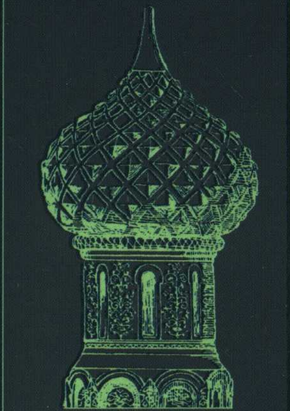


俄罗斯数学
教材选译

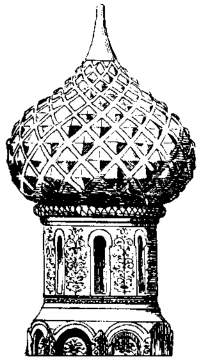
现代几何学：方法与应用（第一卷）

几何曲面、变换群与场

（第5版）

□ Б. А. 杜布洛文　С. П. 诺维可夫　А. Т. 福明柯　著
□ 许明　译

高等教育出版社
Higher Education Press



俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

● 数学天元基金资助项目

现代几何学：方法与应用 (第一卷)

几何曲面、变换群与场

(第 5 版)

□ Б. А. 杜布洛文　С. П. 诺维可夫　А. Т. 福明柯　著
□ 许明　译

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2006–3365 号

Современная геометрия: Том 1. Методы и приложения.
Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей.
УРСС, 2001.

Originally published in Russian under the title
Modern Geometry — Methods and Applications
Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields

图书在版编目 (CIP) 数据

现代几何学: 方法与应用 (第一卷) 几何曲面、变换群与场: 第 5 版 / (俄罗斯) 杜布洛文, (俄罗斯) 诺维可夫, (俄罗斯) 福明柯著; 许明译. —北京: 高等教育出版社, 2006. 9

ISBN 7-04-018946-1

I.现... II.①杜...②诺...③福...④许... III.几何学 IV.018

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 064173 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹文军
版式设计 史新薇 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 – 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 – 810 – 0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新丰印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com

开　　本	787 × 1092　1/16	**版　　次**	2006 年 9 月第 1 版
印　　张	23.5	**印　　次**	2006 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	390 000	**定　　价**	48.10 元

物料号　18946–00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

第 2 版前言

在准备本书的第 2 版时, 作者考虑了读者的许多意见和要求: 从大学生和研究生到知名学者, 数学家和物理学家. 我们在最大范围内系统地进行了重组章节; 处理了相空间的几何理论和哈密顿系统, 并系统阐述了无穷维的 (场论方式的) 广义哈密顿系统; 另外, 作为反称张量的一个应用, 在 §18 中加进了所谓的反交换变量的积分. 系统改进的章节还包括高维变分法. 真正的扩充是从第二卷开始的, 是为了用初等的方法把读者进一步引进到流形的概念中去. 还纠正了关于刘维尔完全可积系统的证明中的某些错误, 也清除了另外一些错误以及明显的一些排版错误, 并且还扩充了文献的目录量.

作者感谢Я. Б. 泽勒罗维奇, 在我们为本书的英文和法文版作准备时他的一些意见使其中许多地方的叙述得以改进(显然, 由于这些改进才构成了现在的这个版本). 作者还要感谢本书修订版的审阅人 А. В. 波哥雷洛娃和 Ю. Г. 雷舍特尼亚克所做出的一系列有益的评注.

第 1 版前言

黎曼几何和基础拓扑到现在也还没有在大学数学教育中设置为必修课程, 就连数学系也是如此. 在标准的设置中, 替代的课程是曲线和曲面微分几何. 尽管一些地方仍在沿用这种安排, 这门课已逐渐被看成是过时的了. 那么, 这些课程究竟怎样才算是跟上了时代步伐, 就是说, 对现代数学教育而言, 现代几何的哪些内容必不可少, 同时在阐述这些内容时应把握什么样的抽象度, 对此我们并没有统一的意见.

从 1971 年开始, 莫斯科大学数学力学系力学部开始设计一门几何的现代化课程. 其内容和阐述的抽象度主要由实际应用的需要决定: 在曲线和曲面几何之外应该加进其他的专题, 即张量理论和张量的共变微分; 黎曼曲率; 测地线和变分法, 包括守恒定律和哈密顿系统; 反称张量的一种特殊情形 (即 "形式") 及其运算; 还有各种斯托克斯型的公式, 包括在各个力学分支中, 特别在流体力学和相对论等中非常有用的, 无所不在的 "广义斯托克斯公式". 许多第一流的理论物理学家和数学家一样, 认为如果还能包括有关流形、变换群、李代数以及直观拓扑学的基础概念的一些知识则是有益的. 他们还认为, 这门课程应该尽可能使用简明和具体的语言阐述, 并且只要是在实际应用的场合, 便应该用物理学家使用的术语. 以上所列举的素材组成了这个课程的最初内容, 并且在莫斯科大学以教材形式出版:

《微分几何》, 第一卷和第二卷, С. П. 诺维可夫著, 莫斯科大学力学分部, 1972.

后来, 作者修改了这个课程的许多内容, 增添了新的专题. 莫斯科大学又出版这些补充了的教材.

《微分几何》, 第三卷, С. П. 诺维可夫, А. Т. 福明柯著, 莫斯科大学力学研究所, 1974.

现在的这本书是上述这些教材经重新加工, 整理以及考虑到这些教材出版后几

何的发展而形成的. 作者认为可以把本书作为一本基础教材, 从中可以方便地提取出一门现代几何课程所必备的内容.

本书的原创概念和整个计划都来自诺维可夫. 按此计划, 原来教材中的那些素材的重新组织工作由 Б. А. 杜布洛文负责, 它占了本书第一卷的多半部分; 此书的其余部分本质上是全新的. 编辑 Д. Б. 福克斯对全书的最终成形功不可没.

本书的材料大大超出了作为大学二、三年级数学教育的必修内容. 这是刻意安排的：我们希望, 在第一卷中也应该包括一些让大学生和研究生熟悉的更为复杂的具本质性的几何概念和方法, 它涉及变换群和李代数, 场论, 变分法 (可以通过自学完成), 特别是在物理体系中起着重要作用的那些数学内容. 同时, 我们也竭力使内容的阐述和术语的使用在抽象程度上达到最小; 但是这样做常常要牺牲掉在陈述和证明上的所谓 "一般性"、事实上, 在关键的决定事物本质的那些例子中的重要的结果, 可能往往是从经典的分析与几何的初等考虑中得到的, 无需求助于现代的 "超级不变性" 的概念和记号. 但是, 对这个结果的最一般的形式表达, 特别是与其相伴的证明, 必定使抽象的形式化程度变得极为复杂. 因此, 在遇到这种场合时, 我们使用适合于这个重要例子的简洁语言进行阐述, 把一般性的证明推延在后面的章节或者干脆略而不讲. 在处理那些与现代物理学紧密相关的几何问题时, 我们曾仔细分析过物理方面的相关文献: 在量子场论方面的书籍 (例如 [36], [37]) 初始的章节中以物理学家的语言, 大篇幅地阐述了高维变分以及李群最简单表示论中的一些极重要概念; [38], [39] 则着重讲了场论的几何问题: 例如 [38] 以物理观点全面处理了黎曼几何, 其中有一些非常有用的材料. 连续介质力学和刚体理论的书 ([40], [41], [42]) 中有关张量和群论方面的许多例子也很有意思.

我们并没有打算把这套书写成 "自给自足" 的教科书: 在标准的数学教育中, 几何只是全部课程中的一个分支, 涉及分析、微分方程、代数、初等点集拓扑和测度论的各种问题, 在相关的课程中均有阐述. 我们尽力约束自己不对来自其他学科的问题进行详细讨论而只进行系统的阐述, 毕竟在标准的课程中, 它们已得到了充分的关注.

本书第二卷处理了流形的几何和拓扑, 比起第一卷, 它包含了大量的超出课程所必需的材料. 大多数关于流形的几何和拓扑的书只着眼于某个狭窄的小领域, 并且通常也十分抽象, 所用的也是一种特别适合于这个小领域的语言, 因而常常造成了不必要的复杂性. 在第二卷中我们同样尽可能忠于使阐述抽象度最小的原则; 像前面一样, 较之于一般性定理我们更优先关注有意义的例子. 另外, 我们还把章与章之间的依赖程度减到最小, 从而在内容性质所容许的范围内, 使其中每一章都可以比较容易地独立阅读. 但是我们也必须记住: 尽管可以十分容易地定义出许多拓扑概念 (例如扭结和链环、基本群、同伦群、纤维空间), 然而即便在最简单的例子中要进行非平凡的应用, 也需要发展出在经典数学中所没有的一些工具. 因此对那些虽已掌握了经典数学工具但仍不熟悉初等拓扑的读者来说, 第二卷确实比第一卷要

复杂得多. 这是无法抹平的差别. 从 20 世纪 50 年代起, 拓扑学这项工具的发展以及它对数学各分支的渗透一直在极速进行. 近年来, 拓扑方法 (有时和复代数几何结合) 实质性地应用于现代理论物理的许多问题, 可以说, 已出现了一连串的突飞猛进; 其中包括了对具有某种几何特性的特定场的量子理论, 譬如杨 – 米尔斯场和手征场; 流体晶体和超流动性理论; 广义相对论; 某些在物理上重要的非线性波动方程, 例如 KdV 方程和正弦 – 戈登方程; 某种 "长分子" 物质的统计力学也力图应用扭结和链环理论. 可惜, 我们不可能把这些应用写到本书中, 因为要把其中任一个应用处理得当就需要一段漫长的预备性旅程方能进到物理问题本身; 要是那样做, 我们就偏离初衷太远了. 但是我们在素材的选取上考虑了这些情况, 即考虑了在这些问题中所应用到的那些拓扑思想和方法, 并且还考虑到现代学派中年轻的理论物理学家们可能需要 (带有强烈目的性的) 一本可供阅读的拓扑书, 从这本书中他们可以得到想要的东西.

伴随拓扑和几何思想这二十年来的发展, 所使用的代数工具的复杂性也有了实质性的增长; 这些代数工具使用在高维的几何直观情形. 同样, 还在较深层次上使用了泛函分析、偏微分方程和复分析; 不是所有这些东西都包括在我们这本自称是初等的书里了 (事实上, 大部分这些内容也没有被包括在任何一本单独的教科书中, 只能研究各种专著和期刊).

大范围三维几何是三维空间经典微分几何的一个分支, 它是一个具直观性的, 有广泛用途的领域, 特别是凸图形理论及其应用, 它们还特别与负曲率曲面的整体问题有许多有趣的关联. 我们不是这方面的专家, 不能用十分简明和直观的例示的办法提取其精华, 从而把它们包含在一本初等的教材中. 读者可以通过 [4], [5] 和 [6] 这几本书来了解这个几何分支.

出于技术性的考虑, 讲述同调论的第三卷将由作者们另行出版.

在关于流形的拓扑和几何的所有书中, 由沙爱福和施雷发 (Seifert 和 Threlfall) 著的经典书《拓扑学》和《大范围变分法》以及更为现代的好书 [11], [12], [17], 最接近于我们在选材和处理问题时的观念了. 在创作本书的过程中, 我们以积极的态度反复思考和拓展了这些书中的素材和对它们的教学方法. 事实上, 在编写第二卷时, 我们所定的首要目标就是要写一本多少像现代版的沙爱福和施雷发的《拓扑学》, 但是涵盖的范围要更广, 尽可能运用光滑流形理论的现代方法进行重新塑造, 同时保留语言的简明, 并以新的素材加以充实. 这些新素材不但由拓扑方法的当前发展决定, 也由那些第一次接触拓扑学的读者决定; 他们希望在尽可能短的时间内学到适当的知识量. 就我们来说, 利用从物理学家所积累的方法论上的经验是完全可行的 (在第一卷中尤为如此): 通过现有的初等和熟知的手段把非初等的数学元素变得容易理解 (但是要保留数学文献的格式特点, 即主要结论的陈述均标以 "定理", "引理" 等等, 以便把它们从教材的主体中突显出来). 一般说来, 我们主张, 理解应该优先于陈述的系统化, 优先于严谨性. 有许多论断的证明细节 (姑且不论其正确与否) 在应用中

没有任何一点利用的价值. 有时在分析例子的过程中, 一些事实看起来总是合理的, 我们便在没有证明的情况下引述了这些事实并进行了应用. 对我们来说, 这似乎是合理的. 一旦对其应用完全熟悉之后, 读者最终可以在其他资料的帮助下, 自己 (如果想去做的话) 找出这些事实的证明 (为此, 我们推荐 [26]). 另外, 我们也努力把许多被省略的证明分成了能够容易解答的小片段, 放在与它们相关章节的最后面.

在第二卷的最后两章里, 我们把当代文献中许多不同类的事实组合在一起: 有关于动力体系和叶状结构的、广义相对论的以及杨 - 米尔斯场和手征场的. 在这里所阐述的思想属于不同的作者. 但是, 在一本具纯粹教科书特点的书里不可能列出一大串参考文献. 然而, 对那些将要利用研究性期刊对这些问题进行深入研究的读者来说, 一定自己会在期刊中找到合适的参考文献.

最后, 我们对莫斯科大学数学力学系的同事们表达深深的谢意: 由于他们的宝贵支持, 才使这门新的几何课程从策划到运转成为现实. 在我们系里的这些第一流的数学家中, 最应感谢的是苏维埃拓扑学派的创始人 П. С. 阿历克山得罗夫, 杰出的几何学家 П. К. 拉舍夫斯基和 Н. В. 叶菲莫夫.

我们还要感谢编辑 Д. Б. 福克斯, 在文稿最后定形中他做出了巨大努力; 同样要感谢, А. Д. 阿历克山得罗夫, А. В. 波哥雷洛娃, Ю. Ф. 波里索夫, В. А. 托坡果诺夫, В. И. 库兹米诺夫, 在审阅本书时他们提供了许多有益的意见.

另外, 我们对一些学者表示特别的感谢, 是他们为本书提供了一系列非标准阐述的材料. 例如, 在普通的文献中找不到有关共形映射的刘维尔定理的证明, 是 В. А. 卓里奇与我们进行了交流. 编辑 А. Б. 福克斯给作者指出了许多定理的简要证明. 我们还要感谢 О. И. 波哥雅夫林斯基, М. И. 莫纳斯特尔斯基, С. Г. 金吉钦, Э. Б. 温伯格, Д. В. 阿历克谢叶夫斯基, И. В. 格里伯柯夫, П. Г. 格里涅维奇.

目 录

第一章　空间区域中的几何. 基本概念

§1. 坐标系

我们先讨论几何学里一些基础的概念. 中学的希腊式的几何研究了简单几何图形的各种度量性质. 其中要解决的基本问题是找出在三角形和其他多边形中长度和角之间的关系, 除此之外, 在这些基础之上计算了曲面面积和某些立体的体积. 中学几何的中心概念是直线线段 (或圆弧) 的长, 两条相交线 (直的或弯曲的) 之间的夹角.

整个解析 (坐标) 几何的主要目的是在平面或三维空间的笛卡儿坐标系下描述用公式给出的几何图形. 与 "中学的" 几何相比, 唯一的差别在于方法上的不同, 而研究的对象是一样的. 微分几何也处在同样的状态: 相同的主题, 但在这里更加精妙地使用了微分学和线性代数的手段. 这样, 在引进了对一般的光滑图形的研究后, 微分几何便扩充了它研究对象的范围.

1. 空间的笛卡儿坐标

我们基本的几何思想如下:

(1) 几何是在某个空间中展开的, 而此空间由点 $P, Q, \cdots$ 组成.

(2) 像在解析几何那样, 在此空间可以引进笛卡儿坐标, 这表示对空间每个点建立一组相对应的实数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$, 称为它的坐标, 它们满足下面两个性质:

a) 不同的点对应不同的坐标组; 这意味着, 具有坐标 $(x^1, \cdots, x^n), (y^1, \cdots, y^n)$ 的两个点 P, Q 相重合当且仅当 $x^i = y^i, i = 1, 2, \cdots, n$ 成立.

b) 反之, 每组 $(x^1, \cdots, x^n)$, 其中 x^i 为任意实数, 应对应于空间中的某一个点.

定义 1.1. 称一个引进了上述性质的笛卡儿坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的空间为n 维笛

卡儿空间, ①记为 $\mathbb{R}^n$. 称数 n 为此空间的维数.

我们常常就称数组 $(x^1,\cdots,x^n)$ 本身为这个空间的点. 笛卡儿空间的最简单例子是数直线, 它是一维的笛卡儿空间. 这里的点只有一个坐标 $x^1(n=1)$, 另一个例子是解析几何中的, 这是在平面上的 (二维笛卡儿空间) 和 "通常的" 即三维的空间中的笛卡儿坐标 (图 1), 这些笛卡儿空间对于解决中学几何的问题是完全适合的.

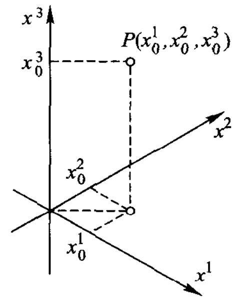


图 1

我们给出一个不太熟悉的然而极其重要的笛卡儿空间的例子. 现代物理学告诉我们, 时间和空间不是完全分离的, 不相重叠的概念, 而是出现在四维的时空连续体中. 对这些现象的自然顺序的数学阐述的证明是极方便的.

我们的时空连续体的点被当作为事件. 对每个事件我们派定一个实数的有序四元组 (t,x^1,x^2,x^3), 其中 t 是事件发生的 "瞬时", 而 x^1,x^2,x^3 为事件的 "空间位置" 的坐标. 数 (t,x^1,x^2,x^3) 便是时空连续体的笛卡儿坐标.因此, 时空连续体是个四维的笛卡儿空间. 现在我们可以不再理会把坐标 (t,x^1,x^2,x^3) 当作事件的时间和空间的解释. 经典几何的三维空间只不过是由 $t=$ 常数定义的水平曲面. 一个物体 (在每个瞬间可以抽象地看成一个点 (所谓的质点)) 的路径在时空空间中则是四维空间中一条曲线段 (或弧)$x^\alpha(t),\alpha=1,2,3$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$. 我们称此曲线为这个点的世界线 (图 2). 我们也会考虑三维甚至二维时空连续体, 它们分别由三联组 (t,x^1,x^2) 和偶对 (t,x^1) 为坐标, 这是因为对这些空间而言可以比较容易画出清晰的图像.

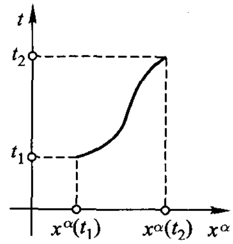


图 2

2. 坐标变换

假设在一个 n 维笛卡儿空间中我们有一个实函数 $f(P)$, 即对此空间中每个点 P 指派一个实数的函数. 由于空间中每个点以其 n 个坐标值出现, 故我们可以把 f 想成是 n 个实变量的函数: 如果 $P=(x^1,\cdots,x^n)$, 则 $f(P)=f(x^1,\cdots,x^n)$. 我们将只涉及连续的 (甚至为连续可微) 函数 $f(x^1,\cdots,x^n)$, 我们所考虑的函数常常不是对空间 $\mathbb{R}^n$ 中每个点都有定义, 而仅仅定义在它的部分或更精准地说在它的 "区域" 上.

定义 1.2. 一个区域或一个无边界区域(用其他术语也称为 "开集") 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点集 D, 使得对它中的每个点也包含了充分靠近此点的所有点.

更准确地说, 对区域 D 中每个点 $P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$, 存在数 $\varepsilon>0$ 使得满足不等式

$$|x^i-x_0^i|<\varepsilon,\quad i=1,\cdots,n$$

的所有点 $P=(x^1,\cdots,x^n)$ 也在 D 中.

① 可能这不是个通用的术语, 希望不要使读者困惑.

定义 1.3. 一个带边界的区域是由无边界区域加进所有边界点得到. 区域的边界由所有边界点组成.

无边界区域的最简单的例子是整个空间 $\mathbb{R}^n$. 另一个简单的例子是平面中满足 $x_1^2+x_2^2<\rho^2$ 的点 (x_1,x_2) 的集合 (半径 $\rho>0$ 的开圆盘). 对应的带边界的区域由满足 $x_1^2+x_2^2\leqslant\rho^2$ 的点 (x_1,x_2) 组成. 这个例子是一种具有典型意义的定义. 有下面简单的定理.

定理 1.1. 设在空间 $\mathbb{R}^n$ 给出了一组连续函数 $f_1(P),\cdots,f_m(P),P=(x^1,\cdots,x^n)$. 考虑满足不等式

$$f_1(P)<0,f_2(P)<0,\cdots,f_m(P)<0$$

的点 P 的集合 D. 于是 D 是无边界区域.

证明 设 $P_0=(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 在 D 中, 即 $f_1(P_0)<0,\cdots,f_m(P_0)<0$. 由关于连续函数保持符号的定理得到: 对每个 j 可以找到这样的 $\varepsilon_j>0$, 使得由不等式 $|x^i-x_0^i|<\varepsilon_j, i=1,2,\cdots,n$ 得到 $f_j(P)<0$. 选取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$, 我们便看出 D 包含了所有满足 $|x^i-x_0^i|<0$ 的点 $(x^1,\cdots,x^n)$. 因此 D 是无边界区域. □

注 沿曲线在区域 $D: f_j(P)<0, j=1,\cdots,m$ 中的运动, 由于 f_j 的连续性, 只可能达到那些满足 $f_j(P)\leqslant 0$ 的点 P. 如果函数 $f_1,\cdots,f_m$ 满足某些简单的解析条件 (在第二卷中将详细阐述), 则对任意 j 使 $f_j(P)=0$ 的任意点 P 都可以达到. 在下面遇到的所有例子都满足这些限制条件. 因此, 在这些条件下, 不等式 $f_j(P)\leqslant 0, j=1,\cdots,m$ 的解给出了一个带边界的区域.

空间中有界区域的概念是非常重要和常常遇到的, 即离坐标原点足够远的点都不属于它的那种区域.

在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 显然给出了任意区域 D 中点的坐标, 但它们没有取所有的值. 对于定义在区域中的函数 $f(x^1,\cdots,x^n)$ 可以像对定义在整个空间 $\mathbb{R}^n$ 中的那样谈及连续性和可微性.

假设在同一区域中给出任意其他的坐标 $(z^1,\cdots,z^n)$. 我们可以写成

$$\begin{aligned} x^i&=x^i(z^1,\cdots,z^n), \quad i=1,2,\cdots,n\\ z^j&=z^j(x^1,\cdots,x^n), \quad j=1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{1}$$

上述等式只不过表明可以把笛卡儿坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 与新的坐标系 $(z^1,\cdots,z^n)$ 进行比较, 因此可以通过新的坐标来表示原来的坐标, 反之亦然.

我们首先考察空间中的线性坐标变换:

$$x^i=\sum_{j=1}^n a_j^i z^j, \quad i=1,\cdots,n \tag{2}$$

(较简短地可写为 $x^i=a_j^i z^j$, 其中表明按重复的指标取和). 由线性代数知道, 通过 x 能够表出 z 的充分必要条件是矩阵 $A=(a_j^i)$ 具有逆矩阵 $B=A^{-1}=(b_j^i)$. 逆矩阵由