万唯教育

WAN WEI EDUCATION

适用于全日制普通高级中学教科书

与学科专家面对面 与名校名师面对面

主编 武泽涛

面对面

讲练测

高二(上)

数学

颠覆1+1+1=3的理念

- 坚持讲练互动 迈向学科第一

西安出版社

适用于全日制普通高级中学教科书

主编 武泽涛

面对面

讲练测

本册主编 党效文

编　　者 党效文 朱宝霞 夏 炎 楚利平

唐颖鸿 罗军昌 蒲占领

数学

高二(上)

西安出版社

图书在版编目（CIP）数据

讲练测．高二数学．上/武泽涛主编．一西安：西安出版社，2006．5
（面对面）
ISBN 7-80712-235-8

Ⅰ.讲... Ⅱ.武... Ⅲ.数学课—高中—习题
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第047289号

面对面

面对面——讲练测·高二数学（上）

主　　编：武泽涛
出版发行：西安出版社
社　　址：西安市长安北路56号
电　　话：(029) 85253740
邮政编码：710061
印　　刷：西安信达雅印务有限责任公司
开　　本：880毫米×1230毫米　1/16
印　　张：97.75
字　　数：2150.5千
版　　次：2006年6月第1版
　　　　　2006年6月第1次印刷
印　　数：1—10000
ISBN 7-80712-235-8/G·189
定　　价：135.80元（共9册）

面对面 丛书编委会

·与名校名师面对面

·与学科专家面对面

面对面

万唯教育　倾心打造

高中同步《面对面·讲练测》

本套丛书紧跟教育改革的步伐，秉承"源于教材，高于教材"的宗旨，在紧抓知识点的同时注重对学生能力的培养，遵循将知识点与练习紧密结合，讲练互动的原则。做到融会贯通，举一反三，从而全面提高学生运用知识的能力和实际解决问题的能力。

丛书特色：营造真正的课堂

1. 全书以知识模块进行讲述，切合学生的认知水平。
2. 坚持互动模式、"针对性练习"，有重点的进行巩固提高。
3. "综合创新"和"新题探究"预测高考动向，紧跟高考发展趋势。
4. 技巧"点拨"、"类比发散"让学生以全新的视角掌握所学内容，拓展学生思维，培养学生的创新意识。
5. "本章方法透视"总结本章的经典解题方法，开阔学生的解题思路。

年级	科目	定价(元)
高一	语文	14.2
	数学	17.2
	英语	18.2
	物理	14.2
	化学	13.2
	历史	13.2
	政治	14.2
	地理	15.2
高二	语文	14.2
	数学	15.2
	英语	16.2
	物理	16.2
	化学	14.2
	历史	13.2
	政治	14.2
	地理	15.2
	生物	17.2

面对面

讲·练·测

讲解 一针见血　**练习** 学以致用　**测评** 有的放矢

同样的课程，这里有不同的精彩！

本节导读

列出本节的知识结构图，点明学习时应注意的问题，将本节要点以填空形式给出，启发思维，提高学习效率。

要点剖析

用精练的语言概括、整理知识点，通过精当的例题，分析思路，点拨方法，进一步巩固和拓展知识点。

针对性练习

针对每一个知识点给出对应的练习，巩固基础，提高能力。

综合创新

通过综合性强、解法灵活的题培养学生运用所学知识解决复杂问题的能力。

新题探究

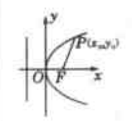
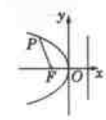
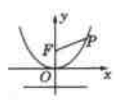
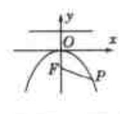
题目形式新颖，内容丰富，能引起学生的兴趣和思考，培养创新意识。

讲·练·测

第八章　圆锥曲线方程

8.6 抛物线的简单几何性质

本节导读

抛物线方程	$y^2=2px(p>0)$	$y^2=-2px(p>0)$	$x^2=2py(p>0)$	$x^2=-2px\ (p>0)$
图形				
焦点	$(\frac{p}{2},0)$	$(-\frac{p}{2},0)$	$(0,\frac{p}{2})$	$(0,-\frac{p}{2})$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
焦半径	$\lvert PF\rvert=x_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}-x_0$	$\lvert PF\rvert=y_0+\frac{p}{2}$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}-y_0$
对称轴	对称轴 x 轴		对称轴 y 轴	

学习中应注意的问题
1. 识记并理解不同形式的抛物线的几何性质;利用数形结合法,对加强理解和记忆是行之有效的.
2. 涉及到直线与抛物线的位置关系问题时,注意当直线和抛物线的对称轴平行时,直线与抛物线相交于惟一点,但不相切,注意直线与抛物线的位置关系的几何特点和代数表达的有机结合.
3. 加强抛物线的物理性质和几何性质的综合应用.

1. 抛物线$y^2=2px(p>0)$的取值范围是________.
2. 抛物线$x^2=2py(p>0)$中,p值越____,抛物线开口越____.
3. 抛物线$y^2=2px(p>0)$的通径是________.

要点剖析

知识点一：理解并掌握抛物线的几何性质在求解抛物线方程中的应用，提高应用知识解决问题的能力.

例1　抛物线的顶点在原点,对称轴是坐标轴,且焦点在直线$3x-4y-12=0$上,求此抛物线的方程.

思路分析:根据抛物线的几何特征,由题意知焦点是直线$3x-4y-12=0$与坐标轴的交点,因而本题需分两种情况进行讨论.

解:依据题意抛物线的方程是标准方程.焦点是坐标轴与$3x-4y-12=0$的交点,即$(4,0)$或$(0,-3)$.

故所求方程为$y^2=16x$或$x^2=-12y$.

点拨:求解抛物线方程时,应先弄清所求方程是否为标准形式,本题中焦点有两种情况,以防漏解.

针对性练习

1. 顶点在原点,焦点为曲线$y=\sqrt{x+4}$与坐标轴的交点的抛物线方程是______.

面对面

献出我们的爱心，成就你的学业

万唯教育 倾情奉献

说明 本丛书样张按学科分别设计，通过样张您可了解本书栏目、功能等基本信息，仅供参考，如所购图书与样张有个别区别，以所用图书为准。

综合创新

例 6 已知抛物线 $x^2=2y$ 的焦点 F，准线 l，过 l 上一点 P 作抛物线的两条切线，切点分别为 A、B.

(1)证明：直线 PA 垂直于直线 PB；

(2)若 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=\lambda\overrightarrow{FP}^2$，试求实数 λ 的值.

思路分析：(1)欲证明 $PA\perp PB$，只需证它的斜率互为负倒数.(2)寻找 A、B、P 的坐标之间的关系，从而由已知条件得 λ 的值.

证明：(1)抛物线 $x^2=2y$ 的准线 l 的方程是 $y=-\frac{1}{2}$，……

6. 如图：设 $(x-2)^2+y^2=3$ 的圆心为 C，此圆和抛物线 $y^2=px(p>0)$ 有四个交点，若在 x 轴上方的两个交点为 A、B，坐标原点为 O，$\triangle AOB$ 的面积为 S.

(1)求 p 的取值范围.

(2)求 S 关于 p 的函数 $f(p)$ 的表达

……

新题探究

例 6 抛物线方程 $y^2=p(x+1)(p>0)$，直线 $x+y=m$ 与 x 轴的交点在抛物线的准线的右边.

(1)设直线与抛物线的交点为 Q、R，且 $OQ\perp OR$，求 p 关于 m 的函数 $p=f(m)$ 的表达式.

(2)在(1)的条件下，若 m 变化，使得原点 O 到直线 QR 的距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 p 的取值范围.

思路分析：根据题设条件 $OQ\perp OR$，通过韦达定理建立 p 与 m 的等式关系，得 $p=f(m)$ 的表达式，第 2 问可利用函数的知识求 p 的取值范围.

解：(1)设直线与抛物线的交点 $Q(x_1,y_1)$，$R(x_2,y_2)$，由 $OQ\perp OR$.得 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

……

点拨：本题是平面解析几何和代数内容的综合题，解题应注重审题和学科间内容的融合.

节后练习

一、选择题：

1. 过点 $M(-1,1)$ 与抛物线 $y^2=ax(a>0)$ 仅有一个公共点的直线有且仅有 ( )

A. 1条　B. 2条

C. 3条　D. 1条或2条或3条

2. 抛物线 $y^2=2x$ 到直线 $x-y+1=0$ 距离最短的点 ( )

A. $(\frac{1}{2},1)$　B. $(1,1)$

C. $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$　D. $(\frac{1}{4},1)$

趣味阅读

用折纸法画抛物线

抛物线用圆规直尺是作不出来的，可是用一张矩形的纸却可以“折出”一段抛物线.具体作法如下：

……

不妨可以试一试.

本章总结

本章主要研究了圆锥曲线的定义、方程和几何性质，以及它们在实际生活中的简单应用，它涉及的数学思想主要有数形结合、分类讨论和等价转化思想；……

本章方法透视

1. 数形结合在圆锥曲线及相关问题中的应用.

例1 已知 x、y 满足条件 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}\leqslant1$，求 $y-3x$ 的最大值和最小值.

思路分析：本题可转化为在椭圆上找一点，使过该点的直线 $y-3x=m$ 的截距分别为最大和最小.

本章综合测评

高二·数学

本节练习

一组难易梯度合理的练习题，巩固知识点，使学生了解学习中存在的不足。

趣味阅读

将本节知识与实际生活中的问题相联系，激发学生学习数学的兴趣，开阔视野，学以致用。

本章方法透视

通过典型例题对本章所涉及的数学思想和方法进行总结，再辅以练习，使学生能从整体上把握各知识点间的联系，提高分析问题和解决问题的能力。

本章综合测评

全方位考查本章主干知识，适度渗透高考意识，旨在让学生夯实基础，不断提高。

征稿启事

为了加强对高中同步类教辅的研究，充分展现优秀教师对高中同步讲练类教辅的精、准把握，打造高中同步精品教辅，以飨广大读者，我们本着积极、开放的态度，现面向全国教育界（包括课改区和非课改区）征集同步讲练类稿件。相信您的智慧、我们的努力，将会铸就更具价值的品牌教辅。

对于您的积极参与，我们将会以实际行动给予您更多的支持和鼓励。

一、征稿对象

1. 各省、市、地、县的高中一线优秀教师，特别欢迎高级、特级教师踊跃投稿。

2. 各省、市、地、县教研室和考试中心的研究员。

二、征稿内容

高一、高二所有科目。

三、征稿要求

1. 稿件在题量、题型、知识点覆盖等方面要充分考虑学生实际，由浅入深，精心设置梯度，并适度、前瞻地把握高考动态和趋向，渗透高考意识。

2. 所提供的稿件中每道题都应附有相应的解析和参考答案，包括本题考查的知识点、解题思路及答案。

3. 要避免重题现象。

4. 鼓励原创稿件，严禁拼凑。

四、稿件报酬

一经采用，稿酬从优。具体稿酬请致电垂询。

(请沿此虚线剪下)

反馈信息我自写，精彩创意得“表”达

姓名：________（老师请填）所教科目：________（学生请填）年级：________

所购的是高________（科目）________

学校名称：________ □省级重点 □市级重点 □县（区）重点 □普通

通信地址：________ 邮编：________ QQ：________

您获得此书是通过：

□学校统一征订 □自己购买 □老师或家长推荐 □同学介绍 □广告宣传

其他途径：________

您购买此书的理由：________

□内容好 □体例比较实用、新颖 □答案准确、详细

其他原因：________

您觉得本书的整体难度： □太简单 □适中 □偏难

您认为本书的优点和缺憾分别是：________

____

请您对本书（丛书）提出宝贵的意见和建议：（如被采用，必有奖励）

____

____

名师投稿及读者来信均请寄至：西安市文艺北路中联颐华苑A座103室

收信人：研发五　　邮编：710054　　电话：029-87805570

欢迎登陆我们的网站：www.wanweiwenhua.com

E-mail：wanweiwenhua@126.com

编者寄语

当前的高中同步教辅资料举不胜举，可其中能让人眼睛一亮的同步教辅却少之又少。究其原因，是少有“创新”的缘故。为此，我们在深入研究高中教材和考试改革的基础上，组织长期工作在教学一线的学科带头人和重点中学的特、高级教师，精心策划编写了这套《面对面·讲练测》系列丛书。

本丛书秉承了“源于教材，高于教材”的宗旨，不仅巩固基础知识，而且能充分调动学生主观能动性，提高学生自学能力，培养学生创新意识和思维方法。全书栏目设置合理、新颖，是科学性和创新性的有机结合，能更有效地解决学生学习过程中出现的问题。书中讲解直击知识要点，深入精髓，切合学生的认知水平；练习注重知识的迁移与引申，将知识融于问题，让学生学以致用，突出素质的培养；测评考查综合技能，紧跟考试动向，训练“应试”的能力，使学生始终走在最前沿。

在这套系列丛书即将面市之际，我们有信心，也有决心让它来满足学生学习和教师教学的需要，我们会尽最大努力不断完善， 使其成为高中同步类教辅图书家庭中的“先锋”。

最后，感谢那些给我们帮助和支持的作者及顾问老师。因为有他们的帮助和支持，我们的系列丛书才能如期面市；同时也要感谢读者你，因为你的信任和选择，我们的系列丛书才会实现“相同的课程，这里有不同的精彩”……

编 者

目录

第六章　不等式

第七章　直线和圆的方程

目录

第六章　不等式

6.1　不等式的性质

本节导读

不等式的性质
- 不等式的地位 ⟶ 不等式是研究数量大小关系的必备知识，是学习高等数学的基础和工具，也是中学数学的重点内容，望同学们能认真学习.
- 求差比较法 ⟶ 求差比较法是将大小关系转化为运算关系去判断，是转化思维的体现，也是比较大小的最基本方法.
- 不等式的性质 ⟶ 不等式的性质是研究不等式的基础内容. 扎实的基础对学习不等式非常重要，同时要特别注意不等式可乘性的限制条件.

1. 实数 a、b 大小比较的基本方法 —— 求差法的具体内容为________________________.

2. 不等式有五个性质分别用字母表示出来为：(1) 对称性____________；(2) 传递性____________；(3) 同项不等式的可加性____________，(移项法则____________)；(4) 两个同项不等式的可乘性____________；(5) 开方性____________.

要点剖析

知识点一：作差比较法是将实数大小关系转化为实数运算，通过实数运算比较大小的方法.

例 1　若 a、b、c 满足 $b+c=3a^2-4a+6$，$b-c=a^2-4a+4$，试比较 a、b、c 的大小.

思路分析： 题中已有 b 与 c 差的形式，因此只要设法表示出 b 与 a、c 与 a 的差，然后通过实数运算判断出大小关系.

解： $\because b-c=a^2-4a+4=(a-2)^2\geqslant 0$，

$\therefore b\geqslant c$.

由 $\begin{cases} b-c=a^2-4a+4, \\ b+c=3a^2-4a+6. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b=2a^2-4a+5, \\ c=a^2+1. \end{cases}$

从而 $c-a=a^2-a+1=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，$\therefore c>a$.

故 $b\geqslant c>a$.

点拨： 此题的解法是解方程和作差比较法的结合，同时在实数运算的处理中多次用到配方法，应引起大家的关注. 同时配方法也是不等式变形中的最基本手段，望能引起同学们的重视.

针对性练习

1. 函数 $f(x)=3x^2+1$，$g(x)=2x^2+x-1$，判断 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之间的大小关系.

知识点二:应用不等式性质去解决问题,是处理不等关系的基本出发点,是逻辑论证和推理变形的重要方法.

例2 当 $c>a>b>0$ 时,比较 $\frac{a}{c-a}$ 与 $\frac{b}{c-b}$ 的大小.

思路分析: 通过 c、a、b 的大小关系,判断出 $\frac{1}{c-a}$ 与 $\frac{1}{c-b}$ 的大小,再用不等式的传递性和不等式的可乘性得出结果.

解: $\because c>a>b>0$, $\therefore c-b>c-a>0$,

即 $\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}$, $\therefore \frac{a}{c-a}>\frac{a}{c-b}$.

又 $a>b>0$, $\therefore \frac{a}{c-b}>\frac{b}{c-b}$.

故 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

点拨: 首先应明确理解题目的结构特征,然后利用不等式的性质对题中结构定向变形.

知识点三:利用比较大小的方法去解决实际问题,是比较法及不等式性质的主要作用.同时建模法也是考查用数学方法处理实际问题能力的一种方法,需准确理解题意,有效转化信息,合理抽象问题.

例3 甲、乙二人沿着同一条路同时从 A 地出发走向 B 地,甲用速度 v_1 与 v_2 各走全程的一半,乙用 v_1 与 v_2 各走全程所需要时间的一半,试判断甲、乙谁先到达 B 地,并证明你的结论($v_1\neq v_2$).

思路分析: 此题是利用不等式性质求解的应用题,先用建模方法表示出甲、乙各走完全程所需的时间,列出对应的数学式子然后再比较大小.

解: 设全程为 $2s$,则甲走完全程所需时间为 $t_1=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}$,乙走完全程所需时间为 $t_2=\frac{4s}{v_1+v_2}$.

$$\because t_2-t_1=\frac{4s}{v_1+v_2}-\left(\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}\right)$$
$$=\frac{s[4v_1v_2-(v_1+v_2)^2]}{v_1v_2(v_1+v_2)}$$
$$=\frac{-s(v_1-v_2)^2}{v_1v_2(v_1+v_2)}<0(v_1\neq v_2),$$

即 $t_2<t_1$,故乙先到达 B 地.

点拨: 作差比较法提供了一种比较大小的思维形式,而本质是提供了转化的途径.

2. 已知 $a>b>0$,$c>d>0$,$n\in\mathbf{N}$,且 $n>1$.

求证:$\sqrt[n]{\frac{a}{d}}>\sqrt[n]{\frac{b}{c}}$.

3. 已知在 a 升盐水中,含盐量为 b 克,如果在盐水中再加入 m 克盐,那么盐水更咸,请你用不等式的性质说明其理由.

综合创新

例4 已知 $x>y>0$,试比较 $\sqrt{\frac{y^2+1}{x^2+1}}$ 与 $\frac{x}{y}$ 的大小.

解: 因为直接作差有困难,不妨平方后作差即:

$$\frac{y^2+1}{x^2+1}-\left(\frac{x}{y}\right)^2$$
$$=\frac{y^2(y^2+1)-x^2(x^2+1)}{y^2(x^2+1)}$$
$$=\frac{(y^4-x^4)+(y^2-x^2)}{y^2(x^2+1)}$$

4. 已知 $a>b>c>d>0$,且 a、b、c、d 成等差数列,请确定 $\lg\frac{a}{b}$、$\lg\frac{b}{c}$、$\lg\frac{c}{d}$ 的大小.

$$= \frac{(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 + 1)}{y^2(x^2 + 1)} < 0,$$

所以$\frac{y^2 + 1}{x^2 + 1} < (\frac{x}{y})^2$,

即$\sqrt{\frac{y^2 + 1}{x^2 + 1}} < \frac{x}{y}$.

点拨:平方后作差是转化方法的体现,是难点突破的重要手段.

新题探究

例5　有一所学校,原来是一个长方形布局,市政府对这所学校进行规划,必须改成正方形布局,但要求要么保持原面积不变,要么保持原周长不变,那么这所学校应选哪种布局对学校来说有利?

解:要对学校有利,学校应选择占地面积大的,不妨设原长方形两边长分别为 a、$b(a \neq b)$,则其面积 $S = ab$,周长为 $2(a + b)$.

①若保持原面积不变,则重新规划的学校占地面积仍为 $S = ab$.

②若保持原周长不变,则重新规划的学校边长为 $\frac{a+b}{2}$,其面积为 $S' = (\frac{a+b}{2})^2$.

因为 $S' - S = \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a-b)^2}{4} > 0$,

所以重新规划时,学校应选择保持原周长不变的布局对学校有利.

点拨:此题从日常生活中提炼数学问题,显出数的生动,同时也突出了数学应用的广泛性.

节后练习

一、选择题

1. 若 $a < b < 0$,则下列不等式中不能成立的是　(　　)

A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

C. $|a| > |b|$　　D. $a^2 > b^2$

2. 下列是真命题的是　(　　)

A. 若 $a > b, c > d$,则$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

B. a、$b \in \mathbf{R}$,且 $a > |b|$,则 $a^n > b^n (n \in \mathbf{N}_+)$

C. a、b、$c \in \mathbf{R}$,且 $a > b$,则 $ac^n > bc^n (n \in \mathbf{N}_+)$

D. a、b、$c \in \mathbf{R}$,且 $a > b$,则 $ac^2 > bc^2$

3. 已知 $a > b, c > d$,则下列式子成立的是　(　　)

A. $4a + 8c > 4b + 8d$　　B. $4a + 8d > 4b + 8c$

C. $4a - 8c > 4b - 8d$　　D. $4a + 4c > 8b + 8d$

4. 若 $a > b + 1$,则下列各式正确的是　(　　)

A. $a^2 > b^2$　　B. $\frac{a}{b} > 1$

C. $\lg(a - b) > 0$　　D. $\lg a < \lg b$

5. 若 $a > b > c$,则有　(　　)

A. $\frac{1}{a-c} > \frac{1}{b-c}$　　B. $ac > bc$

C. $\frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-c}$　　D. $ac < bc$

二、填空题

6. 若 $-1 < a < b < 1$, $-2 < c < 3$,则$(a - b)c$ 的取值范围为__________.

7. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对应边为 a、b、c,给出以下论断:

①$a^{-c} < b^{-c}$;　②$\frac{b}{b+c} < \frac{a}{a+b}$;

③$\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$;　④$\sin A > \sin B$.

以论断①②③中的一个作条件,论断④作结论,组成命题,写出你认为不正确的一个命题______________.

三、解答题

8. 若实数 a、b、c、d 满足①$d > c$;②$a + b = c + d$;③$a + d < b + c$. 试确定 a、b、c、d 的大小.

9. 已知$f(x) = ax^2 - c$,且 $-4 \leq f(1) \leq -1$, $-1 \leq f(2) \leq 5$,求$f(3)$的取值范围.

6.2 算术平均数与几何平均数

本节导读

算术平均数与几何平均数
- 重要的不等式的几种形式 ⟶
  - $a^2+b^2\geqslant 2ab(a、b\in\mathbf{R})$
  - $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}(a、b>0)$
  - $a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}(a、b\in\mathbf{R})$
  - $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}(a、b\in\mathbf{R})$
  - $\left|\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right|\geqslant 2(x、y\neq 0,x、y\in\mathbf{R})$
- 均值不等式及应用 ⟶ 均值不等式是处理算术平均数与几何平均数的关系的定理，是重要的数学模型，应用时应注意定理条件的要求.

1. 对正数 a、b，我们称 a、b 的算术平均数为________，a、b 的几何平均数为________，二者的关系为________.
2. 在使用均值不等式时，我们所说的“一正二定三相等”的含义是________________.
3. 重要的不等式和均值不等式分别用图形解释为________________.

要点剖析

知识点一：利用均值不等式比较大小.

例1 (1) 已知 $0<a<1,0<b<1$，则 $a+b,2\sqrt{ab},a^2+b^2,2ab$ 中最大的一个是______；

(2) 若 $a>b>1,P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b},Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b),R=\lg\frac{a+b}{2}$，则 (　　)

A. $R<P<Q$　　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　　D. $P<R<Q$

思路分析：从均值不等式和对数函数性质考虑.

解：(1) $\because 0<a<1,0<b<1$，

$\therefore a+b\geqslant 2\sqrt{ab},a^2+b^2\geqslant 2ab$，

即4个数中最大的应从 $a+b$、a^2+b^2 中选择.

又 $a+b-(a^2+b^2)=a(1-a)+b(1-b)>0$，

所以 $a+b>a^2+b^2$，故 $a+b$ 是最大的一个.

(2) $\because a>b>1$，

$\therefore \lg a>\lg b>0$，

$\therefore Q=\frac{\lg a+\lg b}{2}>\sqrt{\lg a\cdot\lg b}=P.$

又 $\because \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，

$\therefore R=\lg\frac{a+b}{2}>\lg\sqrt{ab}=Q.$

故 $P<Q<R$，应选B.

点拨：在使用均值不等式比较大小时，首先应找出 $a^2+b^2,a+b,2ab,2\sqrt{ab}$ 这些结构，然后考虑均值不等式使用的条件，合理、定向去判断.

针对性练习

1. 若 $a>b>0$，则 $\frac{2ab}{a+b},\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}$ 的大小关系为__________.

知识点二：利用均值不等式求最值.

例2　当 $x > -1$ 时，求函数 $y = x + \frac{1}{x+1}$ 的最小值.

思路分析：配凑 $(x+1) + \frac{1}{x+1}$ 的结构.

解：$\because x > -1, \therefore x + 1 > 0$，

即 $y = (x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 \geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}} - 1 = 1$（当且仅当 $x + 1 = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x = 0$ 时，等号成立）.

所以当 $x = 0$ 时，$y_{\min} = 1$.

点拨：对均值不等式模式的联想，促进配凑的完成.

例3　已知直角三角形的周长为定值 l，求它的面积的最大值.

思路分析：通过周长去表示出直角三角形的直角边，再建立面积的关系式求最值.

解：设此直角三角形两直角边长分别为 a、b，

则 $l = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$，此三角形面积为 $S = \frac{1}{2}ab$.

$\because l = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 2\sqrt{ab} + \sqrt{2ab}$（当且仅当 $a = b$ 时，等号成立），

$\therefore l \geqslant 2\sqrt{2S} + \sqrt{4S}$.

即 $\sqrt{S} \leqslant \frac{l}{2\sqrt{2}+2}, S \leqslant \frac{l^2}{4(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{l^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}$.

故当 $a = b = \frac{l}{2+\sqrt{2}}$ 时，此三角形的面积 $S_{\max} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4}l^2$.

点拨：$a + b, a^2 + b^2$ 与 ab 的转化是解决此题的关键.

知识点三：利用均值不等式证明不等式.

例4　已知 a、b、c、d 都是正数，求证：$(ab + cd)(ac + bd) \geqslant 4abcd$.

思路分析：利用均值不等式从一端变形证明.

证明：$\because a$、b、c、d 都为正数，

$\therefore ab + cd \geqslant 2\sqrt{abcd} > 0$，　①

$ac + bd \geqslant 2\sqrt{acbd} > 0$，　②

由 ① × ② 得 $(ab + cd)(ac + bd) \geqslant 4abcd$.

点拨：发现均值不等式的结构是解决此题的关键.

例5　设正数 a、b、c，求证：$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c$.

思路分析：此不等式形式与均值不等式的结构有区别，并注意到左边是分式，右边是整式，给此不等式两边同加上 $a + b + c$，即得 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geqslant 2a + 2b + 2c$，使符合均值不等式结构，问题迎刃而解.

证明：$\because \frac{a^2}{b} + b \geqslant 2\sqrt{a^2}, \frac{b^2}{c} + c \geqslant 2\sqrt{b^2}, \frac{c^2}{a} + a \geqslant 2\sqrt{c^2}$，

将上面三式相加得 $\frac{a^2}{b} + b + \frac{b^2}{c} + c + \frac{c^2}{a} + a \geqslant 2a + 2b + 2c$，

所以 $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c$.

点拨：用分式与整式间的差异联想均值不等式，通过变形，构造均值不等式模式.

2. 求函数 $y = 4x^2 + \frac{1}{x^2}$ 的最小值.

3. 已知 $x + 2y = 4$，且 $x > 0, y > 0$. 求 $\lg x + \lg y$ 的最大值.

4. 求半径为 R 的圆内接矩形面积的最大值.

5. 若 a、b、c、d 都为正数.

求证：$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.

综合创新

例6　已知 a、b 为正数，且 $a^2+\frac{b^2}{2}=1$，求 $a\sqrt{1+b^2}$ 的最大值以及达到最大值时 a、b 的值.

解：∵ 对正数 x、y，有 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$.

$\therefore \sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}$.

$$即\ a\sqrt{1+b^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1+b^2}{2}}$$

$$\leqslant\sqrt{2}\cdot\frac{a^2+\frac{1+b^2}{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(a^2+\frac{b^2}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

所以当且仅当 $a^2=\frac{1+b^2}{2}$ 时，上式取等号.

$$又\begin{cases}a^2=\frac{1+b^2}{2},\\ a^2+\frac{b^2}{2}=1,\\ a、b>0.\end{cases}\quad 即\begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ b=\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

故当 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$a\sqrt{1+b^2}$ 有最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

点拨：重要不等式配凑时，要从和为定值和等号成立的条件去考虑，才能求出最值.

6. 设 $a>0$ 且 $a\neq 1$，试比较 $\log_a\frac{t+1}{2}$ 与 $\log_a 2t$ 的大小.

新题探究

例7　已知 $x>0$，$y>0$，$x+y=1$.

求证：$\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)\geqslant 9$.

证明：∵ $x+y=1$，

$\therefore \frac{1}{x}+1=\frac{x+y}{x}+1=2+\frac{y}{x}$，

即 $\left(\frac{1}{x}+1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)=\left(2+\frac{y}{x}\right)\left(2+\frac{x}{y}\right)$

$=5+2\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$

$\geqslant 5+4=9$（当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=y=\frac{1}{2}$ 时，等号成立）.

点拨：将1换成 $x+y$ 的变形，是能够运用重要的不等式的关键.

节后练习

一、选择题

1. 若 $0<a<b$，且 $a+b=1$，则下列4个数中最大的是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. a^2+b^2

C. $2ab$　　D. a

2. 若 x、$y>0$，且 $x+y\leqslant 4$，则下式不等式中恒成立的是（　　）

A. $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$

C. $\sqrt{xy}\geqslant 2$　　D. $\frac{1}{xy}\geqslant 1$

3. 设 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $a+b=3$，则 2^a+2^b 的最小值为（　　）

A. 6　　B. $4\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{6}$