

丘成桐主编
数学翻译丛书

分析学 (第二版)

Analysis (Second Edition)

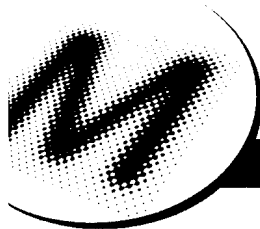
■ Elliott H. Lieb Michael Loss

■ 王斯雷 译

■ 鲁剑锋 校



高等教育出版社
Higher Education Press



丘成桐主编
数学翻译丛书

分析学 (第二版)

Analysis (Second Edition)

■ Elliott H. Lieb Michael Loss

■ 王斯雷 译

■ 鲁剑锋 校



高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图书在版编目(CIP)数据

分析学:第2版/(美)利布(Lieb, E. H.), (美)洛
斯(Loss, M.)著;王斯雷译. —北京:高等教育
出版社, 2006. 10

(数学翻译丛书/丘成桐主编)

书名原文: Analysis

ISBN 7-04-017381-6

I. 分... II. ①利... ②洛... ③王... III. 数学分
析-教材 IV. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 122892 号

Copyright©2006 by authors.

图字: 01-2006-4198 号

This work was originally published in English by the American Mathematical Society under the title Analysis 2nd Edition, ©2001 in the name of the Authors, Elliott H. Lieb and Michael Loss. The present translation was created under license for Higher Education Press and is published by permission. This permission was contributed without charge by the American Mathematical Society and the Authors, Elliott H. Lieb and Michael Loss, in order to further Chinese mathematical research.

本书原版(书名: Analysis (2nd Edition)); 作者: Elliott H. Lieb, Michael Loss)由美国数学会于 2001 年出版发行。美国数学会及作者 Elliott H. Lieb 和 Michael Loss 免费授权高等教育出版社在中国大陆出版发行此翻译版本, 旨在推动中国数学研究的进一步发展。

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京人卫印刷厂		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2006 年 10 月第 1 版
印 张	21	印 次	2006 年 10 月第 1 次印刷
字 数	350 000	定 价	39.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 17381-00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后,国内大学逐渐与国外的大学增加交流.无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长,对中国的科学现代化都大有帮助.但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多.基本上所有中国的教科书都是由本国教授撰写,有些已经比较陈旧,追不上时代了.很多国家,例如俄罗斯、日本等,都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容,对数学的研究都大有裨益.高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此,开始计划做有系统的翻译,由王元院士领导,北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作.参与的教授很多,有杨乐院士,刘克峰教授等等.我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学,丰富他们的知识.海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助,我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005年1月

献给 Christiane 和 Ute

作者的话

本书是 Analysis (2nd Edition) 的中文译本 (英文版由美国数学会出版). 能将此分析学的著作介绍给中国读者, 我们感到十分高兴. 希望这本介绍数学分析及其应用的书能被中国读者接受.

中国科学界近年所表现出的活力给我们留下了很深的印象, 我们也很欣喜地看到中美学术界间越来越紧密的交流. 希望此书的翻译出版能为此尽一份微薄之力. 我们感谢丘成桐教授对本书翻译的组织, 感谢浙江大学王斯雷教授的精心翻译, 感谢郭伟博士认真细致的编辑工作. 我们还要感谢美国数学会无偿提供本书的版权, 从而使此书的翻译出版成为可能. 普林斯顿大学博士生鲁剑锋在本书校对中给予了宝贵的帮助. 此外, 他还更正了原书中由他及别人发现的许多纰漏, 从而使中文版更为准确. 我们在此表示感谢.

作者

2006年1月

第一版序言

粗略地看一看目录,读者就会发现这本分析学引论有些不同寻常,因此也许有必要阐明我们撰写这样一本包含基础积分论、位势论、重排、微分方程正则性估计以及变分学等众多内容的书的宗旨和动机.

最初,我们是想把现代分析学的要点介绍给物理学家和其他自然科学家,使得他们能够理解诸如量子力学的某些近代发展. 根据个人的经验,我们发现此项工作与将分析学教给数学系的学生有一些不同. 目前已有许多这方面的优秀教材,但是它们大多注重概念本身,而不够重视与数学其他分支的有用联系. 这是作者个人口味问题,但对许多时间有限的学生(和教师)来说,他们不愿意按部就班地了解基本原理,而是更愿意能够直接,通过实际运用来掌握知识.

本书取材于我们认为在研究中有用以及应用分析学家不可或缺的知识,诸如测度论与积分学, Fourier 变换, 常用函数空间(包括 Sobolev 空间), 分布理论等的基本知识. 我们的目的是引导初学者最方便地掌握这些内容,并使他们能阅读和理解当代文献. 同时我们希望以严格而又符合教学的方式完成这一切.

在我们的陈述中,不等式起了重要作用,其中有些不是很标准的,例如 Hardy - Littlewood - Sobolev 不等式, Hanner 不等式和重排不等式. 我们将这些以及其它不常见的内容,例如 $H^{1/2}$ 和 H_A^1 空间都列入本书的范围,完全是出于教学上的原因: 这些内容给学生提供了严格分析学中某些难题(即需要多写几行才能证明的一些有趣的定理),但又是利用本书中的基本工具就可以解决的. 用这

种方式,我们希望初学者能尝到研究数学的甜头,并体会到数学是学无止境的.

我们的方法始终是“直接入手”,即我们尝试着尽可能直接证明定理而不用一般的抽象理论.偶尔我们有漂亮的证明,但是避免不必要的抽象,例如应用在 L^p 空间中不是必需的 Baire 纲定理或者 Hahn-Banach 定理.我们的偏好是试图了解 L^p 空间,然后让读者在别处去学习 Banach 空间的一般理论(许多优秀教材都有),而不是相反.另外值得注意的是,我们努力不去说,“存在一个常数使得...”,而且通常给出该常数,或至少给出它的一个估计.对自然科学以及数学系的学生来说,知道如何计算是十分重要的.当今,在通常强调纯粹存在性定理的数学课程中,这一点往往被忽视.

从某种观点看,本书中的论题是高级而专门的与基础的两者的混合,但我们相信读者会认为它们是一个整体.例如,绝大多数教材严格区分“实分析”和“泛函分析”,但是我们认为这种区分不过是人为的.没有函数的分析不可能得到深远的发展.另一方面,在一本书中引用了许多量子力学的例子,却不提 Hilbert 空间,也似乎令人惊奇.只有结合了算子论, Hilbert 空间(线性代数水平之上)才成为真正有意思的理论,我们未能引入这部分内容,是因为好多优秀教材里都有.对传统次序最大的调整也许是在处理 Lebesgue 积分方面.第一章我们介绍了理解和应用积分所必须的知识内容,而没有花费精力去证明 Lebesgue 测度存在性;知道它的存在性就足够了.最后等读者熟悉了相关内容,其证明作为定理 6.22 (正分布为测度)的推论在习题 6.5 中给出.

读者需要知道的知识:虽然我们或多或少从“零”开始,但我们还是期望读者知道一些基础知识,所有这些知识均可在优秀微积分课程中学到.它们包括:向量空间,极限,下极限,上极限, $\mathbb{R}^n$ 中的开集、闭集和紧集,函数的连续性和可微性(尤其是多元情形),收敛性和一致收敛性(一般意义下的“一致”的概念),Riemann 积分的定义和基本性质,分部积分(Gauss 定理是其特殊情形).

如何阅读本书:本书虽有很多内容,但下述内容是主要的.一年二十五周的课程可以涵盖它.

第一章.积分的基本概念可从 1.1, 1.2, 1.5~1.8, 1.10, 1.12 (仅读命题叙述)和 1.13 学到.

第二章.关于 L^p 空间的基本理论在 2.1~2.4, 2.7, 2.9, 2.10, 2.14~2.19.

第三章.对于初次学习重排, 3.3, 3.4, 3.7 已经足够.这对巧妙地运用积分是很有用的练习.

第四章.阅读 Young 不等式 4.2 和 HLS 不等式 4.3 非最佳形式的证明.

第五章. Fourier 变换在众多应用中是基本的.阅读 5.1~5.8.

第六章. 6.1~6.18, 6.20, 6.21, 6.22 (仅读命题叙述).

第七章. 7.1~7.10, 7.17, 7.18, $H^{1/2}$ 空间和 H_A^1 空间是专门的例子, 在量子力学中有用, 初读时可以略去.

第八章. 除 8.4 之外的所有内容. Sobolev 不等式对偏微分方程是本质的, 就算不知道其证明, 但必须熟悉其命题叙述.

第九章. 位势理论对于物理学和数学都是经典而基本的. 9.1~9.5, 9.7, 9.8 是最重要的, 9.10 是 Harnack 不等式的有用推广, 值得学习.

第十章. 重点是了解如何从偏微分方程的弱解得到强解. 10.1, 10.2 与 10.3 的命题叙述应当学习, 其证明暂时不需要.

第十一章. 变分学作为求解某些偏微分方程的手段, 是非常有用和重要的. 这里给出的所有的例子以及 11.1~11.17 值得一学. 不仅因为他们本身的重要价值, 而且还因为它们用了本书前面几章的许多内容.

关于记号. 本书是围绕定理编排的, 但在定理前后常常给出一些相关的注记. 符号“•”表示介绍一个新思想或讨论, 而“■”表示定理证明的结束. 公式在每一节中分别编号, 例如记号 1.6(2) 表示在 1.6 节中的公式 (2). 习题 1.15 是指第一章第 15 习题. 为避免不必要的列举, (2) 是指同一节中标号为 (2) 的公式; 类似地, 习题 15 是指本章的习题 15. 第一次出现的术语用黑体字.

Walter Thirring 说过, 有三件事情是开始容易结束难, 首先是战争, 第二是爱情, 第三是颤音.^① 在此, 我们可以增添第四件事情——书. 这些年来, 许多学生和同事帮助我们在某些内容上摆正了方向, 还帮助我们改正和删去了某些严重的错误和不妥之处. 我们要感谢 Almut Burchard, Eric Carlen, E. Brian Davies, Evans Harrell, Helge Holden, David Jerison, Richard Laugesen, Carlo Morpurgo, Bruno Nachtergaele, Barry Simon, Avraham Soffer, Bernd Thaller, Lawrence Thomas, Kenji Yajima, 我们在美国乔治亚理工大学和普林斯顿大学的学生以及若干未署名的审稿人. 我们要感谢 Lorraine Nelson 打印了大部分手稿. 我们还要感谢 Janet Pecorelli 为本书最终出版所作的努力.

^①译者注: 这里, 颤音指钢琴演奏中的装饰性颤音, 常见于华彩乐章.

第二版序言

自从四年前本书出版以来,我们收到了许多同事和学生的有益的评注,他们不仅指出了打印错误(已及时在我们的网页上发布,其网址列在下面^①),而且还指出了有利于改进和澄清的有益建议.

我们也想增加一些符合本书宗旨的、希望对学生和使用者有帮助的内容.

这就导致了第二版,该版包含了所有的更正和一些新条目,其中主要是第十二章.我们给出了一些关于 Laplace 算子和 Schrödinger 算子特征值的内容,例如极小极大原理、相干态,半经典逼近以及如何利用它们得到特征值和特征值之和的界.此外还增加了其它内容,如包括紧致性原理的关于 Sobolev 空间的进一步研究(第八章)以及 Poincaré, Nash 和对数型 Sobolev 不等式等,后面两个不等式可用来得到半群的光滑性质.

第一章(测度与积分)补充了一些利用简单函数来推出积分理论的讨论,以及如何通过“真简单函数”使之更加简化,同时增加了 Egoroff 定理.在第六章(分布)增加了关于 Yukawa 位势等几方面的内容.

当然,还增加了更多的习题.

为避免与第一版发生冲突和混淆,我们有意识地将新增内容放在每章的最后,当然从逻辑上说这个位置未必为最佳;另外新内容的插入也尽可能地最少.(7.11 节关于 $\exp\{-t\sqrt{p^2+m^2}\}$ 的演算以及定理 2.16 的新证明为主要的例外).

^①网址为 <http://www.math.gatech.edu/~loss/Analysis.html>

我们非常感谢许许多多的联系人, 为了防止不经意的遗漏, 在此就不一一列出他们的名字了. 但我们希望朋友们能接受我们深深的谢意, 并竭诚希望他们能告诉我们在第二版中发现的错误. 我们将会在网上公示.

我们特别要感谢 Eric Carlen 给予我们的许多帮助, 他建议我们在第一章中加入测度论中常用的“简单函数”处理, 并任由我们使用他关于“真简单函数”的注记. 他还建议我们增加上面提到的第八章中的内容.

我们还非常感谢美国数学会出版者 Donald Babbitt, 是他要求我们写第二版并帮助我们获得美国数学会必要的资源. 我们再次有幸得到了 Janet Pecorelli 的帮助. 对于她在此项目中的出色发挥以及耐心地迁就我们不计其数的内容修改, 我们表示由衷的感谢. 对于 Mary Letourneau 极好的文字和技术加工, Daniel Ueltschi 进行的校对, 在此一并表示感谢.

2001 年 1 月

目 录

第一章 测度与积分	1
1.1 引言	1
1.2 测度论的基本概念	3
1.3 单调类定理	8
1.4 测度的唯一性定理	10
1.5 可测函数与积分的定义	11
1.6 单调收敛定理	15
1.7 Fatou 引理	16
1.8 控制收敛定理	17
1.9 Fatou 引理中的余项	19
1.10 乘积测度	20
1.11 乘积测度的交换性和结合性	22
1.12 Fubini 定理	22
1.13 层饼表示定理	23
1.14 浴缸原理	25
1.15 由外测度构造测度	26
1.16 Egoroff 定理	28
1.17 简单函数与真简单函数	29

1.18	真简单函数逼近	31
1.19	用 C^∞ 函数逼近	32
第二章	L^p 空间	36
2.1	L^p 空间的定义	36
2.2	Jensen 不等式	39
2.3	Hölder 不等式	40
2.4	Minkowski 不等式	41
2.5	Hanner 不等式	43
2.6	范数的可微性	45
2.7	L^p 空间的完备性	46
2.8	凸集投影引理	47
2.9	连续线性泛函与弱收敛	48
2.10	函数由线性泛函唯一确定	50
2.11	范数的下半连续性	51
2.12	一致有界原理	52
2.13	强收敛的凸组合	53
2.14	$L^p(\Omega)$ 空间的对偶	54
2.15	卷积	57
2.16	C^∞ 函数逼近	57
2.17	$L^p(\mathbb{R}^n)$ 的可分性	60
2.18	有界序列有弱收敛子列	61
2.19	C_c^∞ 函数逼近	62
2.20	$L^p(\mathbb{R}^n)$ 对偶空间函数卷积的连续性	63
2.21	Hilbert 空间	63
第三章	重排不等式	70
3.1	引言	70
3.2	无穷远处趋于零的函数的定义	70
3.3	集合与函数的重排	71
3.4	最简单的重排不等式	72
3.5	重排的非扩张性	74
3.6	一维 Riesz 重排不等式	75

3.7 Riesz 重排不等式	77
3.8 一般重排不等式	83
3.9 严格重排不等式	83
第四章 积分不等式	86
4.1 引言	86
4.2 Young 不等式	87
4.3 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式	94
4.4 共形变换和球极投影	99
4.5 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的共形不变性	102
4.6 竞争对称性	105
4.7 定理 4.3 的证明 (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式的最佳形式)	107
4.8 共形变换群在最优解上的作用	108
第五章 Fourier 变换	111
5.1 L^1 函数 Fourier 变换的定义	111
5.2 Gauss 函数的 Fourier 变换	112
5.3 Plancherel 定理	113
5.4 L^2 函数 Fourier 变换的定义	115
5.5 反演公式	115
5.6 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier 变换	116
5.7 Hausdorff-Young 不等式的最佳形式	117
5.8 卷积	117
5.9 $ x ^{\alpha-n}$ 的 Fourier 变换	118
5.10 推广 5.9 至 $L^p(\mathbb{R}^n)$	119
第六章 分布	121
6.1 引言	121
6.2 试验函数空间 $\mathcal{D}(\Omega)$	121
6.3 分布的定义及其收敛性	122
6.4 局部可积函数 $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$	123
6.5 函数由分布唯一确定	124
6.6 分布的导数	124
6.7 $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ 和 $W^{1,p}(\Omega)$ 的定义	125

6.8	卷积与分布可交换	127
6.9	关于分布的微积分基本定理	128
6.10	古典导数与分布导数等价	129
6.11	导数为零的分布是常数	131
6.12	C^∞ 函数与分布的乘积与卷积	131
6.13	用 C^∞ 函数逼近分布	132
6.14	分布的线性相关性	133
6.15	$C^\infty(\Omega)$ 在 $W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$ 中“稠密”	134
6.16	链式法则	134
6.17	绝对值的导数	136
6.18	$W^{1,p}$ 函数的极小与极大函数属于 $W^{1,p}$	137
6.19	零测度集原象上的梯度为零	139
6.20	Green 函数的分布 Laplace 算子	140
6.21	Poisson 方程的解	141
6.22	正分布为正测度	143
6.23	Yukawa 位势	148
6.24	$W^{1,p}(\Omega)$ 的对偶	150
第七章	Sobolev 空间 H^1 和 $H^{1/2}$	154
7.1	引言	154
7.2	$H^1(\Omega)$ 的定义	154
7.3	$H^1(\Omega)$ 的完备性	155
7.4	与 $C^\infty(\Omega)$ 函数相乘	156
7.5	关于 $H^1(\Omega)$ 和 $W^{1,2}(\Omega)$ 的注记	157
7.6	$C^\infty(\Omega)$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密	157
7.7	$H^1(\mathbb{R}^n)$ 函数的分部积分	158
7.8	梯度的凸不等式	160
7.9	$H^1(\mathbb{R}^n)$ 的 Fourier 刻划	162
7.10	$-\Delta$ 是热核的无穷小生成元	163
7.11	$H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ 的定义	164
7.12	$(f, p f)$ 和 $(f, \sqrt{p^2 + m^2}f)$ 的积分公式	166
7.13	相对论动能的凸不等式	167
7.14	$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密	168

7.15	$\sqrt{-\Delta}$ 和 $\sqrt{-\Delta + m^2} - m$ 对分布的作用	168
7.16	C^∞ 函数与 $H^{1/2}$ 函数相乘	170
7.17	对称递减重排减少动能	171
7.18	弱极限	172
7.19	磁场: H_A^1 空间	173
7.20	$H_A^1(\mathbb{R}^n)$ 的定义	174
7.21	反磁不等式	175
7.22	$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $H_A^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密	176
第八章	Sobolev 不等式	179
8.1	引言	179
8.2	$D^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $D^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ 的定义	181
8.3	关于梯度的 Sobolev 不等式	182
8.4	关于 $ p $ 的 Sobolev 不等式	184
8.5	一维和二维的 Sobolev 不等式	185
8.6	弱收敛蕴涵测度有限集合上的强收敛	187
8.7	弱收敛蕴涵着几乎处处收敛	191
8.8	关于 $W^{m,p}(\Omega)$ 的 Sobolev 不等式	192
8.9	Rellich-Kondrashov 定理	193
8.10	平移后的非零弱收敛	194
8.11	关于 $W^{m,p}(\Omega)$ 的 Poincaré 不等式	196
8.12	关于 $W^{m,p}(\Omega)$ 的 Poincaré-Sobolev 不等式	197
8.13	Nash 不等式	198
8.14	对数型 Sobolev 不等式	201
8.15	压缩半群简介	202
8.16	Nash 不等式和光滑估计的等价性	205
8.17	在热方程上的应用	206
8.18	通过对数型 Sobolev 不等式导出热核	209
第九章	位势理论与 Coulomb 能量	213
9.1	引言	213
9.2	调和、下调和以及上调和函数的定义	214
9.3	调和、下调和以及上调和函数的性质	215

9.4 强极大值原理	219
9.5 Harnack 不等式	220
9.6 下调和函数为位势	221
9.7 球面电荷分布与点电荷“等效”	223
9.8 Coulomb 能量的正性质	225
9.9 关于 $\Delta - \mu^2$ 的平均值不等式	226
9.10 Schrödinger “波函数”的下界	228
9.11 Yukawa 方程的唯一解	230
第十章 Poisson 方程解的正则性	232
10.1 引言	232
10.2 Poisson 方程解的连续性和一阶可微性	234
10.3 Poisson 方程解的高阶可微性	236
第十一章 变分法介绍	240
11.1 引言	240
11.2 Schrödinger 方程	241
11.3 动能对势能的控制	243
11.4 势能的弱连续性	246
11.5 E_0 的极小元的存在性	247
11.6 高阶特征值和特征函数	249
11.7 解的正则性	251
11.8 极小元的唯一性	252
11.9 正解的唯一性	253
11.10 例子 (氢原子)	254
11.11 Thomas-Fermi 问题	255
11.12 无约束 Thomas-Fermi 问题极小元的存在性	256
11.13 Thomas-Fermi 方程	257
11.14 Thomas-Fermi 极小元	258
11.15 电容器问题	260
11.16 电容器问题的解	264
11.17 球具有最小电容	267