉淀、吸附或氧化还原作用在水中稀释、扩散。

6. 放射性物质: 来自铀矿开采、核工业、反应堆等设施排放的污水, 以及各种放射性同位素的研制和应用。这类物质能在相当长的时间内放射 α 、 β 、 γ 等射线, 伤害各种生物体组织, 诱发恶性贫血、肿瘤及胎儿畸形等。

7. 细菌: 尤指大肠杆菌。主要由各种动物(含人、畜)的排泄物带入水体。可引起各种肠道疾病、皮肤病和其他传染性疾。

8. 热污染: 主要来自热电厂、核电厂、冶炼厂、焦化厂以及印染、纺织、制革等工业的热废水。我国的热电厂热能利用率仅为 30%, 有 70% 的热能需要借助大气或冷却水来消耗。一座 100 万 kW 的火电厂的冷却水流量 35~40m³/s; 一座同样规模的核电厂则需冷却水流量 60~70m³/s。热废水会使环境水温升高, 破坏水生生物的生态环境; 同时水温升高使水体溶解氧减少, 有利于厌氧菌繁殖, 从而加剧水体中有毒物质的毒性。

1.2.2 水域污染源的种类

造成水体污染的来源多种多样, 下面采用水力学的分类方法, 对污染源进行分类。

1. 按污染源是否随时间变化, 分为瞬时源和连续源。
2. 按污染源的空间形式, 可以分为点源、线源、面源和有限分布源。

1.2.3 水域的污染物质

1. 示踪质

示踪质是这样一种理想的物质: 它在水体中扩散输移时, (1) 不与水体发生生化或化学反应; (2) 它的存在不会改变流场的力学性质。

2. 保守物质和非保守物质

(1) 保守物质: 不会与环境水体发生生化、化学反应, 不会在水体中发生生化降解。即这类物质的数量不会因在水体中扩散输移而发生改变。

(2) 非保守物质: 能与环境水体发生生化、化学反应或生物降解, 其总量随时间和空间变化。

3. 动力惰性物质和动力活性物质

(1) 动力惰性物质: 不会改变环境水体的密度及流场的力学性质。这类物质的密度通常与环境水体相同或相近。

(2) 动力活性物质: 能改变环境水体的密度, 进而改变流场的力学性质。

由此可见, 示踪质是一种保守的动力惰性物质。

1.2.4 浓度与稀释度

1. 浓度

浓度表示单位体积水中所含的污染物质质量,以 c 表示。

$$c = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = c(x, y, z, t) \quad (1-2-1)$$

式中 ΔM 是体积 ΔV 所包含的污染物质质量。一般是空间和时间的函数。

浓度的量纲: $[c] = [ML^{-3}]$, 浓度的单位: $g/m^3, mg/L$ 或 ppm

浓度是描述水体污染程度的重要指标。

浓度的几种平均值:

(1) 时间平均浓度 \bar{c}

$$\bar{c}(x, y, z, t_0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} c(x, y, z, t) dt \quad (1-2-2)$$

\bar{c} 表示在 T 时段内的时间平均浓度。 $\bar{c} = \bar{c}(x, y, z)$ 。

(2) 体积平均浓度 \bar{c}_V

$$\bar{c}_V(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{V} \int_V c(x, y, z, t) dV \quad (1-2-3)$$

\bar{c}_V 表示在体积 V 内的体积平均浓度。 $\bar{c}_V = \bar{c}_V(t)$ 。

(3) 流量平均浓度 \bar{c}_Q

$$\bar{c}_Q = \frac{1}{Q} \int_Q c dQ = \frac{1}{Q} \int_A c u dA \quad (1-2-4)$$

\bar{c}_Q 表示单位体积流量中的污染物质浓度。式中 $\int_A c u dA$ 表示单位时间通过某过水断面污染物质

量(如图 1-1 所示)。当 $c = c_0 = \text{const}$ 时, 则 $\int_A c u dA = c_0 Q$ 。

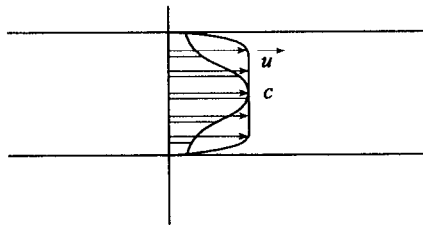


图 1-1 过水断面上流速分布与浓度分布

2. 相对浓度 P (无量纲浓度)

相对浓度 P 表示样品中污水体积所占的比例。

$$P = \frac{\text{样品中污染物质体积}}{\text{样品总体积}} \quad P \in [0, 1]$$

当 $P = 1$ 时, 表示样品完全为污染物, 当 $P = 0$ 时, 表示样品为净水。

3. 稀释度 S (无量纲量)

稀释度 S 也是反映水体污染程度的一个指标。

$$S = \frac{\text{样品总体积}}{\text{样品中污染物体积}} = \frac{1}{P} \quad (1-2-5)$$

$$S \in [1, \infty]$$

当 $S = 1$ 时,表示样品完全为污染物,当 $S \rightarrow \infty$ 时,表示样品为净水。

§ 1.3 环境水力学的研究方法

1.3.1 数量级分析法

由于影响水环境的因素很多,采用数量级分析法旨在忽略一些次要的影响因素,仅考虑主要的影响因素,使问题得到简化。

1.3.2 数值计算法

运用有限差分、有限元(边界元)等方法,对污染物的扩散、弥散、混合等问题进行数值模拟,以便将复杂的环境水力学计算问题交给计算机来完成。

1.3.3 渐近分析法

渐近分析法是一种逐次渐进求出分析解的方法。常用来求解一些非线性微分方程或带有非线性边界条件的问题。可以用来检验物理实验和一般数值计算结果。

1.3.4 模型试验法

鉴于水环境问题的复杂性,特别是许多问题的物理过程和机理尚不清楚,盲目采用理论分析或数值计算方法进行求解很难得出正确的结果。因此,模型试验方法是环境水力学研究的一种最基本也是最重要的研究方法,同时还是建立数学模型的重要依据。

1.3.5 现场观测法

现场观测法常用于资料收集,以及对理论研究的验证。

习题

- 1-1 环境水力学的研究任务是什么?
- 1-2 水中污染物可分为哪几类?
- 1-3 环境水力学规定什么样的物质为示踪质?
- 1-4 浓度常用哪几种平均值?
- 1-5 环境水力学常采用哪些研究方法?

第二章 分子扩散

分子扩散是指物质分子由高浓度向低浓度的运动过程(即存在浓度梯度是分子扩散的必要条件)。分子扩散过程是不可逆的;而且分子在扩散过程中也会受到阻力(来自分子之间、分子与固壁之间的碰撞)。除分子扩散之外,还有热扩散(由温度梯度引起),压力扩散(由压力梯度引起)等,都具有相同或相似的扩散过程。

应当指出,污染物质在水体中的扩散是以多种方式进行的,如随流扩散、紊动扩散、剪切弥散等。其中分子扩散所占的比例极小,即分子扩散对于水环境问题并无多少直接意义。但因污染物的其他扩散方式与分子扩散有着类似的过程,因此人们常借助于成熟的分子扩散理论来描述和求解环境水力学问题。也就是说,分子扩散理论是研究污染物在水中扩散的重要理论基础。

§ 2.1 分子扩散的菲克定律

2.1.1 菲克第一定律

菲克(Fick)定律:单位时间通过单位面积的溶质通量 q 与该面积上的溶质浓度梯度 $\frac{\partial c}{\partial x}$ 成正比,即

$$q_i = -D \frac{\partial c}{\partial x_i}, \quad i = x, y, z \quad (2-1-1)$$

式中: q_i ——单位时间通过单位面积的溶质通量, $[q_i] = [ML^{-2}T^{-1}]$;

D ——分子扩散系数, $[D] = [L^2T^{-1}]$;

$\frac{\partial c}{\partial x}$ ——溶质浓度梯度;

负号表示溶质分子总是由高浓度处向低浓度处扩散。

对于各向异性浓度场,式(2-1-1)应写成分量形式

$$q_x = -D_x \frac{\partial c}{\partial x}$$

$$q_y = -D_y \frac{\partial c}{\partial y}$$

$$q_z = -D_z \frac{\partial c}{\partial z}$$

式(2-1-1)称为菲克第一定律。

2.1.2 菲克第二定律(分子扩散方程)

在浓度场中,取一微分六面体(如图 2-1 所示)。根据质量守恒定律,dt 时段内进出微分体的溶质质量差应等于该时段内微分体内的溶质增量。即

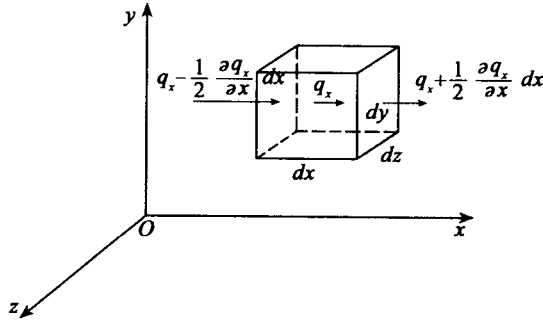


图 2-1

$$\frac{\partial c}{\partial t} dx dy dz dt = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dx dy dz dt$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right)$$

写成张量形式

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0$$

根据菲克第一定律

$$q_i = -D \frac{\partial c}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} \quad (2-1-2)$$

对于各向同性的浓度场, $D = \text{const}$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) \quad (2-1-3)$$

对于各向异性水域, $D_x \neq D_y \neq D_z$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \quad (2-1-4)$$

式(2-1-2) ~ 式(2-1-4)为菲克第二定律,称为分子扩散方程。

§ 2.2 一维扩散方程的基本解

严格说来,实际水域的污染物扩散形式都是三维的。但有时为了简化计算,常把实际问题简化为点源、线源、面源和有限分布源的扩散问题。

下面就瞬时点源的一维扩散情况进行讨论。

2.2.1 一维扩散方程的基本解

求浓度随路程和时间的变化规律 $c(x, t)$ 。一维扩散方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (2-2-1)$$

根据数学物理方程知识,知一维扩散方程有通解

$$c = \frac{B}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2-2-2)$$

式中 B 为待定常数。由初值和边值条件确定。

设 $t=0$ 时刻(初始),在 $x=0$ (坐标原点)处,瞬时注入总质量为 M 的污染物质。随时间延续,物质向 x 轴两侧扩散。但在任何时刻,物质总量应保持不变(质量守恒),即

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} c A dx$$

式中 $A dx$ 为水体积, A 为一维水域过水断面面积。若取 $A=1$,则有

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} c dx \quad (2-2-3)$$

将一维扩散方程通解(2-2-2)代入式(2-2-3)

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) dx = B \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) d\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = B \sqrt{4D} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) d\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

式中 $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) d\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) = \sqrt{\pi}$ 为误差函数,关于误差函数后面再作介绍。

故 $M = B \sqrt{4\pi D}$, 即 $B = \frac{M}{\sqrt{4\pi D}}$ (积分常数)

$$c = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2-2-4)$$

式(2-2-4)为一维扩散方程瞬时点源解,也就是扩散方程的基本解。

瞬时注入物质总量 M ,也可以用坐标原点的初始浓度 c_0 表示

$$M = c_0 A \cdot 1$$

式中 $A \cdot 1$ 为点的体积,若取 $A=1$,则有 $M=c_0$,故

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (2-2-5)$$

式(2-2-5)为给出坐标原点初始浓度的瞬时点源解。其浓度分布曲线如图 2-2 所示。

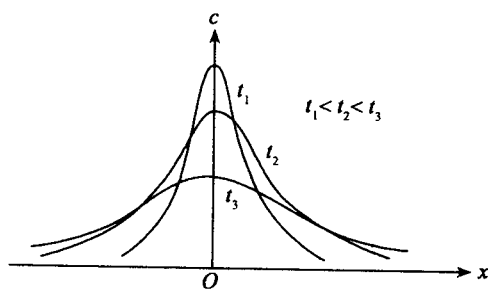


图 2-2 瞬时点源一维无限空间浓度分布图

显然,瞬时点源的浓度分布符合高斯(Gauss)正态分布规律。

2.2.2 关于误差函数的基本知识

1. 误差函数

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2) dz = \operatorname{erf}(x) \quad (2-2-6)$$

误差函数的性质:

(1) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$, 奇函数;

(2) $\operatorname{erf}(0) = 0$;

(3) $\operatorname{erf}(\infty) = 1$;

(4) $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4}{2! \cdot 5} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)! (2n-1)} + \dots \right]$ 。

2. 余误差函数

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} = \int_x^\infty \exp(-z^2) dz = \operatorname{erfc}(x) \quad (2-2-7)$$

余误差函数的性质:

(1) $\operatorname{erfc}(-x) = 1 - \operatorname{erfc}(x)$, 也是奇函数;

(2) $\operatorname{erfc}(0) = 1$;

(3) $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$;

(4) $\operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x} \left\{ 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{3 \cdot 4}{(2x)^4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{[2(n-1)!]}{(2x)^{2(n-1)}} - \dots \right\}$ 。

3. 误差函数与余误差函数的关系

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \operatorname{erfc}(x)$$

$$\operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1$$

4. 误差函数运算

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz &= \int_{-\infty}^0 \exp(-z^2) dz + \int_0^{\infty} \exp(-z^2) dz \\ &= - \int_0^{\infty} \exp(-z^2) dz + \int_0^{\infty} \exp(-z^2) dz \end{aligned}$$