高等学校教材

分析力学

孙国锟 编著

西北工业大学出版社

高等学校教材

分析力学

孙国锟 编著

西北工业大学出版社

1989年8月 西安

内 容 简 介

本书共分五章，系统地介绍了分析力学的基本概念和基本原理、完整系统和非完整系统的运动微分方程、拉格朗日方程在碰撞问题及系统微振动问题中的应用、力学的变分原理及哈密顿正则方程和正则变换与哈密顿-雅可比方程等。每章都编入较多的例题，并附有足够数量的习题。

本书可作为理工科专业本科生和工科研究生《分析力学》课程的教材，也可作为高等学校教师和有关科技工作者的参考书。

高等学校教材

分 析 力 学

孙国锟 编著

责任编辑 王友林

责任校对 樊 力

西北工业大学出版社出版

（西安市友谊西路127号）

陕西省新华书店发行

航空航天工业部〇一二基地印刷厂印装

ISBN 7-5612-0170-2/O·15（课）

开本787×1092毫米 1/16 17.5印张 423千字

1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷

印数 1—2000册 定价：3.48元

前　　言

1978年作者为我校工程力学专业必修课《分析力学》编写了一本讲义，多年来在对本科生及一般力学专业和其它工程专业硕士研究生教学中使用，中间先后根据教学要求和教学实践经过了三次修订，在此基础上编写了这本书。

随着分析力学的理论和方法在许多相关学科和工程技术领域中得到广泛的应用，这门课已经成为许多理工科专业的一门基础课。深感合适的教材、教学参考书对本科生教学确实是迫切需要的，对于许多科技工作者进一步掌握分析力学知识也是有益的。但是，组织这类书籍出版，也有各种困难。这本书是在我校出版社多方努力、大力支持下才得以出版的。这本书的出版也得到了我校工程力学系系主任白振林同志的关心和支持。这里谨表谢意。

本书是按课内学时为50小时左右的范围而编写的。全书共分为五章，重点放在第二章（完整系统和非完整系统的运动方程）、第三章（拉格朗日方程在几种特殊情形下的应用）和第四章（力学的变分原理和哈密顿正则方程）这三章。把采用广义坐标、伪坐标和伪速度来阐述、推导完整系统和非完整系统各类运动方程放在一章里，并在该章和第三章突出了拉格朗日方程。把哈密顿变分原理和采用正则变量的正则运动方程放在第四章。这样也就把拉格朗日力学和哈密顿力学作了有联系又有区分的处理。编写时既考虑到了分析力学发展的历史，也考虑到了内容取舍的方便，把每章分成了较多的小节。特别是随着教学方法改革的不断深入，在教师指导下可以通过安排一定份量的自学来加强学生自学能力的培养。因此，编写本书时在内容阐述上、层次处理上尽可能考虑到了适宜于学生自学的要求。重点章节都写入了相当数量的例题，也编写了相当数量的习题。在数学方法上没有引入惯性张量的概念和有关计算，但在力学变分原理一章的开始，首先介绍了有关变分学的基本概念和方法，这样有利于读者学习和掌握本章内容。为掌握分析力学内容所需要的理论力学知识，请读者参阅有关书籍。

本书全稿经西安交通大学工程力学系陈守五教授和黄幼玲副教授仔细审阅，并提出了很多宝贵意见，作者谨此表示衷心的感谢。本书第二章的一些结合工程实际的例题和解答是由白振林同志提供的，所有图形都是由我校理论力学教研室梁工谦同志设计和绘制的，在此一并表示衷心的谢意。

限于作者的水平，本书错漏之处在所难免，恳请读者批评指正。

西北工业大学　**孙国鲲**

1988年12月

目　　录

第一章　基本概念和基本原理

§1-1　自由系统和非自由系统

设质点系由N个质点组成，各质点的运动有相互的联系，但每个质点运动过程只决定于它所受的主动力（包括内力和外力）和运动初始条件，而不受任何其它限制条件，则该质点系称为自由质点系。对于预先选定的惯性参考系，质点系中第 i 个质点的运动规律由时间的矢函数$\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i(t)$所确定。整个质点系的运动由N个时间的矢函数$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1(t)$，$\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2(t)$，…，$\mathbf{r}_N=\mathbf{r}_N(t)$所确定。对于自由质点系，这 N 个矢函数是独立无关的，这 N 个矢函数的 3N 个直角坐标分量$x_i=x_i(t)$，$y_i=y_i(t)$，$z_i=z_i(t)$（$i=1, 2, \cdots, N$）也是彼此独立的函数。对应于时间的无限小增量dt，这3N个位置坐标的微增量dx_i，dy_i，dz_i（$i=1, 2, \cdots, N$），即各质点的元位移$d\mathbf{r}_i$的轴向分量，都是彼此独立的微分。如果把各个天体都看成质点，则由太阳和行星、卫星所组成的太阳系就是自由质点系的一个典型例子。

总之，要完全确定由N个质点组成的一个质点系的位形，就需要 3N 个坐标，而对于一个自由质点系，这 3N 个位形参数才是彼此独立的。

如果一个质点系的运动在某一时间区间内受到一些预先给定的限制条件，使得此时间内各质点的坐标和速度的变化必须服从一定的关系，这样的质点系就叫做非自由质点系，并且把加于质点系运动的限制条件称为约束，例如，两质点A和B由长为l的无重刚杆相连接，使两点各居杆的一端，这样就构成一个非自由质点系。无重刚杆就是加于该质点系的约束，它使得两质点间的距离在运动过程中始终保持不变。在直角坐标系中（图1-1），规定该质点系的位形要用六个坐标x_1，y_1，z_1和x_2，y_2，z_2，而在任何瞬时，这六个变量必须满足关系式

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0 \tag{1-1}$$

求上式两边的一阶微分，得

$$(x_2-x_1)(dx_2-dx_1)+(y_2-y_1)(dy_2-dy_1)$$
$$+(z_2-z_1)(dz_2-dz_1)=0 \tag{1-2}$$

此式可改写为

$$(x_2-x_1)dx_2+(y_2-y_1)dy_2+(z_2-z_1)dz_2$$
$$=(x_2-x_1)dx_1+(y_2-y_1)dy_1+(z_2-z_1)dz_1 \tag{1-3}$$

若以$\mathbf{r}_A$和$\mathbf{r}_B$分别表示两质点的矢径，以$\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$表示轴向单位矢量，则有

$$\mathbf{r}_A=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_B=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_A=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$$

由此可知式（1-3）等价于

$$d\mathbf{r}_B\cdot\overrightarrow{AB}=d\mathbf{r}_A\cdot\overrightarrow{AB} \tag{1-4}$$

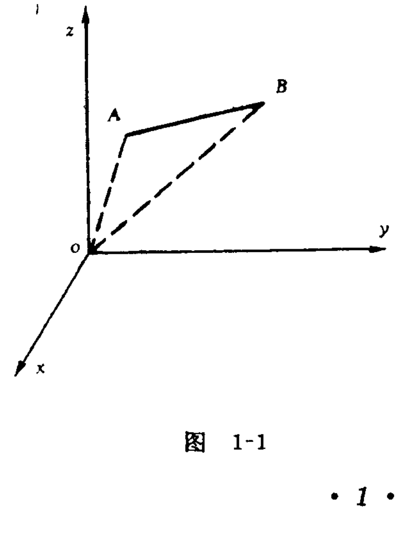

图　1-1

上式表示A，B 两点的元位移在两点连线上的投影必须

相等。可见，系统的六个坐标中只有五个是彼此独立的，相应地，六个坐标的微分必须满足关系式（1-2）或（1-3），因而也只有五个坐标微分是彼此独立的。应该指出，这里式（1-2）或（1-3）是由式（1-1）导出的结果，所以前二式均和后者等价，从而式（1-4）也和式（1-1）等价，彼此等价的这四个表示式只是以不同的形式解析地表示出同一个约束，即长度为l的无重刚杆约束。所谓刚体，就可以看成由无数质点组成的一个非自由质点系，其中任一对质点间都受有无重刚杆约束或刚性约束。式（1-4）实质上是由刚体定义导出的必然结果。

不难理解，刚体在坐标系中的位置可以由体内任意三个点A、B、C构成的三角形的位置完全规定，如图1-2。而要确定三角形ABC的位置就需用九个坐标（x_A，y_A，z_A，…，z_C），但这些坐标间有下列三个关系式。

$$\left.\begin{aligned}(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(z_A-z_B)^2-a^2=0\\(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2+(z_B-z_C)^2-b^2=0\\(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2-c^2=0\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}5)$$

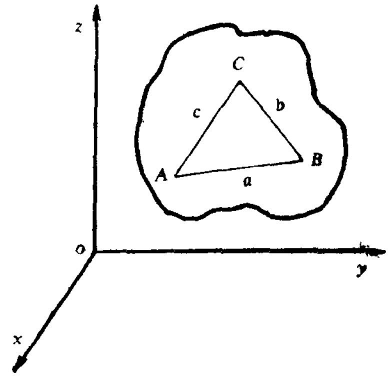

图 1-2

这一组方程正是存在于刚体内部的刚性约束的表达式。可见，要确定不受任何外部约束的自由刚体的位置，只需要六个独立的坐标。

对于变形体，如果不考虑物质细微结构的问题，我们可将数学中连续集的概念应用于实际的物质，从而把变形体视为一个物质连续系统，构成所谓连续介质体。因此，为确定一个变形体的位形，将需要无限多的位置坐标。在变形体内部各点间虽然不再有上述刚性约束存在，但变形体会受到各种各样边界条件的约束，如一根悬臂梁受到的固定端约束，流体受到的管道和容器壁约束等。

一般地说，由于约束的存在，用来规定质点系位形的独立坐标数减少了。非自由质点系动力学问题的解，不仅决定于所受的主动力，同时也与系统所受的约束直接相关。

§1-2　约束及其分类

我们考察由两质点A和B构成的在铅直平面内摆动的双摆，如图1-3，其中oA和AB是长度均为l的无重刚杆，轴o是水平的固定轴，这些都是加于双摆的实际约束。若取双摆所在的平面为固定的oxy平面，则规定双摆的位形要用四个坐标（x_1，y_1）和（x_2，y_2），由于约束的存在，这四个坐标必须同时满足下列关系式

$$x_1^2+y_1^2=l^2 \quad (1\text{-}6)$$

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l^2 \quad (1\text{-}7)$$

同式（1-1）及式（1-5）类似，上两式将加于系统的实际约束解析地表示出来。我们把这些关系式叫做约束方程。如果约束方程仅是联系系统中各质点坐标间的关系式，这类约束就称为完整约束或有限约束，有时也叫做几何约束。在直角坐标系中，对于含有N个质点的力学系统，加于系统的m个完整约束一般地可表示为

$$f_j(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \cdots,\ x_N,\ y_N,\ z_N)=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \quad (1\text{-}8)$$

由完整约束方程（1-6）和（1-7）可知，双摆中的A点只能在以点o为圆心，l为半径的圆弧上运动，而点B的运动范围则被限制在以o为圆心、2l为半径的圆弧作为外边界的面积以内，且相对于A的运动轨迹只能是以A为圆心、l为半径的圆。这表明，几何约束的存在，限制了系统在三维欧几里德空间中的可达区域。只受有完整约束的系统（包括自由质点系在内）叫做完整系统。

在薄圆盘沿足够粗糙的水平直轨作纯滚动的情况（图1-4），由运动学可知，粗糙直轨

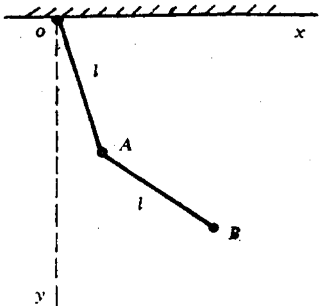

图 1-3

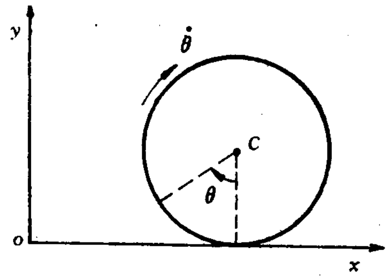

图 1-4

加于圆盘运动的限制条件是

$$\dot{x}_C - r\dot{\theta} = 0 \tag{1-9}$$

上式左端是盘心线速度$\dot{x}_C$和圆盘滚动角速度$\dot{\theta}$的函数，这类约束方程所代表的约束叫做运动约束。一般地，在直角坐标系中，加于系统的 r 个运动约束可以表示为各点坐标和速度分量间的关系式，即

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \cdots, z_N;\ \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \cdots, \dot{z}_N) = 0 \tag{1-10}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, r)$$

如果约束方程（1-10）的左端函数f_k对于$\dot{x}_i$，$\dot{y}_i$，$\dot{z}_i$（$i = 1, 2, \cdots, N$）是线性的，则称为线性运动约束，若f_k中含有速度分量的非线性项，则称为非线性运动约束。此外，若其中除坐标和速度外，还含有坐标对时间的更高阶导数，比如m阶导数（$m > 1$），则这种约束称为m阶约束。大多数情况下，实际的运动约束是式（1-10）左端为各质点速度分量的线性函数，亦即属于一阶线性约束。以后诸章，我们只限于考虑系统具有这种约束的情形。这时，运动约束方程可以写为

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\dot{x}_i + b_{ki}\dot{y}_i + c_{ki}\dot{z}_i) = 0 \tag{1-11}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, r)$$

一般情况下，式中诸a、b和c都是点的坐标的函数。

显然，式（1-11）也可以写成坐标微分间的关系，即

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}dx_i + b_{ki}dy_i + c_{ki}dz_i) = 0 \tag{1-12}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, r)$$

因此，运动约束是加在各点速度（或坐标微分）上的限制条件。

需要指出，虽然式（1-9）具有运动约束的形式，但进一步的分析可知，经过一次积分，式（1-9）就变成

$$x_c - r\theta = C \tag{1-9)'}$$

上式实际上是盘心坐标和圆盘相对于中心轴的角坐标之间的有限关系式，因而实质上它代表了加给圆盘的几何约束，同样地表示出限制圆盘沿直轨只能作纯滚动的条件。

一般地说，如果约束方程以微分形式给出，则只有在线性微分多项式（1-12）不是某一函数全微分的情形，或者说，不可能将式（1-12）经由积分而得到坐标间的有限关系的情形，它才表示真正的微分约束。因此，更确切地说，运动约束或微分约束指的是不可积分的约束。可见式（1-3）虽然具有微分约束的形式，但实质上它是同式（1-1）等价的几何约束方程。考察约束方程

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0 \tag{1-13}$$

式中a、b和c都是x、y和z的函数。形式如式（1-13）的方程称为波发夫微分式。在微积分学中已知，如果微分多项式（1-13）为恰当微分，则必定有函数f（x，y，z）存在，并且有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = b,\quad \frac{\partial f}{\partial z} = c \tag{1-14}$$

而上述关系存在的必要和充分条件是：a、b和c对于x，y和z的偏导数必须存在，并且

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x},\quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x},\quad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y} \tag{1-15}$$

但须指出，对于约束方程（1-13）是恰当微分来说，式（1-15）是必要条件，而对于微分约束是可积分约束来说，则不是必要的。在微积分学中就已证明，微分形式（1-13）的可积条件是：下列方程

$$a\left(\frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial z}\right) + c\left(\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\right) = 0 \tag{1-16}$$

必须恒等地被满足。显然，当条件（1-15）满足时，亦即当微分式（1-13）是恰当微分时，条件（1-16）必定被满足。但是反过来说则并非如此，亦即当方程（1-13）虽不是恰当微分，也会有积分因子存在，使得式（1-13）变为恰当微分。这样，上述可积条件也就是方程（1-13）有积分因子存在的必要条件。

［例 1-1］ 试证明约束方程

$$yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0$$

是可积的。

［证］ 对照式（1-13），这里$a = yz$，$b = 2xz$，$c = xy$。可以求出各个一阶偏导数

$$\frac{\partial a}{\partial y} = z,\quad \frac{\partial a}{\partial z} = y;\quad \frac{\partial b}{\partial x} = 2z,\quad \frac{\partial b}{\partial z} = 2x;\quad \frac{\partial c}{\partial y} = x,\quad \frac{\partial c}{\partial x} = y$$

将以上各个导数分别代入式（1-15）和式（1-16），其结果是，式（1-15）未被满足，而式（1-16）却恒等地被满足。这就证明了所给约束是可积的，亦即该约束实际上是完整约束。利用微积分的方法可以求出该约束方程的积分是

$$xy^2z = h$$

其中h为积分常数，这个积分也就是原微分约束所代表的几何约束（曲面）。

［例 1-2］ 两质点A和B由无重刚杆相连，如图1-5。假定两质点可在光滑的固定水

平面上滑动。如果在每个质点处加上小的刀刃支承，且刀刃垂直于两点连线，从而不允许两点速度具有沿两点连线方向的分量。试写出该系统的约束方程。

［解］ 首先，取水平面为oxy平面。要完全确定系统的位形，需用A和B两点的坐标(x_1, y_1)和(x_2, y_2)这四个变量。由于刚杆约束的存在，因此有完整约束方程

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2-l^2=0 \qquad (1)$$

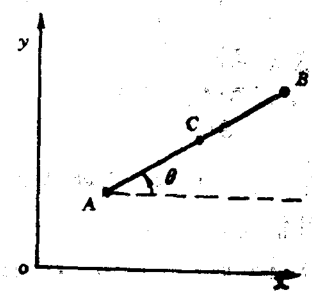

图 1-5

可见这四个坐标中只有三个是彼此独立的。我们可以选取杆中点C的坐标(x, y)和杆对轴x的倾角θ这三个独立参数来代替上述三个独立的直角坐标。考虑到刀刃支承的存在，C点在任一瞬时的速度矢必须与杆相垂直，亦即该点速度轴向分量$\dot{x}$和$\dot{y}$必须满足下列方程

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}}=-\mathrm{tg}\theta \qquad (2)$$

或

$$\dot{x}+\dot{y}\,\mathrm{tg}\theta=0 \qquad (2)'$$

若写成微分形式，则上式变成

$$\cos\theta dx+\sin\theta dy=0 \qquad (3)$$

这就是各坐标微分间存在的约束方程。显然，并不存在这样一个函数$f(x, y, \theta)$，使得式（3）左端具有以下形式

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (4)$$

也不可能找到任何一个积分因子与式（3）相乘后使得式（3）变成恰当微分。因而约束方程（3）是不可积分的微分约束，或不可积分的运动约束。这类约束有时叫做非完整约束，相应地，具有非完整约束的系统叫做非完整系统（有人也把这种系统称为非全定系统）。本例中给出的系统就是非完整系统的一个例子。若将加于该系统的刀刃支承去掉，则系统的约束方程只有式（1）。这时，该系统就变成完整系统。

一般地说，当系统只具有一个微分约束方程，且方程中含有s个变量u_i时，方程可以写为以下形式

$$\sum_{i=1}^{s}A_i(u_1, u_2, \cdots, u_s)du_i=0 \qquad (1\text{-}17)$$

式中诸A_i是诸u的函数。可以证明*，上式具有积分子$f(u_1, u_2, \cdots, u_s)=0$（常数）的必要与充分条件是：下列方程

$$A_\gamma\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}\right)+A_\beta\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\gamma}-\frac{\partial A_\gamma}{\partial u_\alpha}\right)+A_\alpha\left(\frac{\partial A_\gamma}{\partial u_\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial u_\gamma}\right)=0$$
$$(\alpha, \beta, \gamma=1, 2, \cdots, s) \qquad (1\text{-}18)$$

必须同时恒等地被满足。式（1-18）中共有$\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$个方程，其中有$\frac{(s-1)(s-2)}{2}$

* 参考E. L. Ince, Ordinary Defferential Equations, Douer Publications, Inc, New York (1953), P.54.

个是彼此独立的。

如果微分关系式（1-17）是恰当微分，则

$$A_l=\frac{\partial f}{\partial u_l}\qquad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

这就要求

$$\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}=\frac{\partial A_\beta}{\partial u_\alpha}\qquad(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$$

在此情形，式（1-18）自然满足。

特殊情况是 $s=3$。这时令 $u_1=x$，$u_2=y$，$u_3=z$，而 $A_1=a$，$A_2=b$，$A_3=c$，则式（1-17）就变成式（1-13），而式（1-18）变成式（1-16）。

一般地说，当系统具有L个微分约束

$$\sum_{l=1}^{s}A_{rl}(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_s)du_l=0 \tag{1-19}$$

$$(r=1,\ 2,\ \cdots,\ L<s)$$

的情况，可以证明*，式（1-19）有L个独立积分

$$f_r(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_s)=C_r\quad(r=1,\ 2,\ \cdots,\ L)$$

（式中 C_r 为常数）的必要和充分条件是：诸系数 A_{rl} 使得双线性型

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\left(\frac{\partial A_{r\beta}}{\partial u_\alpha}-\frac{\partial A_{r\alpha}}{\partial u_\beta}\right)x_\alpha y_\beta=0\quad(r=1,\ 2,\ \cdots,\ L) \tag{1-20}$$

同时恒等地被满足，其中 x_α 和 y_β 是代数方程

$$\sum_{\alpha=1}^{s}A_{rl}x_l=0\quad(r=1,\ 2,\ \cdots,\ L) \tag{1-21}$$

的任意二组解。这个条件可以用来判定一组微分约束的可积性。

在几何约束方程（1-8）和运动约束方程（1-11）中都不显含时间 t，这种约束称为平稳约束或定常约束。如果除去坐标和速度以外，约束方程中还显含时间 t，则这种约束称为非平稳约束或非定常约束，这时，几何约束方程可写为

$$f_j(x_1,\ \cdots,\ z_n,\ t)=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{1-22}$$

而运动约束方程一般可写为

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\dot{x}_i+b_{ki}\dot{y}_i+c_{ki}\dot{z}_i)+e_k=0 \tag{1-23}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots r)$$

或

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}dx_i+b_{ki}dy_i+c_{ki}dz_i)+e_kdt=0 \tag{1-23$'$}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

其中 a_{ki}，b_{ki}，c_{ki}，e_k 都是坐标和时间 t 的函数。在平稳约束情形，$e_k=0$，而且 a_{ki}，b_{ki}，

* 参考Frobenius, F. G. Gesammelte Abhandlungen, Springer, Gottingen (1968), PP. 249～334.

c_{ki}只是坐标的函数。

仅仅具有平稳约束的系统称为平稳系统。受有非平稳约束的系统称为非平稳系统。

当有形式如式（1-22）的完整约束存在时，在每一给定时刻 t，系统就不能在空间占有任意的位置，因为完整约束对系统在时刻 t 的可能位置加上了一定的限制。当仅有微分约束存在时，系统在任意时刻 t 可以占有空间的任意位置，但在这个位置上，系统各点速度不能都是任意的。微分约束只对各点的速度加上了一定的限制。

这里可以引用控制理论中关于状态变量的概念。在直角坐标系中，对于一个给定的具有N个质点的质点系，$x_i(t)$，$y_i(t)$，$z_i(t)$ 和 $\dot{x}_i(t)$，$\dot{y}_i(t)$，$\dot{z}_i(t)$（$i=1, 2, \cdots, N$）就是该系统的状态变量。在任意时刻t_1，这组6N个状态变量的值 $x_i(t_1)$，…，$\dot{z}_i(t_1)$（$i=1, 2, \cdots, N$）就表示系统在该时刻的状态。所以状态变量完全表征了系统的运动过程。以系统的6N个状态变量作为分量所构成的向量 $R(t)$就叫做该系统的状态向量。状态向量的所有可能值的集合称为状态空间。这是一个6N维的欧几里德空间，系统在任一时刻的状态可用状态空间中的一个点S来表示。于是，系统在实际空间中的运动过程则由S点在状态空间中的S轨迹所表示。对于一个自由质点系来说，整个状态空间都是系统的可达区域。若系统具有式（1-22）和（1-23）所表示的约束（$m+r<6N$），这时，系统的可达区域受到了限制。把每个约束方程看作状态空间中的一个超曲面，则表征系统运动过程的S轨迹只能在$m+r$个超曲面所确定的$6N-(m+r)$维超曲线上。

需要指出，由每个形式为式（1-22）的几何约束都可以导出一个相应的微分形式的约束如下

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial t}=0 \qquad (1\text{-}24)$$

$$(j=1, 2, \cdots, m)$$

或

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0 \qquad (1\text{-}24)'$$

$$(j=1, 2, \cdots, m)$$

但这样的微分约束称为可积微分约束，因为它们和几何约束

$$f_j(x_1, \cdots, z_N, t)=C_j \quad (j=1, 2, \cdots, m)$$

是等价的，这里C_j是任意常数。

§1-3 可能位移与虚位移 自由度 广义坐标

我们来考察具有N个质点的系统，其位形由3N个直角坐标 x_1，y_1，z_1，…，x_N，y_N，z_N给定。设在该系统上加有m个完整约束和 r 个微分约束，约束方程可以分别写成式（1-24）和式（1-23）的形式，即

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial t}=0$$

$$(j=1, 2, \cdots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\dot{x}_i+b_{ki}\dot{y}_i+c_{ki}\dot{z}_i)+e_k=0 \tag{1-24}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

以上$m+r$个方程是加在系统各质点速度$v_i(\dot{x}_i,\ \dot{y}_i,\ \dot{z}_i)$上的限制条件。满足这一组方程的所有矢量组$v_i(\dot{x}_i,\ \dot{y}_i,\ \dot{z}_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,N)$称为系统在瞬时$t$所处位置上的可能速度。因此，可能速度是约束所允许的速度。一般情况下，对于系统在瞬时t的每一可能位置，都存在无数个可能速度，而在系统的实际运动中，这无数组速度矢中仅有一组被实现。需要指出，这一组被实现的速度不仅与$m+r$个约束相关联，还取决于动力学定律。而每一组可能速度则只满足$m+r$个约束方程。

我们将一个质点的无穷小位移$dr_i=v_i dt\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$叫做可能的无穷小位移，或简称可能位移，其中$v_i$是可能速度。将上面$m+r$个约束方程遍乘以$dt$就得到可能位移$dr_i(dx_i,\ dy_i,\ dz_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$必须满足的$m+r$个方程

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}dz_i\right)+\frac{\partial f_j}{\partial t}dt=0\\&\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\&\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}dx_i+b_{ki}dy_i+c_{ki}dz_i)+e_k dt=0\\&\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)\end{aligned}\right\} \tag{1-25}$$

可见，可能位移是与约束相一致的无穷小位移。

取系统在同一时刻、同一位置上的两组可能位移$dr_i=v_i dt$和$dr_i'=v_i'dt\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$，$dr_i$和$dr_i'$同样都满足方程（1-25）。以$\delta r_i(\delta x_i,\ \delta y_i,\ \delta z_i)$表示两者的差，即令

$$dr_i'-dr_i=\delta r_i\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

则诸δr_i都满足齐次关系式

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0\\&\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\&\sum_{i=1}^{N}(a_{ki}\delta x_i+b_{ki}\delta y_i+c_{ki}\delta z_i)=0\\&\qquad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\end{aligned} \tag{1-26}$$

无穷小位移矢量组$\delta r_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$称为系统的虚位移。满足方程（1-26）的任意一组矢量$\delta r_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$都是系统的一组虚位移。所以，式（1-25）也就是约束加给系统可能位移的限制条件，而式（1-26）是约束加给虚位移的限制条件。比较后可以看出，方程（1-26）和方程（1-25）之间的差别在于前者没有$\frac{\partial f_j}{\partial t}dt$及$e_k dt$两项，亦即虚位移的发生并不伴随时间$t$的无穷小增量$dt$。因此可以说，系统在某一时刻的虚位移是设想时间$t$在此时刻突然停滞、从而约束被瞬间“凝固”，意指出现于完整约束方程中的时间t被固

定。换言之，约束将保持它在时刻t的形状不变。因此，在求函数f_j的微分时不出现$\frac{\partial f_j}{\partial t}dt$这一项，或者说应取$dt=0$。于是，式（1-25）中前m个方程就同式（1-26）中前m个方程一样。对于非完整约束而言，“凝固”就意味着使它具有平稳的特征，即去掉约束方程左端中的e_k，并令显含在系数a_{ki}，b_{ki}和c_{ki}中的时间t固定下来。于是，式（1-25）中后r个方程也同式（1-26）中后r个方程一样。可见，在系统所受约束都是平稳约束的情况，虚位移与可能位移在几何上相一致，但后者是与时间t的无穷小增量dt相关联的。所以，虚位移乃是系统各质点从系统于时刻t所在位置到系统在同一时刻（约束被“凝固”）可能占有的另一个无限邻近的位置的位移。因而，按照虚位移的定义，在一般情况下，虚位移不一定与实际约束相一致。这一点可以用动点P运动中受非平稳曲面约束的简单情形加以说明，如图1-6。对应时间的增量dt，约束面A由A(t)位移到A(t+dt)，在A(t)上的点P随之移动到A(t+dt)上的点P′的位置。分别在点P和P′做出约束面的切平面G_1和G_2。显然，矢量$\overline{PP'}$是动点对应于dt的实位移。在G_1内由P作出的任一无穷小矢量都是动点t时刻的虚位移。而起点为P、终点落在G_2上的任一无穷小矢量都是动点对应于dt的可能位移（包括矢量$\overline{PP'}$）。可见，一般情况下虚位移并非约束所许可的位移，因而同可能位移在几何上并不一致。若约束是平稳的，则A（t+dt）与A(t)始终重合，考虑到一阶无穷小，则G_1和G_2重合，从而虚位移与可能位移在几何上一致，这时，虚位移也是约束所许可的。

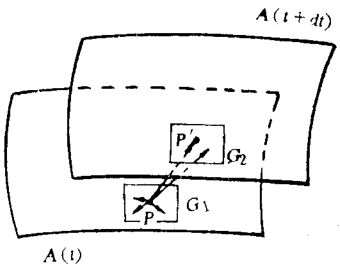

图 1-6

系统虚位移3N个分量（δx_i，δy_i，δz_i）（$i=1,2,\cdots,N$）称为坐标的（一阶）变分。由于虚位移并不伴随时间t的增量dt，所以，按照这里定义的虚位移，诸r_i的变分δr_i和诸坐标的变分都叫做等时变分。

以上讨论都限于约束方程以等式表示的情况，在此情形，虚位移是可逆的，亦即，对于系统可取的任意一组虚位移，对应地总有一组反向的虚位移。这一点并不难从式（1-26）看出。例如，有某一组虚位移δr_i（δx_i，δy_i，δz_i）（$i=1,2,\cdots,N$）满足方程（1-26），则与之对应的另一组反向的虚位移$-\delta r_i$（$-\delta x_i$，$-\delta y_i$，$-\delta z_i$）（$i=1,2,\cdots,N$）必定满足方程（1-26）。反之，对于不满足（1-26）的任意一组无穷小矢量诸δr_i来说，与之反向的诸$-\delta r_i$也必定不满足式（1-26）。有时约束方程是以不等式表示的。比如，单个质点被限制在半径为c（常数）的空心球壳内运动，这时，用直角坐标写出的几何约束方程为

$$x^2+y^2+z^2\leqslant c^2 \tag{1-27}$$

而用诸球坐标表示的该约束方程是

$$r\leqslant c \tag{1-28}$$

若在某一时间区间内质点是在球面上运动，则上列约束方程应取等号。而在脱离球面，处在球壳内运动的阶段，质点相当于不受约束的自由质点。在此情形，考察该质点的运动可以分段来进行。须要指出的是，当质点沿球面运动的阶段，即质点处在其运动范围的边界面上时，在球面上任意点处的虚位移不完全是可逆的。例如，自界面上一点向内朝脱离球面方向的虚位移δr是约束所许可的，但与之反向的位移将使质点跑出界面以外，这是约束所不许可的。

用等式表示的约束叫做双面约束。用不等式表示的约束叫做单面约束。我们以后只考察受双面约束的系统。

方程（1-26）是约束加给虚位移的限制条件，也就是3N个直角坐标的虚增量（坐标变分）δx_i，δy_i，δz_i（$i=1, 2, \cdots, N$）必须满足的关系式。因此，对于受有形式如式（1-25）的$m+r$个约束的非自由系统来说，3N个坐标变分中只有$3N-(m+r)$个是独立的。令$n=3N-(m+r)$，数n称为系统的自由度。所以，系统的自由度定义为独立的坐标变分数，它总是等于规定系统位形需要的坐标数3N减去全部独立的约束方程的数目。

除直角坐标外，可以采用不同的坐标组来描述一个给定系统的位形。对一个质点的简单情况，还可用极坐标或柱坐标等规定它的位置。需要指出，自由度是系统本身的特征，它决定于系统的结构特征和内外约束条件，并不依赖于描述系统位形时所采用的一组特定的坐标。考虑到各种各样可能的坐标变换，任何一组能够用来规定系统位形的变参数在更一般的意义上都能作为一种坐标系。这样一组足以规定系统位形的参数就叫做系统的广义坐标。所有各种常用的坐标都可以作为广义坐标，但也可以采用其它一些参数。

对于具有N个质点的自由质点系，描述其位形就需3N个独立的广义坐标。当系统是只受有m个几何约束的完整系统时，规定其位形所需要的广义坐标数减少到$3N-m$个。这时，系统的自由度n与系统的独立广义坐标数相等，即$n=3N-m$。如果系统还同时受有r个不可积分的微分约束，那么，独立的广义坐标变分减少到$3N-(m+r)$个，系统的自由度成为$n=3N-(m+r)$。但由于这r个约束方程不可能积分成坐标间的有限关系式，因而对于非完整系统来说，规定系统的位形仍需要$3N-m$个独立的广义坐标，但这些坐标的变分必须同时满足微分约束加于变分的r个限制条件。可见，在非完整系统情形，规定系统位形所需的独立广义坐标数总是大于系统的自由度。

设所考察的系统是具有n自由度的完整系统。通常以q_1，q_2，…，q_n来表示规定系统位形的独立的广义坐标。给出诸q_i的一组值，就唯一地规定了系统的一个完全确定的位形。与给定的系统相联系，我们可以设想一个n维q空间，其中任意一点的位置坐标为（q_1，q_2，…，q_n），该点对应于给定系统的一个位形。该系统的实际运动可以由q空间中的一个代表点在该空间的运动来描述。我们把q空间叫做位形空间（configuration space）。对于具有n个自由度的完整系统来说，整个q空间都是该系统的可达区域。而系统的一个实际运动过程则与q空间中某一条轨迹C相对应。代表点沿C轨迹的走向由系统的实际运动过程决定。C轨迹上的一个点代表系统所经过的一个实际位形，在该点上做出的任一无穷小矢量δq（δq_1，δq_2，…，δq_n）都表征了系统在该位形上的一组虚位移，且诸q_i的变分δq_i是彼此独立的。系统内各点的虚位移δr_i（$i=1, 2, \cdots, N$）都可以由诸δq_i表示。如果有附加的约束存在，并且这个附加约束可表示为q_i间的一个关系式

$$f(q_1, q_2, \cdots, q_n)=0 \tag{1-29}$$

则系统的自由度减少为$n-1$。方程（1-29）代表n维q空间中的一个超曲面，对于系统的每一个运动来说，轨迹C必须在此曲面上。可见，有限约束式（1-29）的出现，限制了系统在n维位形空间中的可达区域。需要指出，虽然式（1-29）所表示的约束面上的每一条曲线都是一条可能的轨迹，但并不是每一条这样的可能轨迹都对应于系统的一个实际运动。因为实际运动还必须同时满足动力学定律，并与运动的初始条件相关。

以后将会看到，在许多情况下，由于选择了一组独立的广义坐标而使得对完整动力学系

的数学分析得到简化。这组独立的广义坐标是确定系统位形所需要的最少数目的坐标。但是并没有特定的一组坐标唯一地适合于对给定系统的分析。虽然一组参数并不具有明显的几何意义，但只要它们能够规定系统的位形，就可以把这组参数看成坐标。由另一组坐标得到这一组坐标的过程叫做坐标变换。例如，从平面情况的直角坐标到极坐标的变换是

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

在解析几何中已经熟悉了不同坐标系之间的几何变换式。一般地可以把联系直角坐标 x_1，y_1，z_1，…，z_N同广义坐标q_1，q_2，…，q_n间的变换式写成如下形式

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \\ z_1 &= z_1(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \\ &\cdots\cdots \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \end{aligned} \tag{1-30}$$

或者写为矢量表示式

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t) \qquad (1\text{-}30)'$$
$$(i = 1, 2, \cdots, N)$$

最好是一组且仅仅一组q对应于系统的一个可能位形。换言之，对于每一个时间值，在诸x_i，y_i，z_i容许区域内的各点同诸q容许区域内的各点之间有一对一的对应关系。根据隐函数理论，能将诸q作为x_i，y_i，z_i和t的函数解出的必要和充分条件是：变换式的雅可比行列式不等于零。比如，假定3N个直角坐标之间具有下列形式的m个约束方程

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \cdots z_N, t) = \alpha_j \tag{1-31}$$
$$(j = 3N - m + 1, \cdots, 3N)$$

设选定的n个广义坐标都是独立的，则

$$n = 3N - m$$

因为式（1-30）中的3N个变换式必须同时满足几何约束方程（1-31），故变换式中还一定包含有m个常数α_j（$j = 3N - m + 1, \cdots, 3N$）。于是，变换式一般可写为

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, \cdots, q_n, \alpha_{3N-m+1}, \cdots, \alpha_{3N}, t) \\ &\cdots\cdots \\ z_N &= z_N(q_1, \cdots, q_n, \alpha_{3N-m+1}, \cdots, \alpha_{3N}, t) \end{aligned} \qquad (1\text{-}30)''$$

现在来定义另一组m个广义坐标

$$q_j = \alpha_j \quad (j = 3N - m + 1, \cdots, 3N) \tag{1-32}$$

这样，变换式(1-30)″可改写为

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \\ y_1 &= y_1(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \\ z_1 &= z_1(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \\ y_2 &= y_2(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \\ &\cdots\cdots \\ z_N &= z_N(q_1, q_2, \cdots, q_{3N}, t) \end{aligned} \tag{1-33}$$

如果雅可比行列式J不等于零，亦即