高职高专数学系列教材

高等数学

Advanced mathematics

主编　曲春平

東北大學出版社
Northeastern University Press

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 曲春平主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2006.4
ISBN 7-81102-234-6

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 曲…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 006881 号

内容摘要

本书依据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，在总结高职高专数学教学改革成功经验的基础上，紧密围绕高职高专的培养目标，遵循“必需、够用为度”的原则而编写，淡化理论，强化能力，立足应用，以达到培养学生解决实际问题的能力之目的．全书以叙述基础知识为重点，具体内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学和级数等．

本书可作为高职高专学生用书，也可作为成人教育的数学教材．

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：20.25
字　　数：546 千字
出版时间：2006 年 4 月第 1 版
印刷时间：2006 年 4 月第 1 次印刷
责任编辑：刘乃义　刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：章　力
责任出版：秦　力

定　　价：30.00 元

前　　言

根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规划》，编者在认真总结全国高职高专教育改革成果的基础上，结合我们这些年来在数学教学改革方面的成功经验，精心编写了本书。

在编写中，充分考虑高职高专各专业的特点和要求，以应用为目的，以必需、够用为度。在教材内容选排上，在保持科学性和系统性的前提下，适度淡化部分理论性比较强的内容，侧重几何说明，增强直观性。对于概念的引入，注重通过实例阐述其含义及实际意义，强调与实际问题的联系，着重于培养分析问题和解决问题的能力，使其能够适应目前高职高专教育的现状。

全书内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学和级数等内容。建议本书的基本教学时数不少于 120 学时，带 * 号的内容要另行安排学时。

本书由曲春平任主编，栾林、岳贵新、刘汝臣任副主编，张唯春、张梓怡、勾丽杰、丛政义、邱翠萍、刘枫、由丽丽、于丽妮、朱茹红参加编写。

由于水平所限，加之时间仓促，不足之处在所难免，恳请广大师生批评指正。

编　者

2005 年 12 月

目　　录

第一章　函数与极限 ······ 1

第一节　函　数 ······ 1
第二节　极　限 ······ 6
第三节　无穷小量与无穷大量 ······ 11
第四节　极限的运算 ······ 13
第五节　函数的连续性与间断点 ······ 21
复习题一 ······ 26

第二章　导数与微分 ······ 29

第一节　导数概念 ······ 29
第二节　初等函数的导数 ······ 36
第三节　隐函数的导数和由参数方程所确定的函数的导数 ······ 43
第四节　高阶导数 ······ 47
第五节　微　分 ······ 51
复习题二 ······ 57

第三章　导数的应用 ······ 59

第一节　微分中值定理及洛必达法则 ······ 59
第二节　函数的单调性与极值 ······ 63
第三节　函数的最大值和最小值 ······ 68
第四节　曲线的凹凸和拐点，函数图形的描绘 ······ 72
第五节　曲　率* ······ 78
第六节　导数在经济上的应用* ······ 84
复习题三 ······ 89

第四章　不定积分 ······ 92

第一节　不定积分的概念与性质 ······ 92
第二节　换元积分法 ······ 95
第三节　分部积分法 ······ 101
第四节　有理函数及三角函数有理式积分法* ······ 104
第五节　积分表的使用* ······ 110
复习题四 ······ 112

第五章　定积分 ······ **114**

第一节　定积分的概念和性质 ······ 114
第二节　微积分基本公式 ······ 120
第三节　定积分的积分方法 ······ 124
第四节　广义积分* ······ 128
复习题五 ······ 131

第六章　定积分的应用 ······ **133**

第一节　定积分的几何应用 ······ 133
第二节　定积分的物理应用 ······ 141
第三节　定积分在经济中的应用举例* ······ 144
复习题六 ······ 148

第七章　常微分方程 ······ **151**

第一节　微分方程的基本概念 ······ 151
第二节　一阶微分方程 ······ 153
第三节　一阶线性微分方程 ······ 156
第四节　可降阶的高阶微分方程 ······ 160
第五节　二阶常系数齐次线性微分方程 ······ 163
第六节　二阶常系数非齐次线性微分方程 ······ 166
复习题七 ······ 171

第八章　向量代数与空间解析几何 ······ **173**

第一节　向量代数 ······ 173
第二节　两向量的数量积与向量积 ······ 177
第三节　平面与直线 ······ 181
第四节　曲面及空间曲线 ······ 188
复习题八 ······ 193

第九章　多元函数微分学 ······ **195**

第一节　多元函数的概念 ······ 195
第二节　偏导数 ······ 199
第三节　全微分 ······ 204
第四节　多元复合函数的求导法则 ······ 207
第五节　偏导数的几何应用 ······ 212
第六节　多元函数的极值 ······ 215
复习题九 ······ 220

第十章　多元函数积分学 ······ **222**

第一节　二重积分的概念和性质 ······ 222

第二节　二重积分的计算……………………………………………………………… 225
第三节　二重积分的应用……………………………………………………………… 233
第四节　三重积分的概念和计算* …………………………………………………… 236
第五节　对坐标的曲线积分* ………………………………………………………… 242
第六节　格林公式及其应用* ………………………………………………………… 247
第七节　对坐标的曲面积分* ………………………………………………………… 251
复习题十……………………………………………………………………………… 256

第十一章　级　　数……………………………………………………………………… 258

第一节　常数项级数的概念和性质…………………………………………………… 258
第二节　常数项级数的审敛法………………………………………………………… 262
第三节　幂级数………………………………………………………………………… 266
第四节　函数的幂级数展开式………………………………………………………… 272
第五节　傅里叶级数* ………………………………………………………………… 276
复习题十一……………………………………………………………………………… 282

附录Ⅰ　积分表……………………………………………………………………………… 284

附录Ⅱ　常用平面曲线及其方程……………………………………………………………… 293

习题答案与提示……………………………………………………………………………… 295

第一章 函数与极限

高等数学的研究对象是变动的量，函数是高等数学的主要研究对象，极限是高等数学中一个重要的基本概念，它是学习微积分学的理论基础．本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

第一节 函 数

一、函数的概念

1．函数的定义

定义 1 设 D 是一个非空实数集，若对 D 中的每一个数 x，按照某个对应法则 f，y 都有确定的值与它对应，则 y 叫做 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，x 叫做**自变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 M 叫做函数的**值域**．

在函数定义中，若对于任意的 $x\in D$，都有唯一确定的 $y\in M$ 与它对应，则这种函数就称为单值函数，否则就称为多值函数．

例如，由方程

$$x^2+y^2=a^2$$

所确定的以 x 为自变量的函数为

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

可以看出，对于任意的 $x\in[-a,\ a]$，上式确定了两个 y 值，即函数 y 是由两个单值函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$ 所构成的多值函数．

今后如无特殊说明，所研究的函数都是指单值函数．

若对于 $x_0\in D$，y 有确定的值与之对应，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义，$f(x)$ 在 x_0 处的函数值记为

$$y\big|_{x=x_0},\ f(x)\big|_{x=x_0} 或 f(x_0).$$

对于同一个问题中的不同函数，应该采取不同的记号，如 $f(x)$，$\varphi(x)$，$F(x)$，$\Phi(x)$，等等．

例 1 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{|x+5|}$ 的定义域．

解 对于 $f(x)$，要求分子中的被开方式非负，分母不为 0，即

$$\begin{cases}x^2-9\geqslant 0,\\ |x+5|\neq 0.\end{cases}$$

解此不等式组，得

$$\begin{cases}x\leqslant -3 \text{ 或 } x\geqslant 3,\\ x\neq -5.\end{cases}$$

所以，函数的定义域为

$$D=(-\infty, -5)\cup(-5, -3]\cup[3, +\infty).$$

例 2 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f(0)$，$f(x^2)$，$f[f(x)]$，$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

解 $f(0)=\frac{1}{1-0}=1$，

$f(x^2)=\frac{1}{1-x^2}$，$D=\{x \mid x\neq -1, 1, x\in\mathbf{R}\}$，

$f[f(x)]=f\left[\frac{1}{1-x}\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}$，$D=\{x \mid x\neq 0, 1, x\in\mathbf{R}\}$，

$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f(1-x)=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x}$，$D=\{x \mid x\neq 0, 1, x\in\mathbf{R}\}$.

两个函数只有当它们的定义域和对应法则完全相同时，这两个函数才是相同的函数. 因此，构成函数的两个要素是：定义域和对应法则.

例如，函数 $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$，它们的定义域和对应法则都相同，所以它们是相同的函数.

又如，函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$，它们的定义域不同，所以它们是不同的函数. 注意，常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因为当 $x\in\mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C，此时也称其为**常值函数**.

2. 函数的表示法

表示函数的方法，常用的有公式法、表格法和图像法三种. 有时，我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

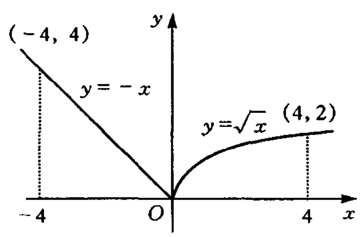


图 1-1

是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数. 当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$. 它的图像如图 1-1 所示. 像这样，在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为分段函数.

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式进行计算.

例如，在上面的分段函数中，有

$$f(4)=\sqrt{4}=2,\ f(-4)=-(-4)=4.$$

二、初等函数

1. 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意的 $y\in M$，都有唯一确定的 $x(x\in D)$ 值与之对应，那么，由此所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$（或 $x=f^{-1}(y)$）叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，它的定义域为 M，值域为 D.

习惯上，函数的自变量都以 x 表示，所以，反函数也可表示为 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 3　求 $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 的反函数，并求出它的定义域.

解　因为 $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$，所以

$$e^{x}-e^{-x}=2y,$$
$$e^{2x}-2ye^{x}-1=0,$$
$$e^{x}=\frac{2y\pm\sqrt{4y^{2}+4}}{2}=y\pm\sqrt{y^{2}+1}.$$

由于 $e^{x}>0$，上式的根号前取正号，即

$$e^{x}=y+\sqrt{y^{2}+1}.$$

于是

$$x=\ln(y+\sqrt{y^{2}+1}),$$

所以，所求的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1}),\ x\in\mathbf{R}.$$

2. 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数.

(1) 幂函数　　$y=x^{\mu}$　$(\mu\in\mathbf{R})$；

(2) 指数函数　　$y=a^{x}$　$(a>0$ 且 $a\neq1)$；

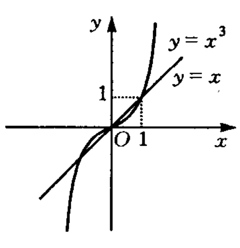
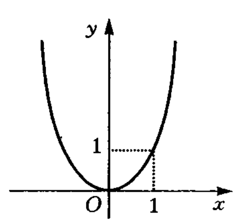
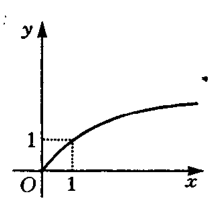
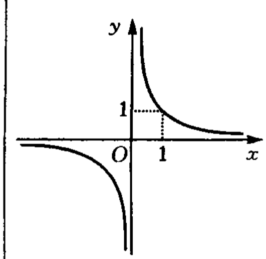
(3) 对数函数　　$y=\log_{a}x$　$(a>0$ 且 $a\neq1)$；

(4) 三角函数　　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$；

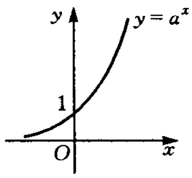
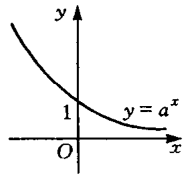
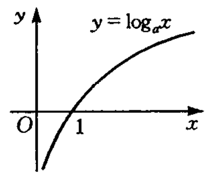
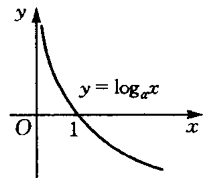
(5) 反三角函数　　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

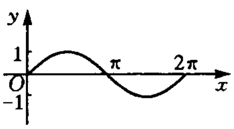
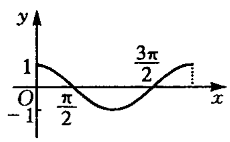
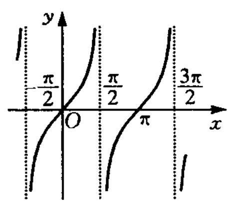
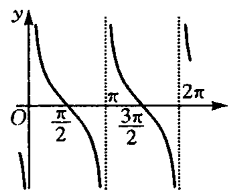
为了便于应用，将它们的定义域、值域、图像和主要性质列表如下，见表 1-1.

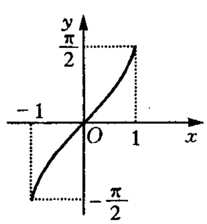
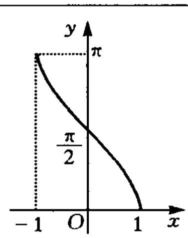
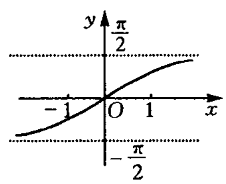
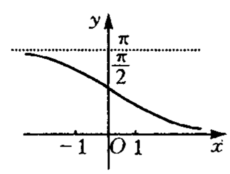
表 1-1

函数	幂函数 $y=x^{\mu}$			
	$\mu=1,3$	$\mu=2$	$\mu=\frac{1}{2}$	$\mu=-1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调增	在 $(-\infty,0]$ 内单调减 在 $[0,+\infty)$ 内单调增	单调增	在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内分别单调减

续表 1-1

函　数	指数函数 $y=a^x$　$(a>0,\ a\neq 1)$		对数函数 $y=\log_a x$　$(a>0,\ a\neq 1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图　像				
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$
值　域	$(0,\ +\infty)$	$(0,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减

函　数	$y=\sin x$ (正弦函数)	$y=\cos x$ (余弦函数)	$y=\tan x$ (正切函数)	$y=\cot x$ (余切函数)
图　像				
定义域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$	$(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$
值　域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
周期性	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
单调性 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$	单调增	单调减	单调增	单调减
单调性 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$	单调减	单调减	单调增	单调减
单调性 $\left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$	单调减	单调增	单调增	单调减
单调性 $\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$	单调增	单调增	单调增	单调减

函　数	$y=\arcsin x$ (反正弦函数)	$y=\arccos x$ (反余弦函数)	$y=\arctan x$ (反正切函数)	$y=\operatorname{arccot} x$ (反余切函数)
图　像				
定义域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
值　域	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\ \pi)$
单调性	单调增	单调减	单调增	单调减
$f(-x)$	$\arcsin(-x)=-\arcsin x$	$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	$\arctan(-x)=-\arctan x$	$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot} x$

这些基本初等函数在初等数学中已作过详细介绍，在此不再赘述．但对于反三角函数，大家还要认真总结复习，加深对其性质的理解．

3．复合函数

定义 3 设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$的函数值全部或部分在 $f(u)$的定义域内，此时 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称此函数为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，记为

$$y=f(\varphi(x)),$$

u 称为**中间变量**．

例如，$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数，它的定义域与 $u=\sin x$ 的定义域相同，都是全体实数 $\mathbf{R}$．

又如，$y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数，它的定义域$[-1,1]$是 $u=1-x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$的子集．

再如，$y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$，$u=x^2+2$ 的值域为$[2,+\infty)$，从而，对于 $u=x^2+2$ 定义域中的任意一个 x 值，按 $u=x^2+2$ 所得的 u 值，均不属于$[-1,1]$的范围，所以不能构成复合函数．

复合函数也可由多个函数进行有限次复合而成．例如，$y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x$ 可构成复合函数 $y=\sin\sqrt{1-x}$，这里 u，v 都是中间变量．

在研究复合函数这个概念时，有时重点并不在“复合”，而在于“分解”，即如何将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成，这样更便于对函数的研究．

例 4 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\lg(1+x^2)$； (2) $y=3^{\cos x}$；

(3) $y=\arctan(1+\sqrt{1+x^2})$； (4) $y=\cos^2 3x$．

解 (1) $y=\lg(1+x^2)$是由 $y=\lg u$，$u=1+x^2$ 复合而成的．由于 $u=1+x^2$ 为多项式，可作为一简单函数．

(2) $y=3^{\cos x}$是由 $y=3^u$，$u=\cos x$ 复合而成的．

(3) $y=\arctan(1+\sqrt{1+x^2})$是由 $y=\arctan u$，$u=1+\sqrt{v}$，$v=1+x^2$复合而成的．

(4) $y=\cos^2 3x$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=3x$ 复合而成的．

4．初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**．例如

$$y=\frac{\sin x}{x}+\cos x,\quad y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$$

等，都是初等函数．而

$$y=\begin{cases}3^x, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0;\end{cases}\qquad y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

等，都不是初等函数．

微积分所研究的对象主要是初等函数．

习题 1-1

1. 下列各题中所给的两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$； (2) $y=x$ 和 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=2-x$ 和 $y=\dfrac{4-x^2}{2+x}$； (4) $y=\arccos x$ 和 $y=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x$；

(5) $y=\ln\sqrt{x-1}$ 和 $y=\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$； (6) $y=|x-1|$ 和 $y=\begin{cases}1-x, & x<1,\\ 0, & x=1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x+4}$； (2) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sqrt{1-|x|}$； (4) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$； (6) $y=\arccos\sqrt{2x}$；

(7) $y=\dfrac{x}{\tan x}$.

3. 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(1)$.

4. 设 $G(x)=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{x}{2}$，求 $G(0)$，$G(1)$，$G(\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{3})$，$G(-2)$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(x^3)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 作出它的图像，并求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)$，$f(2)$ 的值.

7. 求下列函数的反函数，并求出反函数的定义域.

(1) $y=x^2-2x\ (x>1)$； (2) $y=10^{x+1}$；

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$； (4) $y=\sin x\ \left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi\right)$；

(5) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$.

8. 将下列各题中的 y 表示为 x 的函数，并求出它们的定义域.

(1) $y=\sqrt{u}$，$u=x^2+1$； (2) $y=\ln u$，$u=3^v$，$v=\sin x$.

9. 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$； (2) $y=e^{x+1}$；

(3) $y=\sin\dfrac{3x}{2}$； (4) $y=\cos^2(3x+1)$；

(5) $y=\ln\sqrt{1+x}$； (6) $y=\arccos(1-x^2)$；

(7) $y=\lg(\arctan\sqrt{1+x^2})$.

第二节 极 限

一、函数的极限

为了研究问题方便，我们先研究自变量的变化趋势.

设 x 为自变量，如果 $x>0$，且 x 所取的值无限增大，x 的这种变化过程，记为 $x\to+\infty$，读作"x 趋向正无穷大"；如果 $x<0$，且 x 所取的值使 $|x|$ 无限增大，x 的这种变化过程，记为 $x\to-\infty$，读作"x 趋向负无穷大"；如果 x 所取的值使 $|x|$ 无限增大，记为 $x\to\infty$，读作"x 趋向无穷大"．显然，$x\to\infty$ 包含 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 这两种变化过程．

如果 x 的变化过程是趋近某一常数 x_0，则记为 $x\to x_0$，读作"x 趋近于 x_0"；如果 x 是从 x_0 的左侧（从小于 x_0 的方向）趋向 x_0，记为 $x\to x_0^-$；如果 x 是从 x_0 的右侧（从大于 x_0 的方向）趋向 x_0，记为 $x\to x_0^+$．当 $x\to x_0$ 时，它包含 $x\to x_0^-$ 及 $x\to x_0^+$ 这两种变化过程．

1. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 1　函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 的定义域为 $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$（如图 1-2）．考察 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势．

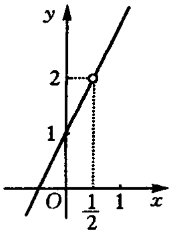


图 1-2

解　从图 1-2 中可以看出，当 x 无限接近于 $\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于 2．

这时称 2 为 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 的极限．

例 2　函数 $g(x)=-x^2+1$，定义域为 $(-\infty,\ +\infty)$（如图 1-3）．考察当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时函数 $g(x)$ 的变化趋势．

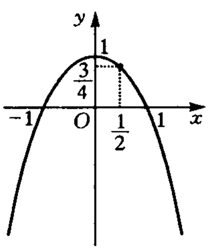


图 1-3

解　从图 1-3 中可以看出，当 x 无限接近于 $\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 的值无限接近于 $\dfrac{3}{4}$．

这时称 $\dfrac{3}{4}$ 为 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时函数 $g(x)=-x^2+1$ 的极限．

上面两例都考察了当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时函数的变化情况．例 1 中，函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 时没有定义；例 2 中，函数 $g(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处有定义．由此可见，函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处极限存在与否，与函数在 $x=x_0$ 处是否有定义无关．

为了叙述方便，我们将开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 称为以 x_0 为中心，$\delta>0$ 为半径的邻域，记为 $U(x_0,\ \delta)$；将开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，且 $x\neq x_0$ 称为以 x_0 为中心，$\delta>0$ 为半径的去心邻域，记为 $U(\hat{x}_0,\ \delta)$．

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一个去心邻域内有定义，当 $x\to x_0$ 时，如果函数 $f(x)$ 的值无限接近于某一个确定的常数 A，则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\ （或当\ x\to x_0\ 时，f(x)\to A）.$$

例 3　在单位圆上观察 $\lim\limits_{x\to0}\sin x$ 和 $\lim\limits_{x\to0}\cos x$ 的值．

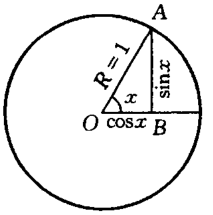


图 1-4

解　作单位圆，并取 $\angle AOB=x$（如图 1-4），则

$$\sin x=|BA|,\ \cos x=|OB|.$$

当 $x\to0$ 时，$|BA|\to0$，$|OB|\to1$，所以

$$\lim_{x\to0}\sin x=0,\ \lim_{x\to0}\cos x=1.$$

例 4 考察极限 $\lim\limits_{x\to x_0} C$（C 为常数）和 $\lim\limits_{x\to x_0} x$.

解 设 $f(x)=C$，$y=x$，因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的值恒等于 C，所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} C=C;$$

当 $x\to x_0$ 时，y 的值无限接近于 x_0，所以

$$\lim_{x\to x_0} y=\lim_{x\to x_0} x=x_0.$$

上面讨论了当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，这里 x 是以任意方式趋向 x_0 的. 但有时只能或只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋向 x_0（$x\to x_0^-$）的情况，或 x 仅从 x_0 的右侧趋向 x_0（$x\to x_0^+$）的情况.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左半邻域 $(x_0-\delta, x_0)$（其中 $\delta>0$）[或右半邻域 $(x_0, x_0+\delta)$] 内有定义，且当 $x\to x_0^-$（或 $x\to x_0^+$）时，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限（或右极限）**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0-0)=A\text{（即当 } x\to x_0^- \text{ 时，} f(x)\to A\text{）};$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A\text{（即当 } x\to x_0^+ \text{ 时，} f(x)\to A\text{）}.$$

根据 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限及左、右极限的定义，易得下面的定理.

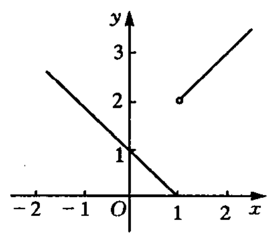


图 1-5

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

例 5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$ 当 $x\to 1$ 时的极限.

解 从图 1-5 可见，函数在 $x=1$ 处的左、右极限分别为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-x)=0,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(1+x)=2,$$

即函数在 $x=1$ 处的左、右极限都存在，但不相等，由定理 1 知，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

2. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看下面一个具体例子.

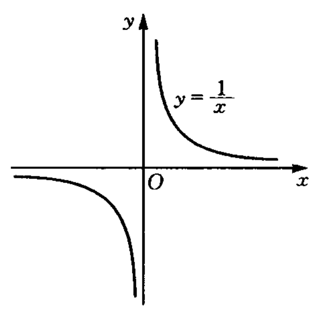


图 1-6

例 6 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$（如图 1-6），考察当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势.

解 从图 1-6 可以看出，当 $x\to\infty$ 时，曲线与 $y=0$（x 轴）无限接近. 也就是说，当 $x\to\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0.

这时称 0 为函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

定义 3 设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>a$（$a>0$）有定义，当 $x\to\infty$ 时，如果函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个确定的常数 A，则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{（或当 } x\to\infty \text{ 时，} f(x)\to A\text{）}.$$

例 7　考察函数 $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解　因为

$$f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2+\frac{3}{x^2+1},$$

所以当 $x\to\infty$ 时，对应的函数值 $f(x)=2+\dfrac{3}{x^2+1}$ 无限接近于常数 2，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2.$$

有时对某些函数，仅考虑当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内有定义，当 $x\to+\infty$ 时，如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个确定的常数 A，则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{（或 } x\to+\infty \text{ 时，} f(x)\to A\text{）}.$$

类似地，当函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 内有定义，当 $x\to-\infty$ 时，如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个确定的常数 A，则称常数 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限**，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{（或 } x\to-\infty \text{ 时，} f(x)\to A\text{）}.$$

例 8　求下列函数的极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x$；　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\arctan x$.

解　(1) 从图 1-7 可看出，当 $x\to+\infty$ 时，曲线与 $y=0$（x 轴）无限接近，即当 $x\to+\infty$ 时，对应的函数值无限接近于 0，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0.$$

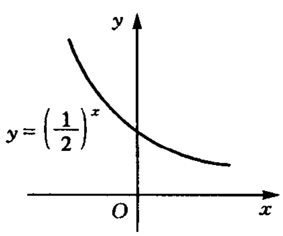


图 1-7

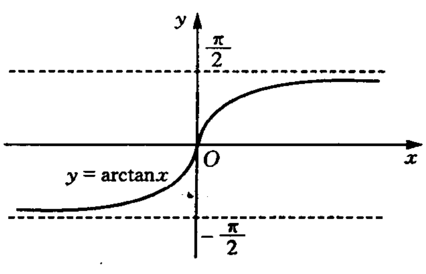


图 1-8

(2) 从图 1-8 可看出，当 $x\to+\infty$ 时，$y=\arctan x$ 无限接近于 $\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$ 时，$y=\arctan x$ 无限接近于 $-\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to\infty$ 时，$y=\arctan x$ 不接近于任意一个确定的常数. 所以，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

定理 2　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

二、数列的极限

定义 5 定义域为正整数集的函数 $y_n = f(n)$ 称为**整标函数**. 当自变量 n 按正整数 1, 2, …, n, …依次增大顺序取值时,函数值按相应的顺序排成一列数

$$f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots$$

称为**无穷数列**,记为 $\{f(n)\}$. 数列中的每一个数称为数列的**项**, 第 n 项 $f(n)$ 称为数列的**通项**.

例如

$$0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ 1+(-1)^n\frac{1}{n},\ \cdots;$$

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots;$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots;$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

都是数列, 它们的通项依次为

$$1+(-1)^n\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n},\ (-1)^{n+1},\ \frac{1}{2^n}.$$

由于数列是整标函数, 取横轴表示整标 n, 纵轴表示数列,即

$$y_n = f(n),$$

在直角坐标系中可用点列

$$(1,\ f(1)),\ (2,\ f(2)),\ (3,\ f(3)),\ \cdots,\ (n,\ f(n)),\cdots$$

来表示数列 $\{f(n)\}$. 由此, 可将数列 $\{f(n)\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限看成是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时极限的特例.

一般地,有如下定义.

定义 6 设数列 $\{f(n)\}$, 如果当 $n\to\infty$ 时, 对应的值 $f(n)$ 无限接近于某一个确定的常数 A, 则称该常数 A 是**数列 $\{f(n)\}$ 的极限**, 或者称**数列 $\{f(n)\}$ 收敛于 A**, 记为

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = A\ (\text{或 } n\to\infty \text{ 时}, f(n)\to A).$$

如果数列没有极限, 就称该数列是发散的或极限不存在.

习题 1-2

1. 写出下列数列的一般项.

(1) $\frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{7}{9},\ \cdots$; (2) 0, 1, 0, 1, …; (3) $0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{8},\ \cdots$.

2. 观察下列数列是否有极限, 若有极限, 请指出其极限值.

(1) $f(n)=\frac{(-1)^n}{n}$; (2) $f(n)=2+\frac{1}{n^2}$;

(3) $f(n)=\frac{3^n+(-1)^n}{2^n}$; (4) $f(n)=(-1)^n n$.

3. 下列极限是否存在? 若存在, 求出其极限值; 若不存在, 说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to3}(3x+1)$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|}{x}$.

4. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限，并说明 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时极限是否存在.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0,\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

第三节　无穷小量与无穷大量

在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）的变化过程中，$f(x)$ 有两种特殊的变化情况：一是 $f(x)\to 0$，二是 $|f(x)|$ 无限增大. 下面分别讨论这两种情况.

一、无穷小量的概念

1. 无穷小的定义

定义 1　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 当 $x\to 1$ 时为无穷小.

又如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小.

关于无穷小量应当注意：

(1) 说一个函数为无穷小必须指明自变量的变化趋势；

(2) 无穷小量是一个以 0 为极限的变量；

(3) 常数中只有“0”可以看作是无穷小量.

2. 无穷小的性质

性质 1　有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

性质 2　有界函数与无穷小量的积仍为无穷小量.

性质 3　有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量.

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，又 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，即 x 在 $x\to 0$ 时为无穷小，所以由性质 2 得，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时为无穷小，即

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解　已知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x,$$

因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 是有界函数，而 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，所以由性质 2 得，$\dfrac{1}{x}\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时为无穷小，即