中国中学生

ZHONGGUO
ZHONGXUESHENG

SHUXUE JIETI
FANGFA DAQUAN

数学解题方法大全

陈振宣
杨象富 主编

(初中)

上海远东出版社

封面设计：胡振钰

ISBN 7-80613-309-7

9 787806 133095 >

ISBN 7—80613—309-7/G·417

定价：20.00元

中国中学生数学解题方法大全(初中)

陈振宣　杨象富　主编

上海远东出版社

中国中学生数学解题方法大全（初中）

陈振宣　杨象富　主编

上海远东出版社出版发行

邮政编码 200233）

厂印刷

00,000

1996 年

次印刷

印数 62001—

ISBN 7-80613-309-7/G・417　定价：20.00元

主　　编　陈振宣　杨象富

编辑委员（按姓氏笔画为序）

王永利　杨象富　邹一心

陈振宣　施庆一　唐尚斌

目　　录

第一编　基础知识、基本方法

代　　数

几　　何

第二编　常用的数学思维方法

第一编　基础知识、基本方法

代　　数

第一章　代数初步知识

一、代数式与数学符号语言

知识与方法提要

1. 数学是研究数量关系和空间形式的科学．为了表达数量关系和空间形式，离不开语言这一思维载体．我们把表达数量关系和空间形式的语言称为数学语言．一般表达数量关系和空间形式的数学语言有三种形态：一种是自然语言，即日常应用的普通语言，既可口述，也可形诸文字．第二种是借用数学符号和字母的符号语言，也就是狭义的数学语言．第三种是应用图象的直观形象的图象语言．这三种语言形态都是学习与应用数学常用的数学思维表达的工具．

代数的历史是从字母代替数字开始的．自从引入字母代替数字（简称字母代数）这一观念以后，大大丰富了数学语言中的符号语言．数学符号语言便于反映数学科学的一般规律，既简且明，为简缩思维提高思维效率创造了条件．

例如加法的交换律：两数相加，交换加数的位置，它们的和不变．

如果用 a、b 分别表示两个加数，则上述表达加法交换律的自然语言，可译成符号语言如下：$a+b=b+a$.

2. 上述这种用字母、数字、运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)连结起来的式子叫做代数式．单独一个字母或数字也是代数式．

如：3、V、abc、$\frac{S}{t}$、$3x^2-5x+1$、a^2-b^2 等等都是代数式．

用数值代替代数式中的字母，按照代数式指明的运算，计算出的结果叫做代数式的值．

3. 为了表示不同的代数式，引进记号：$f(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$G(x)$，…表示含 x 的代数式．

例如，设 $f(x)=x^3-1$，$g(x)=2x^2-3x+1$，…那么当 $x=2$ 时，上述两代数式 $f(x)$，$g(x)$的值，可化为 $f(2)=2^3-1=7$；$g(2)=2\times2^2-3\times2+1=8-6+1=3$.

引入这样的记号，又为丰富数学符号语言提供了条件．

为了更好地学习符号语言，相应地要初步掌握下面两种常用的思维方法：

① 抽象概括法；

② 不完全归纳法．

下面在范例中具体说明．

范　　例

例1　将下列自然语言译成符号语言：

(1) x，y 两数的平方和；

(2) x，y 两数和的平方；

(3) a 的立方与 b 的积；

(4) a 的平方除以 b 的商；

(5) 两数 a，b 的立方和除以 a 与 b 的和；

(6) 两数 a，b 和的平方减去 a 与 b 的差的平方．

[**解**]　(1) x^2+y^2；　　　　(2) $(x+y)^2$；

(3) a^3b；　　(4) $\frac{a^2}{b}$；

(5) $\frac{a^3+b^3}{a+b}$；　　(6) $(a+b)^2-(a-b)^2$.

例 2 说出下列代数式的意义：

(1) $a-\frac{c}{b}$；　　(2) $\frac{c}{a-b}$；

(3) x^3-y^3；　　(4) $(x-y)^3$.

［**解**］ (1) a 减去 c 除以 b 的商所得的差；

(2) c 除以 a 减去 b 的差所得的商；

(3) 两数 x 与 y 的立方差；

(4) 两数 x 与 y 的差的立方.

［**说明**］ 例 1,2 是代数符号语言与自然语言的互译训练，这是数学思维训练的基本功.

例 3 一物体作匀速直线运动，t 秒钟内走的路程为 S(米)：

路程： S(米)	运动的时间：t(秒)
S_0	0
$10+S_0$	1
$20+S_0$	2
$30+S_0$	3
$40+S_0$	4

(1) 用 t 和 S_0 表示 S；

(2) 如果 $S_0=50$(米)，$S=150$(米)，试求 $t=$?

［**解**］ (1) $\because$ $t=1$ 时，$S=10+S_0$，

$t=2$ 时，$S=20+S_0=2\times10+S_0$，

$t=3$ 时，$S=30+S_0=3\times10+S_0$，

$t=4$ 时，$S=40+S_0=4\times10+S_0$，

$\therefore$ $S=10t+S_0$.

(2) $\because$ $S_0=50$(米)，$S=150$(米)，$10t=S-S_0$，

$\therefore$ $10t=100$，$t=100\div10=10$(秒).

例 4 一项任务甲独做 a 天完成，乙独做 b 天完成，求甲、乙两人合作

几天完成？

［**解**］ 可以先把 a、b 看作具体数字，如 $a=6$，$b=12$，那么甲独做一天可完成任务的 $\frac{1}{6}$，乙独做一天可完成任务的 $\frac{1}{12}$. 甲、乙两人合做一天可完成任务的 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$，所以甲、乙合作需

$$\frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}}=\frac{12}{2+1}=4(\text{天})\text{完成}.$$

顺着上述思路，可以这样想：

甲独做一天可完成任务的：$\frac{1}{a}$；

乙独做一天可完成任务的：$\frac{1}{b}$；

甲、乙合做一天可完成任务的：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$；

$\therefore$ 甲、乙两人合作需：

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}(\text{天})\text{完成}$$

［**说明**］ 对字母代替数字观念的形成过程是数的概念再抽象过程．人们在计数过程中，从 3 个苹果，3 个球，3 个人，3 本书等等抽象而形成数字 3 的概念．再从大量数字抽象成字母表示一切数（目前表示我们已经学过的数，使问题有意义的数）．这一抽象过程必须经过多次反复，才能逐步领会熟练运用．在碰到困难时，可以回到具体数字去，先以具体数字进行思维，当领会问题的实际意义以后，再以字母代替具体数字，如例 3，4 那样，这就是抽象概括法的应用．

例 5 从 $\frac{1}{2}(1\times2-1\times0)=1$，

$\frac{1}{2}(2\times3-1\times2)=2$，

$\frac{1}{2}(3\times4-2\times3)=3$，

$\frac{1}{2}(4\times5-3\times4)=4$，

……

你能发现什么规律？

［**解**］ 从上述四个等式，可以发现

$$\frac{1}{2}(5\times6-4\times5)=5,$$

$$\frac{1}{2}(6\times7-5\times6)=6,$$

$$\frac{1}{2}(7\times8-6\times7)=7,$$

……

于是形成如下的猜想：

$$\frac{1}{2}[n(n+1)-n(n-1)]=n.$$

∵ 字母表示数， ∴ 也服从数的运算律：

加法对乘法的分配律：

$$a(b+c)=ab+ac.$$

从右到左：

$$\begin{aligned} & n(n+1)-n(n-1) \\ =\ & n[(n+1)-(n-1)] \\ =\ & n[n+1-n+1]=2n. \end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}[n(n+1)-n(n-1)]=\frac{1}{2}\times 2n=n.$$

这说明我们的猜想是对的，任意一个自然数 n 都可表示成含 n 的代数式：$\frac{1}{2}[n(n+1)-n(n-1)]$.

［**说明**］ 利用上述结果，可以求 n 个连续自然数的和：

$$\begin{aligned} S_n =\ & 1+2+3+4+\cdots+n \\ =\ & \frac{1}{2}(1\times2-1\times0)+\frac{1}{2}(2\times3-1\times2) \\ & +\frac{1}{2}(3\times4-2\times3)+\frac{1}{2}(4\times5-3\times4) \\ & +\cdots+\frac{1}{2}[n(n+1)-n(n-1)] \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1).$$

这就是数学王子高斯(C. F. Gauss，1777～1855)在小时候就已发现的规律．难怪他能在极短的时间里算出$1+2+3+4+\cdots+99+100=5050$,使老师大吃一惊．高斯是利用$1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=101$，…,$50+51=101$,从此得

$$1+2+3+\cdots+98+99+100=50\times101=5050.$$

这一结果的发现过程,就是不完全归纳法的应用．

例6 设$f(n)=n^2+n+17$,其中n为自然数,从而有$f(1)=1^2+1+17=19$，$f(2)=2^2+2+17=23$，$f(3)=3^2+3+17=29$，$f(4)=4^2+4+17=37$,…,这样试下去,有人作出如下猜想:“n为自然数,$f(n)=n^2+n+17$必是质数”,你认为对吗?

［**解**］ 这里$f(n)=n^2+n+17$是含自然数n的代数式,$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$,…分别表示$n=1,2,3,\cdots$时对应的代数式的值,按照题设试下去:

$f(5)=5^2+5+17=47$，$f(6)=6^2+6+17=59$，$f(7)=7^2+7+17=73$，…．考察所得此代数式的值都是质数(有且只有两个约数,一个是1,一个是这个数本身),如果运用不完全归纳法,能作出如下猜想:

$f(n)=n^2+n+17$,n为自然数,所有这一代数式的值都是质数．

事实上,当$n=16$时,有

$f(16)=16^2+16+17=16(16+1)+17=16\times17+17=17\times(16+1)=17^2$.

所以$f(16)$不是质数,上述猜想是错的．

［**说明**］ 例6说明应用不完全归纳法所得结果不一定是正确的．因此不完全归纳法可以发现真理,但不能作为数学证明的工具．应用不完全归纳法所得的结论可能是正确的,也可能是错误的,未经严格证明之前,不能认为一定正确无误．

例7 用字母x表示五个连续整数中当中的一个数(也称中位数)

(1) 用含x的代数式表示这五个连续整数;

(2) 你能发现五个连续整数的和有什么性质吗?

［**解**］ (1) 因两个连续整数相差1,所以五个连续整数中间一个数为