

侯镇数学教育研究丛书

数学概念及其教学

薛 茂 芳 著



河南教育出版社

(豫)新登字 03 号

责任编辑:张国旺

封面设计:李 炎

侯镇数学教育研究丛书
数学概念及其教学

薛茂芳 著

河南教育出版社出版

(郑州农业路 73 号 邮编 450002)

北京印刷学院实习工厂印刷

河南省新华书店发行

850×1168 毫米 32 开本 7.875 印张 191 千字

1994 年 4 月第 1 版 1994 年 4 月第 1 次印刷

印数:1000 册

ISBN7—5347—1752—3/G · 1446

定价:5.20 元

前　　言

本书从1962年初开始拟稿。那是我踏上数学教育工作路途的第二个春天。屈指算来，已经是三十二个年头了。

引发我对“概念”的关注，是高中时代一位老师的启蒙：每当我们学习中出错的时候，他总是深沉地对我们说、又象是自言自语地道：“概念不清啊！”

什么是概念？这是三十多年前我对老师教诲的首次发问，也是本书正文开头的第一句话。

在教学工作岗位上，不管是从自己的“教”，还是从学生的“学”中，我一年更比一年深刻地体会到：决定数学教学效果的首要因素、基础因素和贯穿始终的因素，就是：概念要明确。正是基于此种目的，才能够使我不仅在刚刚参加工作后不久便选定了这样一个教学研究方向，而且在几十年的颠簸之中顽强地坚持了这样一个教学研究方向。

我觉得，我的数学教学是有自己鲜明的个性的。如果说这种个性尚能获得学生欢迎的话，那么原因之一，便是我一向好打“概念明确”这张牌。这张牌是怎样打的？本书就是我所能够提供的一个比较系统的理性答案，它可以是本人教坛一生的“代表作”。

谨以此作为“侯镇数学教育研究丛书”的第一块“问路石”，奉献给所有从不同方面、不同方式给我以理解、激励、支持和帮助的朋友。

薛茂芳
于侯镇数学教育研究所
1994年4月30日

目 录

前言.....	(1)
一 概念.....	(1)
1. 属性和本质属性	(2)
2. 思维和数学思维	(3)
3. 思维形式和概念	(8)
4. 概念的内涵和外延.....	(12)
5. 获取概念的逻辑方法.....	(14)
二 数学概念的类别	(20)
1. 单独概念和普遍概念.....	(20)
2. 种概念和属概念.....	(22)
3. 组合概念和个体概念.....	(24)
4. 抽象概念和具体概念.....	(28)
5. 否定概念和肯定概念.....	(30)
6. 相对概念和绝对概念.....	(31)
三 数学概念间的关系	(35)
1. 同一关系.....	(35)
2. 主从关系.....	(37)
3. 交叉关系.....	(38)
4. 并列关系.....	(39)
5. 对立关系.....	(41)
6. 矛盾关系.....	(43)
7. 整分关系.....	(44)
四 数学概念的定义	(48)
1. 数学概念的定义, 定义的作用, 定义规划.....	(48)

2. 数学概念的基本定义方式—一种属定义法	(52)
3. 数学概念的特殊定义方式	(54)
发生定义法	(54)
派生定义法	(56)
4. 特殊数学概念的定义方式	(59)
数学相对概念定义法	(60)
数学组合概念定义法	(62)
数学过程概念定义法	(64)
数学关系概念定义法	(64)
5. 数学概念的准定义方式	(66)
数学原始概念	(66)
准数学概念	(69)
数学语词概念	(70)
6. 数学概念的外延定义方式	(73)
概念的逻辑分类	(73)
数学概念的外延定义方式	(77)
7. 数学概念的形式定义方式	(78)
五 数学概念的名称—数学概词	(80)
1. 名称、概词和数学概词	(80)
2. 数学概词的命名	(82)
3. 数学概词的结构	(85)
4. 规定和使用数学概词的规则	(88)
六 数学概念的符号	(90)
1. 数学符号的意义	(90)
2. 数学符号的特点	(92)
3. 数学符号的类别	(95)
4. 数学符号的组合	(97)
5. 关于数学符号的教学要点	(101)

七 中学数学和中学数学概念	(104)
1. 中学数学的学科性	(105)
2. 中学数学概念	(108)
八 数学概念教学的一般程序和措施	(113)
1. 数学概念教学的备课	(113)
2. 数学概念课的教学	(121)
3. 数学概念教学的深化措施	(129)
九 数学概念教学与数学素质培养	(139)
1. 素质与教育	(139)
2. 数学概念教学中的数学观念教育	(144)
3. 数学概念教学中的数学能力培养	(156)
4. 数学概念教学中创造性的启蒙	(175)
附录一 初中数学概念一览	(178)
初中代数部分	(178)
初中几何部分	(190)
附录二 高中数学概念一览	(204)
高中代数(甲种本)部分	(204)
立体几何(甲种本)部分	(216)
平面解析几何(甲种本)部分	(223)
微积分初步(甲种本)部分	(227)
附录三 物理科学和技术中使用的数学符号	
(国家标准 GB3102·11—82)	(231)
附录四 一些数学符号的产生年份	(239)
附录五 常用字母表(希腊、拉丁、英、汉、俄)	(242)
1. 希腊语字母表	(242)
2. 拉丁语、英语、汉语	(243)
3. 俄文字母	(244)
参考文献	(245)

一 概 念

什么是概念?

从字面上看,概,就是大略、总体或概括的意思;念,就是想法、看法或观点.一并释之,概念就是人们对于一件事物或某种现象的大概总括的认识.

这种顾名思义的语词解释,固然可以做为我们理解和掌握“概念”的科学意义的启示或导引,但在科学的研究和知识传播中,却是极不确切、不深刻、不全面的,很容易造成思想上的混乱.

逻辑学说:概念是反映并确定客观对象的本质属性的思维形式.^①

如果没有起码的基础知识,这个关于概念的科学定义是不好理解的.什么是本质属性?什么是思维?思维形式又是什么?如此等等,一系列疑问都必须首先弄清楚.

为了便于理解和掌握概念的科学定义,我们将首先从“现象”、“事物”讲起,介绍“对象”及其“属性”和“本质属性”等基本知识,进而从心理学的角度阐述人的心理活动(即大脑的高级神经活动,下同)由低级到高级的各段发展过程.在明确概念及其自身内部的一对主要矛盾——内涵和外延的意义之后,还要从获取概念(或曰形

^① 概念究竟反映客观对象的何种属性,本书仍沿袭传统的“本质说”,除此之外,与主张放宽“思维”外延的观点不无联系,有人提出了“特有说”、“综合说”和“确定说”等论点,值得注意.参阅林铭钧等:试论形式逻辑中概念的定义,载中国逻辑学会形式逻辑研究会编《形式逻辑研究》,1984年版,第73页;李延河:关于形式逻辑中概念的定义,载《延安大学学报(社科版)》1986年第1期.

成概念)的角度,介绍几种最基本的逻辑方法.

1、属性和本质属性

我们生存的世界,是一个现象罗列、事物丛居的世界.我们所特别关注的数学科学领域,也到处充满了现象和事物.

事物和现象,统称对象.

客观对象所表露或内在的一切,都叫做属性.

例如,运动是物质的属性,能用语言表达思想是人的属性,能进行感情交际是动物的属性,能传授知识是教学的属性,可施行加、减、乘、除四则运算是实数的属性,含有未知数是方程的属性,有四条边是四边形的属性,未知数用 x 来表示是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的属性,对角相等是平行四边形的属性,等等.

某一客观对象的属性是很多的,甚至是穷举不尽的.但就其所处地位和相互关系而言,也不是“平等”的.它们有表面与内在之分,有片面与全面之别,有的能够派生其它属性,也有的为其它属性所决定.

例如,“一元二次方程”这个对象(方程 $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$)就有这样一些属性:是整式方程;含有一个未知数;未知数的最高次数是 2;是一个等式;左端或者是一个二次三项式,或者是一个二项式,或者是一个单项式;未知数用字母 x 来表示;等等.其中,“是整式方程”,“含有一个未知数”,“未知数最高次数是 2”等三个属性,对于其它属性而言,就是内在的、全面的属性,其它很多属性或者由其之一推出,或者由它们三者所共同决定.再如,“平行四边形”这一数学对象的属性,有:是四边形;两组对边分别平行;对边相等;邻角互补;对角相等;两条对角线互相平分;有四条边;有四个内角;有四个顶点;等等.其中,“是四边形”、“两组对边分别平行”等两个属性,就是能够派生和决定其它一切属性的属性.

在客观对象的属性中,那些由其可以决定和派生其它所有属

性的属性，叫做该对象的本质属性，余者则是非本质属性。由此可知，一元二次方程的本质属性是：是整式方程，含有一个未知数，未知数的最高次数是2. 平行四边形的本质属性是：是四边形；两组对边分别平行。再如，是方根、方根是正数、被开方数是正数等，都是算术根的本质属性。是边数相同的几个多边形、对应角都相等、对应边都成比例等，则是相似多边形的本质属性，等等。

本质属性的意义决定了它的基本作用，就是：它能够使它所反映的对象同与其相近的其它对象，从“本质”上严格区别开来。

必须指出，客观对象的本质属性不是绝对的，也不是唯一的。研究问题的角度不同，就会对同一对象归结出不同的本质属性，这是常见现象，其理论依据则是等价命题的客观存在。

例如，对平行四边形来说，若从边的平行关系着眼，可以把“两组对边分别平行”作为它的一个本质属性；而若从边的平行与垂直两种关系去考察，则又可以把“一组对边平行且相等”作为它的一个本质属性。在这儿，“两组对边分别平行”和“一组对边平行且相等”是两个相互等价的命题。即：由前者可以导出后者；反之，由后者也可导出前者，两者可以互相代替。

又如，“数的绝对值”有一个本质属性是：数的绝对值等于数轴上对应于这个数的点到原点的距离。由表述这个本质属性的上述命题可以推出三个分命题：正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值是零。反之，由这三个分命题也可推出前一命题。就是说，它们是相互等价的，可以互相代替。

了解本质属性的相对性和多样性是必要的，因为，它是同一概念存在两种或两种以上的定义和名称的理论依据，在学生发生疑惑时，只要“点”破它们的等价性，问题便迎刃而解。

2、思维和数学思维

人的心理活动，是客观对象的属性在人脑中引起的神经运动。

人脑是心理器官，客观对象是心理活动的本源，人脑反映客观对象的属性，便产生了人的心理。

人的心理发展过程，从简单到复杂，由低级到高级，大体经历了感觉、知觉、表象和思维等四个阶段。

什么是感觉？

感觉是客观对象的个别属性在人脑中的反映。

例如，当一只苹果（它是一个客观对象）作用于我们的感觉器官（眼睛、鼻腔、嘴巴和手指等）的时候，通过眼睛（视觉），我们能看见它特有的红颜色（以及其它色泽），通过鼻腔和嘴巴（嗅觉和味觉）可以品出它特有的甜味（以及其它味道儿），通过手指（肤觉）可以确定它特有的表皮光滑（以及其它）。这里，红的颜色，甜的味道儿，光滑的表皮等，是苹果的三种个别属性，反映到我们头脑里，便产生了三种不同的感觉。

感觉是一种最简单的心理活动，它虽然只反映客观对象的个别属性，但却是其它较复杂的心理活动的基础。

显然，仅仅依靠某一种感觉（比如甜味儿），我们还不能对整个对象做出全面的或本质的判别。因为，其它对象（例如糕点）也可能具有这种甜味儿。

什么是知觉？

知觉是客观对象整体在人脑中的反映。

知觉比感觉全面、复杂，它已经在几种感觉的基础上的某种程度的综合了。

例如，面前有一个对象，通过眼睛，我们看见它特有的红颜色，通过口鼻腔，闻到它特有的甜味儿，通过手指，感到它特有的那种表皮的光滑。前已说明，这是三种不同的感觉。在心理活动业已发展的基础上，三种感觉产生以后，人的心理活动并无瞬间的中断，而是将三种感觉联系起来，综合考察，进而断定：这是苹果！能够做出“是苹果”的断定，就是人的一种较感觉更为高级的心理活动。

——知觉。在这里，人的心理所反映的，已经不是苹果的个别属性，而是苹果这一对象的整体了。

自然，作为现代人，甚或百年千年前的人，将刚刚产生于头脑的几种感觉上升为一种知觉，几乎是没有什么时间空隙的，但在人类进化史上，将几种感觉上升为一种知觉的心理发展，却曾经历过一段漫长的历史进程。

知觉是在感觉的基础上形成的，但却不是若干种感觉的机械和，而是各种感觉的有机结合。具体地说，不是苹果的那种红颜色，而是标语纸那种红颜色；不是苹果的那种甜味儿，而是西瓜的那种甜味儿；不是苹果的表皮的那种光滑，而是滑石粉式的光滑，三者硬是联系起来，无论如何也得不到关于苹果的知觉，只能是停留在感觉阶段的一种简单加法而已。

什么是表象？

表象以感觉和知觉为基础，但不同于感觉和知觉。感觉和知觉是客观对象当时作用于感官而产生的直接反映，表象则是对从前感知过而当时不在眼前的客观对象的间接反映。就是说，人们通过感觉和知觉，曾获得了关于某客观对象的表面形象特征，这些表面形象特征，在人们离开了对象实体的某种机会，借助于某种媒介（例如语言），而能在头脑中重新显现时，便是一种表象。因此，我们说，

表象是曾感知过的客观对象在人脑中留下的比较（感觉和知觉）持久的形象。

从生理学的观点看，表象的出现显然标志着人脑已经具备了记忆功能。

例如，在某种场合，我们对某一种苹果曾形成一种知觉，在另外几种场合，又数次感知过另外几种苹果。此后，当苹果不在眼前，而只需有人喊出“苹果”一词时，我们便能想象出关于苹果的整体形象或其个别特征，就是一种表象。

人类表象心理活动的形成，意味着人类认识发展史上的又一次飞跃，从此之后，人们完全可以离开客观对象实体而讨论客观对象了。

心理活动在感觉、知觉和表象的基础上的进一步发展，便到达于思维阶段。

什么是思维？

人们研究复杂的客观世界，仅仅认识客观对象的个别属性（通过感觉）、个别对象（通过知觉），或仅仅能够离开对象实体来讨论以非本质属性和外表联系为主的表象问题，是很不够的，更重要的是，去认识掌握客观对象的本质属性，即内在规律。这个任务，只能通过更高一级的心理活动——思维来实现。

思维，就是客观对象的本质属性在人脑中的反映。^①

思维与感觉、知觉和表象的区别，通过一个生活小例，便可说明。人们看到，炉底下煤在燃烧，烟囱在冒烟，我们说过，这是两种感觉。把两种感觉有机地联系起来，从整体上来把握，知道是生火，这是知觉。当人们离开了生火现场，而能在头脑里复现生火的表面形象——熊熊的烈火，灰色的烟缕时，则是表象。积累了若干经验，进行了必要的抽象概括后，人们发现：凡生火就有烟，凡有烟必定在生火，并且仅仅通过“烟囱冒烟”就能做出“炉底在生火”的断定时，就是思维了。因为，在这个过程中，人们不仅获得了个别现象（生火）的个别属性（火和烟）的表面形象（熊熊的烈火，灰色的烟缕），更重要的是，人们已经透过个别现象和表面现象，认识到了“生火”的内在规律之一：火和烟的因果关系。

由此可见，感觉、知觉和表象对客观对象的认识是直接的，思

^① 关于思维的定义，大体有“传统说”和“现代说”之别。近年刚刚兴起的思维科学认为，思维就是开动脑筋，外延很宽，及至有“动物也有思维”的论点。本书仍沿袭“传统说”的论点。

维的认识则是间接的(通过烟而认识生火);感觉、知觉和表象对客观对象的认识是表面的,思维的认识则抓住了对象实质(烟是火的产物);感觉、知觉和表象对客观对象的认识尚处于相对的静止、孤立状态,思维的认识则是运动的、联系的(由烟到火,到生火).

总之,思维是人类最高级的心理活动,是人类区别于其它一切动物的本质属性之一.自从产生思维以后,人类才真正登上大自然的金銮殿,成为大自然的主人.

下面,简要地谈谈什么是数学思维.

显然,数学思维同思维,是部分(或个别)和整体的关系,是特殊和一般的关系.前已说明,思维是反映本质属性的,那么,作为思维的一种特殊形态、类别,数学思维是反映“本质属性”哪个部分,哪个侧面或哪个层次呢?

对于这个关于数学科学的根本性问题,古今中外的哲学家、数学家、教育家都很关心,曾提出过许多不同的说法.但是,先人们的种种说法,或者从“什么是数学”这样一个观点出发,或者把“数学思维”和“数学科学”混为一谈,因而很难找到准确的答案.

思维是一种运动,运动则有过程,所谓数学思维,实际上就是指数学思维过程,数学科学便是它的结果或内容.因此,数学思维的结果(即数学科学)和数学思维的过程(即数学思维自身)是认识论中两个不同层次的概念.

数学思维最基本的特点在于惯用娴熟的手段——抽象模拟,来反映客观世界.数学思维的对象(一个数、式、图形,一条性质、法则、定律,一种推理、论证等)都不是在人的一般感知限度以内具体存在的实物,而是为了反映具体存在而从具体存在中提炼出来的理想存在(或叫超越人的一般感知限度的存在),这些理想存在对象都是数学思维从一类具体存在对象的共同形象中“抽”取出来的、纯粹人造的理想形象,即抽象模拟的产物,曰:数学模型.在谈到数学科学的特点时,人们往往首先谈及它的“高度抽象性”,所谓

抽象,一方面指数学模型都是抽象的产物,更重要的,是指数学思维在提炼数学模型过程中的抽象高度。总之,数学科学的抽象特点,是从思维的角度提出来的。

数学思维的典型抽象性,并不意味着在数学思维和抽象思维之间可以划等号,因为数学思维也存在自己生动灵活的形象思维。^①只是数学模型的形象绝非一般具体形象,而是通过抽象得来的理想形象而已。

数学思维更不可同逻辑思维等价看待,因为逻辑思维只是抽象思维的一个组成部分。

数学思维抽象模拟的基本特点,决定了它的另外一些特点,它们主要是:

正如登高可以望远一样,数学思维的高度抽象,使数学思维同时具备了极广阔的概括性,这种广阔的概括性正是数学科学应用广泛的思维根据。

语言表达思维,语言是思维的物质表现形式,是思维信息的重要载体。与数学思维的高度抽象相适应,表达数学思维的语言——数学语言的符号化、形式化和理想化,构成了数学思维的又一特点,是数学思维的形象发展。

此外,数学思维方法的哲学性质和定量特点所决定的数学科学的严密精确性,也被认为是数学思维的重要特点。

3、思维形式和概念

正如任何具体存在的客观事物和现象都有自己的表现形态、组织结构和发展状况一样,作为一种现象而存在的思维,也有自己的结构、部件、单元,并取一定的表现形式去完成刻画表述客观对

^① 参阅薛茂芳:形象思维与数学教学,载北京《数学通报》1987年第9期或北京《思维科学通讯》1986年第二期增刊。

象的本质属性的任务.

思维在“反映”客观对象的过程中,一般要完成三个任务:第一是在已知属性的基础上发现或导出新的属性;第二是在关键时刻要对对象是否具备某个属性作出明确的结论;第三是为了把某一对象同其它对象严格区别开来而对该对象从本质上进行界说.对应于以上三项任务,思维形成了自己的三种基本形式:推理、判断和概念.下面按概念、判断、推理的顺序分别予以解释.

反映并确定客观对象本质属性的思维形式,叫做概念.

例如,概念“含有一个未知数并且未知数的最高次数是2的整式方程”就反映和确定了一类对象的本质属性,这个概念取名叫做“一元二次方程”.

又如,概念“两组对边分别平行的四边形”反映和确定了另一类对象的本质属性,这个概念取名叫做“平行四边形”.

一般情况下,凡常用的概念都至少有一个相应的名称,因此,在提及概念时只需指出其名称便可.

其它如,自然数,面,集合,方程,开方,微分,把分母有理化,约分,黄金分割,对称,一一对应,全等,相似,零指教幂,圆周率,绝对值,对数,函数,数列,行列式,必然事件,复数,定积分,等等,都是中学数学中的一些概念,它们的意义,都是对数学中某类客观对象的本质属性的反映和确定.

肯定或否定客观对象具有某种属性的思维形式,叫做判断.

例如,二加三等于五;三角形三个内角的和等于 180° ;方程是一个等式;算术根是非负数;正数大于一切负数;同圆的半径相等;等腰三角形的底角相等;无理数是无限不循环小数;奇函数的图象关于原点对称;终边相同的角的同一三角函数的值相等;长方体的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积;两个复数相乘所得的积还是一个复数;常数的导数等于零;异次根式是根指数不同的根式;分母不能是零;零没有倒数;分子和分母同时改变符号分式的值不

变; ∞ 不是一个数; 等等, 都是一些具体的数学判断. 它们或者肯定某数学对象具有某种属性, 或者否定某数学对象具有某种属性, 从而对数学对象是否具有某属性作出明确的断定.

根据一个或几个已经确定的判断来确立一个新的判断的思维形式(或者说, 根据客观对象的已知属性推知新的属性的思维形式), 叫做推理.

例如, “ $\because a=b$, 又 $b=c$, $\therefore a=c$ ”; “正方形既是一组邻边相等的矩形, 又是一个角是直角的菱形, 所以正方形同时具有矩形和菱形的所有性质”(初中课本《几何》第一册, 1983年11月第1版, 第179页); “凡能被2整除的数都是偶数, 10能被2整除, 所以10是偶数”; “由于直线的位置可以由直线上的任意两点唯一确定, (而一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条直线,) 所以要画 $y=kx+b$ 的图象, 只要先确定这条直线上的任意两点, 然后过这两点画一条直线就行了”(初中课本《代数》第四册, 1984年第1版, 第66页. 括号内一句系作者所加); ……这些, 就是几个简单的数学推理了. 很明显, 以上每一个推理, 都使我们发现了所考察对象的某种新的属性.

根据作者的写作计划和要求, 关于判断和推理方面的基本知识, 本书将不再做进一步介绍, 而关于概念的意义, 则有必要作如下的补充说明.

前边说, 思维是客观对象的本质属性在人脑中的反映; 这里说, 概念是反映并确定客观对象本质属性的思维形式, 那么, 应当怎样来区分思维和概念? 概念对思维具有什么意义?

应当明确, 思维是人类最高阶段的心理活动, 是认识发展的一个阶段和过程, 正如“教学”这种现象(它也是一种过程)针对不同的任务, 采取课堂讲授、课外作业、实验报告等多种教学形式一样, 思维也是根据自己的任务, 具备了自己的几种不同的思维形式, 概念则是其中之一, 其他两种是判断和推理. 三种思维形式, 各有各的任务, 各有各的作用, 谁也不能代替谁; 只有三者有机地结合起

来,相互渗透,互为因果,才能发挥思维的全部功能,完成思维的全部任务.概念作为思维形式之一,当然不能发挥其他两种思维形式的作用,因而不可同整个思维活动等同起来,正如课堂教学不可与全部教学过程划等号一样.

我们知道,平行四边形,矩形,对边,相等,……这是一些数学概念.人们根据自己对这些概念之间的某种科学联系的认识,用适当的语词表达出来,于是得到:“平行四边形的对边相等”,“矩形的对边相等”,“矩形是平行四边形”,……我们说过,这是一些数学判断.再把这些数学判断之间存在的某种联系加以科学地表述,得:“因为平行四边形的对边相等,而矩形是平行四边形,所以矩形的对边也相等”,这则是一个简单的数学推理了(通过这个推理,使我们发现了矩形的一个属性:对边相等).

由此可见,推理是判断与判断的有机结合,判断是概念与概念的有机结合,概念,则是最基本的思维形式.也可以说,概念是思维的基本单位、砖瓦材料.只有首先形成概念,思维的判断和推理才是可能的.

事实正是这样:任何科学认识的成果,都是首先通过形成一些新的概念来加以总结和概括的,各门学科都有自己的一系列科学概念;任何一门科学的原理、公设、定理、法则、性质和规律,无不建立在相应的科学概念的基础上;而一门科学的完整体系又正是由概念、与这些概念相关的基本规律和利用推理得到的一系列论断所组成的.

总之,没有科学的概念,就谈不上科学的思维,没有科学的概念和思维,也便不可能有任何一门科学理论.实际上,思维活动就是运用概念进行判断推理,从而导致新概念不断产生和发展的往复循环的过程,概念既是思维的基础,出发点,也是思维的结果和归宿.

因此,切实加强概念教学,让学生形成清晰明确的概念,从而