

中国中学生

ZHONGGUO
ZHONGXUESHENG

SHUXUE JIETI
FANGFA DAQUAN

陈振宣
杨象富

主编

数学
解题
方法
大全
(初中)



上海远东出版社

封面设计：胡振钰



ISBN 7-80613-309-7



9 787806 133095 >

ISBN 7-80613-309-7/G · 417

定价：20.00 元

中国中学生数学解题 方法大全(初中)

陈振宣 杨象富 主编

上海远东出版社

中国中学生数学解题方法大全(初中)

陈振宣 杨象富 主编

上海远东出版社出版发行



邮政编码 200233

厂印刷

30,000

1996 年 3 月

1 次印刷

印数 62001-83000

ISBN 7-80613-309-7/G · 417 定价: 20.00 元

主 编 陈振宣 杨象富

编辑委员 (按姓氏笔画为序)

王永利 杨象富 邹一心

陈振宣 施庆一 唐尚斌

目 录

第一编 基础知识、基本方法

代 数

第一章 代数初步知识	陈永莉 (1)
一、代数式与数学符号语言	(1)
二、公式与简易方程	(7)
三、复习与小结	(12)
第二章 有理数	陈永莉 (19)
一、有理数的意义	(19)
二、有理数的加减法运算	(23)
三、有理数的乘、除、乘方及混合运算	(26)
四、近似数、有效数字、平方表、立方表	(30)
五、复习与小结	(32)
第三章 整式的加减	陈永莉 (39)
一、整式与同类项	(39)
二、去括号、添括号和整式加减法	(42)
三、复习与小结	(45)
第四章 一元一次方程	陈永莉 (51)
一、等式与方程的概念、性质	(51)
二、一元一次方程的解法	(54)
三、一元一次方程的应用	(57)
四、复习与小结	(64)
第五章 二元一次方程组	严 正 (71)
一、二元一次方程组及其解法	(71)

二、三元一次方程组的解法及应用	(76)
三、复习与小结	(81)
第六章 一元一次不等式	韦淑萍 (89)
一、一元一次不等式组的解法	(89)
二、复习与小结	(95)
第七章 整式的乘除	(101)
一、整式的乘法	翁执中 (101)
二、乘法公式	翁执中 (104)
三、整式的除法	陈玮珂 (108)
四、复习与小结	陈玮珂 (113)
第八章 因式分解	李顺宝 (121)
一、因式分解与提公因式法	(121)
二、运用公式法	(125)
三、分组分解法	(129)
四、十字相乘法	(132)
五、复习与小结	(138)
第九章 分式	张胜坤 (145)
一、分式概念和基本性质	(145)
二、分式运算	(149)
三、比例	(156)
四、有关的方程	(160)
五、复习与小结	(165)
第十章 数的开方	张胜坤 (174)
一、平方根	(174)
二、立方根	(178)
三、实数	(181)
四、复习与小结	(185)

第十一章 二次根式	张胜坤 郑瑞岳 (192)
一、二次根式的概念、性质和最简二次根式	(192)
二、二次根式的运算	(198)
三、二次根式的混合运算	(202)
四、复习与小结	(210)
第十二章 一元二次方程	陈永箴 (219)
一、一元二次方程及其解法	(219)
二、一元二次方程的判别式与韦达定理	(222)
三、二次三项式的因式分解与 <u>一元二次方程的应用</u>	(226)
四、分式方程	(230)
五、无理方程和简单的高次方程	(235)
六、二元二次方程组	(239)
七、复习与小结	(246)
第十三章 函数及其图象	陈永箴 (259)
一、平面直角坐标系	(259)
二、函数及其图象	(263)
三、一次函数与反比例函数	(268)
四、二次函数	(274)
五、复习与小结	(280)
第十四章 统计初步	陈永箴 (291)

几 何

第一章 线段、角	柴盛楠 (304)
一、直线、射线、线段	(304)
二、角	(309)
三、复习与小结	(315)

第二章 相交线、平行线	杨象富 (326)
一、相交线、垂线	(326)
二、平行线	(332)
三、命题、定理、证明	(338)
四、复习与小结	(341)
第三章 三角形	(351)
一、三角形的概念与基本性质	周德飞 (351)
二、全等三角形	周德飞 (359)
三、角平分线	乔兰芳 (368)
四、尺规作图	周莉芝 (372)
五、等腰三角形	周莉芝 (376)
六、线段的垂直平分线	周莉芝 (382)
七、直角三角形	皮景华 (389)
八、勾股定理	皮景华 (395)
九、复习与小结	周德飞 (401)
第四章 四边形	(412)
一、多边形的内角和	董莉元 (412)
二、平行四边形的判定与性质	任炳熹 (417)
三、矩形、菱形、正方形的判定与性质	任炳熹 (424)
四、梯形的判定与性质	任炳熹 (432)
五、复习与小结	汪文英 (439)
第五章 相似三角形	(451)
一、比例线段	吴敏珠 (451)
二、相似三角形及其判定	吴敏珠 (459)
三、相似三角形的性质	任炳熹 (465)
四、相似多边形	周德飞 (470)
五、复习与小结	吴敏珠 (476)

第六章 解直角三角形	(486)
一、锐角三角比——正弦和余弦	童莹莹 (486)
二、锐角三角比——正切和余切	童莹莹 (491)
三、解直角三角形及其应用	顾圣凡 (497)
四、复习与小结	顾圣凡 (506)
第七章 圆	(517)
一、圆的概念	袁义华 (524)
二、圆的对称性与旋转不变性	袁义华 (524)
三、圆周角、圆的内接四边形	谢慕瑾 (530)
四、直线与圆的位置关系	胡建青 (537)
五、圆的切线作法与切线长	胡建青 (542)
六、三角形的内切圆与弦切角	胡建青 (546)
七、和圆有关的比例线段	胡建青 (551)
八、圆与圆的位置关系	徐国庆 (555)
九、正多边形和圆	徐国庆 (561)
十、圆周长和圆面积	徐国庆 (569)
十一、复习与小结	陈振宣 (575)
第八章 几种简单几何体	贝跃敏 (587)
一、长方体、正棱柱、正棱锥.....	(587)
二、圆柱、圆锥.....	(595)
三、复习与小结.....	(601)

第二编 常用的数学思维方法

第一章 发现真理的思维方法	(612)
一、归纳思维.....	(612)
二、类比思维.....	(619)
三、直觉思维.....	(626)

第二章 推理与证明	(630)
一、推理.....	(630)
二、推理规则.....	(630)
三、证明.....	(635)
四、综合法（顺推法）.....	(635)
五、分析法（逆推法）.....	(638)
六、四种命题的关系.....	(639)
七、反证法.....	(642)
第三章 若干常用的数学思维方法	(649)
一、方程思想.....	(649)
二、变换思想.....	(655)
三、参数思想.....	(670)
第四章 若干常用的策略思想	(677)
一、逻辑划分.....	(677)
二、等价与非等价转化.....	(692)

第一编 基础知识、基本方法

代 数

第一章 代数初步知识

一、代数式与数学符号语言

知识与方法提要

1. 数学是研究数量关系和空间形式的科学. 为了表达数量关系和空间形式, 离不开语言这一思维载体. 我们把表达数量关系和空间形式的语言称为数学语言. 一般表达数量关系和空间形式的数学语言有三种形态: 一种是自然语言, 即日常应用的普通语言, 既可口述, 也可形诸文字. 第二种是借用数学符号和字母的符号语言, 也就是狭义的数学语言. 第三种是应用图象的直观形象的图象语言. 这三种语言形态都是学习与应用数学常用的数学思维表达的工具.

代数的历史是从字母代替数字开始的. 自从引入字母代替数字(简称字母代数)这一观念以后, 大大丰富了数学语言中的符号语言. 数学符号语言便于反映数学科学的一般规律, 既简且明, 为简缩思维提高思维效率创造了条件.

例如加法的交换律: 两数相加, 交换加数的位置, 它们的和不变.

如果用 a, b 分别表示两个加数, 则上述表达加法交换律的自然语言, 可译成符号语言如下: $a+b=b+a$.

2. 上述这种用字母、数字、运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)连结起来的式子叫做代数式. 单独一个字母或数字也是代数式.

如: 3 、 V 、 abc 、 $\frac{S}{t}$ 、 $3x^2-5x+1$ 、 a^2-b^2 等等都是代数式.

用数值代替代数式中的字母,按照代数式指明的运算,计算出的结果叫做代数式的值.

3. 为了表示不同的代数式,引进记号: $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$, $G(x)$, $\dots$ 表示含 x 的代数式.

例如, 设 $f(x)=x^3-1$, $g(x)=2x^2-3x+1$, $\dots$ 那么当 $x=2$ 时, 上述两代数式 $f(x)$, $g(x)$ 的值, 可化为 $f(2)=2^3-1=7$; $g(2)=2\times 2^2-3\times 2+1=8-6+1=3$.

引入这样的记号, 又为丰富数学符号语言提供了条件.

为了更好地学习符号语言, 相应地要初步掌握下面两种常用的思维方法:

- ① 抽象概括法;
- ② 不完全归纳法.

下面在范例中具体说明.

范 例

例 1 将下列自然语言译成符号语言:

- (1) x, y 两数的平方和;
- (2) x, y 两数和的平方;
- (3) a 的立方与 b 的积;
- (4) a 的平方除以 b 的商;
- (5) 两数 a, b 的立方和除以 a 与 b 的和;
- (6) 两数 a, b 和的平方减去 a 与 b 的差的平方.

[解] (1) x^2+y^2 ; (2) $(x+y)^2$;

$$(3) a^3b;$$

$$(4) \frac{a^2}{b};$$

$$(5) \frac{a^3+b^3}{a+b};$$

$$(6) (a+b)^2 - (a-b)^2.$$

例2 说出下列代数式的意义:

$$(1) a - \frac{c}{b};$$

$$(2) \frac{c}{a-b};$$

$$(3) x^3 - y^3;$$

$$(4) (x-y)^3.$$

[解] (1) a 减去 c 除以 b 的商所得的差;

(2) c 除以 a 减去 b 的差所得的商;

(3) 两数 x 与 y 的立方差;

(4) 两数 x 与 y 的差的立方.

[说明] 例1,2是代数符号语言与自然语言的互译训练,这是数学思维训练的基本功.

例3 一物体作匀速直线运动, t 秒钟内走的路程为 S (米):

路程: S (米)	运动的时间: t (秒)
S_0	0
$10+S_0$	1
$20+S_0$	2
$30+S_0$	3
$40+S_0$	4

(1) 用 t 和 S_0 表示 S ;

(2) 如果 $S_0=50$ (米), $S=150$ (米), 试求 $t=?$

[解] (1) $\because t=1$ 时, $S=10+S_0$,

$$t=2 \text{ 时}, S=20+S_0=2 \times 10+S_0,$$

$$t=3 \text{ 时}, S=30+S_0=3 \times 10+S_0,$$

$$t=4 \text{ 时}, S=40+S_0=4 \times 10+S_0,$$

$$\therefore S=10t+S_0.$$

(2) $\because S_0=50$ (米), $S=150$ (米), $10t=S-S_0$,

$$\therefore 10t=100, t=100 \div 10=10(\text{秒}).$$

例4 一项任务甲独做 a 天完成, 乙独做 b 天完成, 求甲、乙两人合作

几天完成?

[解] 可以把 a, b 看作具体数字, 如 $a=6, b=12$, 那么甲独做一天可完成任务的 $\frac{1}{6}$, 乙独做一天可完成任务的 $\frac{1}{12}$. 甲、乙两人合做一天可完成任务的 $\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$, 所以甲、乙合作需

$$\frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} = \frac{12}{2+1} = 4(\text{天}) \text{ 完成.}$$

顺着上述思路, 可以这样想:

甲独做一天可完成任务的: $\frac{1}{a}$;

乙独做一天可完成任务的: $\frac{1}{b}$;

甲、乙合做一天可完成任务的: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$;

∴ 甲、乙两人合作需:

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} (\text{天}) \text{ 完成}$$

[说明] 对字母代替数字观念的形成过程是数的概念再抽象过程. 人们在计数过程中, 从 3 个苹果, 3 个球, 3 个人, 3 本书等等抽象而形成数字 3 的概念. 再从大量数字抽象成字母表示一切数 (目前表示我们已经学过的数, 使问题有意义的数). 这一抽象过程必须经过多次反复, 才能逐步领会熟练运用. 在碰到困难时, 可以回到具体数字去, 先以具体数字进行思维, 当领会问题的实际意义以后, 再以字母代替具体数字, 如例 3, 4 那样, 这就是抽象概括法的应用.

例 5 从 $\frac{1}{2}(1 \times 2 - 1 \times 0) = 1,$

$$\frac{1}{2}(2 \times 3 - 1 \times 2) = 2,$$

$$\frac{1}{2}(3 \times 4 - 2 \times 3) = 3,$$

$$\frac{1}{2}(4 \times 5 - 3 \times 4) = 4,$$

.....

你能发现什么规律?

[解] 从上述四个等式,可以发现

$$\frac{1}{2}(5 \times 6 - 4 \times 5) = 5,$$

$$\frac{1}{2}(6 \times 7 - 5 \times 6) = 6,$$

$$\frac{1}{2}(7 \times 8 - 6 \times 7) = 7,$$

.....

于是形成如下的猜想:

$$\frac{1}{2}[n(n+1) - n(n-1)] = n.$$

$\therefore$ 字母表示数, $\therefore$ 也服从数的运算律:

加法对乘法的分配律:

$$a(b+c) = ab+ac.$$

从右到左:

$$n(n+1) - n(n-1)$$

$$= n[(n+1) - (n-1)]$$

$$= n[n+1-n+1] = 2n.$$

$$\therefore \frac{1}{2}[n(n+1) - n(n-1)] = \frac{1}{2} \times 2n = n.$$

这说明我们的猜想是对的,任意一个自然数 n 都可表示成含 n 的代数式: $\frac{1}{2}[n(n+1) - n(n-1)]$.

[说明] 利用上述结果,可以求 n 个连续自然数的和:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

$$= \frac{1}{2}(1 \times 2 - 1 \times 0) + \frac{1}{2}(2 \times 3 - 1 \times 2)$$

$$+ \frac{1}{2}(3 \times 4 - 2 \times 3) + \frac{1}{2}(4 \times 5 - 3 \times 4)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2}[n(n+1) - n(n-1)]$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1).$$

这就是数学王子高斯(C. F. Gauss, 1777~1855)在小时候就已发现的规律. 难怪他能在极短的时间里算出 $1+2+3+4+\cdots+99+100=5050$, 使老师大吃一惊. 高斯是利用 $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$, $\cdots$, $50+51=101$, 从此得

$$1+2+3+\cdots+98+99+100=50 \times 101=5050.$$

这一结果的发现过程, 就是不完全归纳法的应用.

例 6 设 $f(n)=n^2+n+17$, 其中 n 为自然数, 从而有 $f(1)=1^2+1+17=19$, $f(2)=2^2+2+17=23$, $f(3)=3^2+3+17=29$, $f(4)=4^2+4+17=37$, $\cdots$, 这样试下去, 有人作出如下猜想: “ n 为自然数, $f(n)=n^2+n+17$ 必是质数”, 你认为对吗?

[解] 这里 $f(n)=n^2+n+17$ 是含自然数 n 的代数式, $f(1), f(2), f(3), \cdots$ 分别表示 $n=1, 2, 3, \cdots$ 时对应的代数式的值, 按照题设试下去:

$f(5)=5^2+5+17=47$, $f(6)=6^2+6+17=59$, $f(7)=7^2+7+17=73$, $\cdots$. 考察所得此代数式的值都是质数(有且只有两个约数, 一个是 1, 一个是这个数本身), 如果运用不完全归纳法, 能作出如下猜想:

$f(n)=n^2+n+17$, n 为自然数, 所有这一代数式的值都是质数.

事实上, 当 $n=16$ 时, 有

$$f(16)=16^2+16+17=16(16+1)+17=16 \times 17+17=17 \times (16+1)=17^2.$$

所以 $f(16)$ 不是质数, 上述猜想是错的.

[说明] 例 6 说明应用不完全归纳法所得结果不一定是正确的. 因此不完全归纳法可以发现真理, 但不能作为数学证明的工具. 应用不完全归纳法所得的结论可能是正确的, 也可能是错误的, 未经严格证明之前, 不能认为一定正确无误.

例 7 用字母 x 表示五个连续整数中的一个数(也称中位数)

- (1) 用含 x 的代数式表示这五个连续整数;
- (2) 你能发现五个连续整数的和有什么性质吗?

[解] (1) 因两个连续整数相差 1, 所以五个连续整数中间一个数为