三大主科学习策略丛书之一

数学学习策略

SHU XUE XUE XI CE LUE

郭民　卢秀双　著

权威推荐

名师点拨

博士导航

状元心得

吉林大学出版社

数学学习策略

三大主科学习策略丛书之一

数学学习策略

郭民　卢秀双　著

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据
数学学习策略　郭民　卢秀双　著
-长春:吉林大学出版社,2003.12
(三大主科学习策略丛书)赵义泉/主编
ISBN 7-5601-2721-5/G·450
Ⅰ.数… Ⅱ.郭… Ⅲ.数学-课外读物Ⅳ.G.450
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 50228 号

三大主科学习策略丛书之一

数学学习策略

郭民　卢秀双　著

责任编辑、责任校对:张显吉　　封面设计:欧　亚

吉林大学出版社出版
(长春市明德路 3 号)
吉林大学出版社发行
吉林省九三彩色印刷厂印刷

开本:850×1168 毫米　1/32
印张:8.5
字数:145 千字
2003 年 12 月第 1 版
2003 年 12 月第 1 次印刷
印数:1-1000 册

ISBN 7-5601-2721-5/G·450
总定价:54.00 元(三册)
本册定价:18.00 元

目　　录

序

自从上世纪70年代开始,对于学习策略(learning strategy or study strategy)的研究在教育心理学中引起了越来越多的重视.在近30多年的时间里,人们对此进行了大量的探索,研究者们由于研究的角度不同而提出了各自不同的看法.一种观点把学习策略看成是促进信息的获得,保持与应用的各种过程或方法.另一种观点认为学习策略就是对一般学习活动如问题解决等进行监控的能力,也就是说学习策略是支持思维活动的操作过程,它由一系列技能组成,并指向于头脑中的特定目的.第三种观点认为学习策略是个体为了实现某一学习目标而形成的复杂方案或计划,它不同于各种学习技能,也不只是更具一般化的自我管理活动.策略是对各种技能的综合应用,是一个活动系列,为了适合某一情境,人们可以不断地修正策略本身.

我们认为,要给学习策略下定义,就必须首先对学生的学习活动进行分析.学生所从事的学习活动可以分为两大类:获得信息的学习和解决问题的学习.这两种形式的学习活动之间是相互关联的,获得信息的学习与问题解决的学习都包含着一系列的技能成分.比如,如何有效地理解并记忆材料中所提供的信息?如何使新学习的知识与原有经验相互整合?以及如何有效地调控自己的认知过程来促进问题的解决?等等.同时,获得信息的学习又为解决问题的学习提供了相应的知识准备.在解决问题的学习中,学习者要通过对所面临的问题进行分析,从而在自己的心理结构中选择适当知识与技能,通过认知加工,最终解

决相应的问题.而要使这两类学习活动有效并且取得成功,就必须掌握相应的学习策略,学习策略的作用就是调节学习活动进程,保证学习活动取得比较好的效果.

“问题是数学的心脏,问题解决是数学教育的核心”,古往今来,无论是学习数学还是研究数学都离不开数学问题和数学问题的解决.我国的第一部数学专著《九章算术》所讨论的就是246个数学问题及其解题方法.数学作为一门科学,应该是数学思维活动过程和思维活动结果的结合,数学知识本身就是数学思维活动的产物,一般数学书籍所记载的都是数学思维活动成果的积累.正因为如此,数学学习不仅仅是获得其最终结果,更重要的是反映思维过程的数学问题解决过程.数学是一门工具性很强的科学,这和别的科学比较起来还具有较高的抽象性,要学习好数学,就必须掌握好数学学习策略,数学学习策略是学好数学的金钥匙.

本书共分六章,每一章都介绍了一种学习策略,并且每一章都给出了数学学习策略的具体策略的数学背景及应用范围.在体例安排上大致是分“导航、点拨与实例、实践”三部分,导航就是介绍数学学习具体策略本身及其应用价值;点拨与实例就是要应用数学策略解决具体的数学问题;实践就是让中学生具体操作,利用数学学习策略来数学地解决问题.

本书不是一般的数学练习册或数学辅导书,而是站在一种较高的观点上解决中学数学问题,试图使学生摆脱“题海战术”,适应素质教育的主旋律,使中学生不仅能学好数学,更重要的是培养中学生的数学素养,发展个性思维,突出个性化,人文化的特点,为适应将来的社会发展打下坚实的物质基础.

王仁发

2002年12月东北师大

第一章 数学猜想与合情推理策略

一、数学学习中的猜想策略

没有大胆的猜想，就做不出伟大的发现.

——牛顿（Newton）

导航:

学习数学和研究数学令人最感到困惑也是最引人入胜的环节之一，就是如何发现定理及怎样证明定理. 特别对于初学者来说尤其如此. 数学上的发现及证明不仅要从数学本身，而且要从数学以外的有关知识和实践得到启发，这是很重要的. 这种启发往往是发现及证明的前导. 著名的数学家波利亚就把“从最简单的做起”当作自己的座右铭，这又为启发性的前导提供了立足点，这就是人所众知的“合情推理”的模式. 而猜想又是合情推理的最普遍、最重要的一种，归纳也好，类比也好，都包含有猜想的成分. 然而猜想可以打开人们思想的闸门，从物理的、生物的、天文的、地理的乃至大自然的以及数学本身的等等……，总之根据人们的日常生活、经验、实践及各方面的知识对要科学论证的问题加以“去粗取精，去伪存

真，由此及彼，由表及里的改造和制作”，以期获得欲达之目的. 说得直接了当一点，合情推理就是猜想.

数学史上就充满着猜想！可以说，数学是伴随着对数学命题的猜想而发展的. 我们都知道，几何学是从制造器皿、测量容器、丈量土地等实际问题中产生和发展起来的. 在几何学的发展历程中，有两个重大的历史性转折. 其一是欧几里得在前人毕达哥拉斯、希波克拉底和欧多克斯等人的工作基础上，一举完成了统治几何学近 2000 余年的经典著作《几何原本》，使得几何学发展成为一门独立的理论学科，是几何学史上的一个里程碑.

其二，也正是由于《几何原本》的问世，带来了一个使无数人困惑和兴奋的著名问题——欧几里得第五公设问题. 在《几何原本》的第一卷中，规定了五条公设和五条公理. 著名的欧几里得第五公设：“若两条直线被第三条直线所截，如有两个同侧内角之和小于两直角，则将这两条直线向该侧适当延长后必定相交”.

这是五条公设中的最后一条，由于它在《几何原本》中引用得很少（直到证明关键性的第 29 个定理时才用到它）；而且，远不如前四条公设那样简洁明了，似乎欧几里得本人都在尽量避免应用第五公设. 于是一代又一代数学家猜测，欧几里得第五公设可以证明.

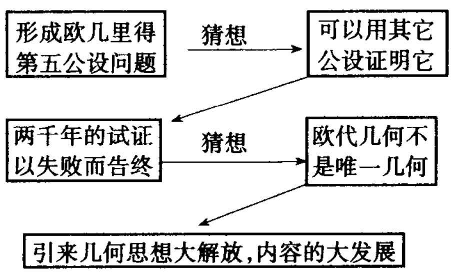
然而直到 19 世纪，经过了一代又一代数学家前赴后继的工作，人们才逐渐意识到“欧氏第五公设可以证明”是一个错误的猜想. 第五公设的试证中，总是发生“偷用”某个与第五公设等介的“假设”去代替的毛病，这逐渐地使几位思想较开阔而又有远见的数学家高斯、罗巴契夫斯基意识到：

“欧几里得第五公设是不能从《几何原本》的其余公设、

公理中导出的”. 亦即与其它公设、公理不相依赖，并且提出了一个新的大胆猜想：“欧几里得几何不是惟一的几何；任何一组假设如果不导致矛盾的话，一定提供一种可能的几何”.

罗巴契夫斯基等正是在此想法的基础上开展了一系列工作，发现了非欧几何. 可以说 19 世纪所有复杂的技术创造中间，最深刻的一个——非欧几何的创造，就是起源于两千年试证第五公设的失败而日渐形成的大胆的猜想，非欧几何是在欧几里得几何领域中，一系列的长期努力所达到的一个新顶点.

我们可以用一个简明的框图表示出来：



猜想是在对研究的问题或对象进行观察、实验、分析、比较、类比、联想、归纳的基础之上，依据已有的材料和知识作出符合一定经验与事实的推测性想象的思维方法. 猜想是一种合情推理，属于综合程度较高的带有一定直觉性的高级认识过程，是一种创造性的思维活动.

中等数学学习过程中的主要活动是解题活动，猜想对于数学解题是有很大的帮助和好处的. 在中学数学教学中，引导学生进行猜想，培养他们的猜想能力，是提高学生创造能力的一条有效途径.

下面介绍一下解题过程中的常见的几种猜想.

实例与点拨

1. 归纳性的猜想.

在求解数学问题时，如果要求证明某个一般性的问题或做出一般性的解答，而直接求解难于入手时，不妨先对特例的归纳来猜想原题的正确结论，或猜想解决原题的有效途径，这种运用归纳的方法，对研究问题的特例进行观察、分析，从而得出有关命题的形式、结构或方法的猜想称为归纳性猜想.

【例 1】 平面上 n 条直线两两相交，其中任意三条不共点，问它们能把平面分成多少部分？

【点拨】 如图 1-1，

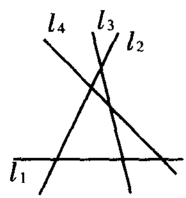


图 1-1

当 $n=1$ 时，$f(1)=2$，

当 $n=2$ 时，$f(2)=4$，

当 $n=3$ 时，$f(3)=7$.

当 $n=4$ 时，$f(4)=11$.

依次做出归纳，$f(2)=f(1)+2$

$f(3)=f(2)+3$

$f(4)=f(3)+4$

猜想 $f(n)=f(n-1)+n$

为什么 $f(n)$ 比 $f(n-1)$ 多 n 个呢？这是因为 $n-1$ 条直线把平面分成了 $f(n-1)$ 个平面，当平面内增加一条直线 l_n 时，直线 l_n 与前 $n-1$ 条直线有 $n-1$ 个交点，这 $n-1$ 个交点把 l_n 分成 n 段，而每一段把它所在的平面一分为二即增加一个，共增加 n 个，即得递推关系.

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+n\ (n\geq 2) \\ f(1)=2 \end{cases}$$

由递推关系得：

$$f(n)=f(1)+[(f(2)-f(1)]+[f(3)-f(2)]+\cdots+[f(n)-f(n-1)]$$
$$=2+2+3+\cdots+n$$
$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

【例 2】 现有 n 个圆，其中每两个圆相交于两点，并且每三个圆都不相交于同一点，问 n 个圆把平面分成多少个部分?

【点拨】 如图 1－2，当圆的个数较少时，我们可以数出圆的个数，而当圆的个数较多时，我们就无法逐一地数出来了．因此，我们想从简单情况入手，来探索规律．

当 $n=1$ 时，一个圆把平面分成两个部分：$1^2-1+2=2$

当 $n=2$ 时，两个圆把平面分成四个部分：$2^2-2+2=4$

当 $n=3$ 时，三个圆把平面分成八个部分：$3^2-3+2=8$

当 $n=4$ 时，四个圆把平面分成十四个部分：$4^2-4+2=14$

通过对上述结论进行的观察、类比，我们可以猜测 n 个圆把平面分成 n^2-n+2 个部分．

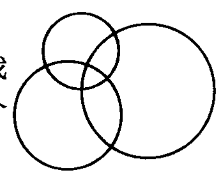


图 1－2

然后我们就可以运用数字归纳法来证明上述猜测了．

(1) 当 $n=1$ 时，一个圆把平面分成两部分，$n^2-n+2=1^2-1+2=2$ 命题成立．

(2) 当 $n=k$ 时，k 个圆把平面分成 k^2-k+2 个部分，则当 $n=k+1$ 时，第 $k+1$ 个圆与前 k 个圆相交共有 $2k$ 个交点，把第 $k+1$ 个圆分成 $2k$ 段弧，每一段弧又把每一部分分成两部分，即增加 $2k$ 部分，这样 $k+1$ 个圆把平面分成 k^2-k+2

$+2k$ 个部分. 而 $k^2-k+2+2k=k^2+2k+1-k-1+2=(k+1)^2-(k+2)+2$, 由此可知, 当 $n=k+1$ 时, 上述猜测也成立了.

由 (1)、(2) 可知 n 个圆, 其中每两个圆都相交于两点, 并且每三个圆都不相交于同一点, 这 n 个圆把平面分成 n^2-n+2 个部分.

【例 3】 已知 $x^2-3x+1=0$, 试求 $x^{2^n}+x^{-2^n}$ 的个位数是多少? ($n\in N$).

【点拨】 由 $x^2-3x+1=0$ 得 $x+\frac{1}{x}=3$ ($x\neq0$). 取一些特殊值: 当 n 取 1, 2, 3 时, 分别计算可得值是 7, 47, 2207. 猜想 $x^{2^n}+x^{-2^n}$ 的个位数为 7, 因为, 若 $n=k$ 时, 猜想成立, 则有 $x^{2^k}+x^{-2^k}=10M+7$ ($M\in N$), 那么 $x^{2^{k+1}}+x^{-2^{k+1}}=10^2M^2+140M+47$. 显而易见, 其末尾数也为 7.

2. 类比性猜想

类比性猜想是指运用类比的方法, 找出两个问题的部分相似之处, 从而得出解题新方法的猜想, 它是开辟新的解题方法的有利工具.

【例 4】 已知 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$, 求证 x、y、z 成等差数列.

【点拨】 由 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$ 类比联想到一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 b^2-4ac 由此猜想构造一元二次方程 $t^2+(z-x)t+(x-y)(y-z)=0$. (或 $(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0$)

解方程 $[t-(x-y)][t-(y-z)]=0$

$$t_1=x-y,\ t_2=y-z$$

由判别式为0，则 $x-y=y-z$，即 x、y、z 成等差数列.

【例5】 证明：$\operatorname{tg}\frac{3}{2}x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

【点拨】 看到这道题，很容易让人类比联想到高中课本的一道学生都会做的题，计算 $\operatorname{tg}67°30'-\operatorname{tg}22°30'$.

$$\begin{aligned}原式&=\frac{\sin 67°30'}{\cos 67°30'}-\frac{\sin 22°30'}{\cos 22°30'}\\&=\frac{\sin 67°30'\cos 22°30'-\cos 67°30'\sin 22°30'}{\cos 67°30'\cos 22°30'}\\&=\frac{\sin(67°30'-22°30')}{\frac{1}{2}(\cos 90°+\cos 45°)}=\frac{2\sin 45°}{\cos 45°}=2\end{aligned}$$

这道普通习题会做了，解决本题就不会有什么困难了.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{3}{2}x-\operatorname{tg}\frac{x}{2}&=\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\cos\frac{3}{2}x}-\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\cos\frac{1}{2}x}\\&=\frac{\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3}{2}\cos\frac{1}{2}x}\\&=\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x-\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos x)}\\&=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}\end{aligned}$$

【例6】 空间中有六个点，其中任何三点不共线，任何四点不共面. 在每两点之间连起直线段之后，将每一条这样的线段或涂上红色，或涂上蓝色. 求证：不论如何涂色，一定存在三个三角形，它的三边有相同的颜色.

【点拨】 考虑从任一点出发，到其余五个点，可连五条

线段．这五条线段分别染成红色或蓝色，相当于五条线段放入两个抽屉（红色或蓝色）之中．由抽屉原则，至少有三条线段放入同一抽屉，即染色相同．以红色为例，考虑这三条由同一点出发，具有相同颜色的线段，这三条线段的另外三个端点两两连接起来，构成一个虚线三角线．如果有一条虚线被涂成红色，那么它与两条实线组成一个红边三角形．如果三条虚线中一条红边也没有，则它们本身就组成一个蓝边三角形．（如图 1－3 所示）

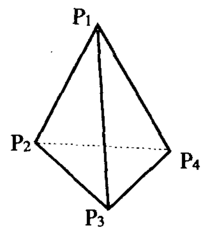


图 1－3

由此题，我们可以类比解决许多相似问题．如：从全世界的人口中，任意选出 6 个人来，其中一定有 3 个人，他们彼此认识或者不认识．

3．特殊性猜想

所谓特殊性猜想，是对于难以解决的数学问题，从一个简单、具体、极端或特殊的特例入手，从中寻求有益的启示，猜想解决问题的方法．

【例 7】 在各边长度给定的一切平面四边形中，何时四边形有最大面积？

【点拨】 因为四边形各边长度给定，于是面积大小随四边形顶角大小而变化，为了得出一般结论，不妨先取特殊情况考虑：设四边相等，则四边形为菱形或正方形，显然当四边形为正方形时面积为最大．能否推测各顶角均为直角时，四边形面积最大？不妨设四边形的四个顶点分别为 A、B、C、D．考虑当边 AB、BC 之间夹角 B 为直角时，斜边为定长，而斜边与其余两边 AD、DC 不一定构成直角三角形，所以四边形有最大面积时，不一定要求各顶角均为直角．因此，修改猜想，四边形对角互补时面积最大．下面证明这个猜想．

如图 1－4，

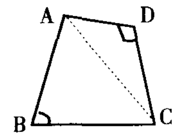


图 1－4

余弦定理：$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$　①

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos\angle D$　②

①－②得　$AB \cdot BC \cdot \cos\angle B - AD \cdot DC \cdot \cos\angle D = \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 - AD^2 - DC^2)$　③

设四边形的面积为 S

$S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}(AB \cdot BC \cdot \sin\angle B + AD \cdot DC \cdot \sin\angle D)$

化简为：$AB \cdot BC \cdot \sin\angle B + AD \cdot DC \cdot \sin\angle D = 2S$　④

③、④平方相加，得：

$S^2 = \frac{1}{4}[AB^2 \cdot BC^2 + AD^2 \cdot DC^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot AD \cdot \cos(\angle B + \angle D)] - \frac{1}{16}(AB^2 + BC^2 - CD^2 - AD^2)$，由上式可知，当 $\angle B + \angle D = \pi$ 时，面积取得最大值．从而证明了一开始的猜想：各边长度给定的一切平面四边形中，当对角互补时面积最大．

【例 8】　如图 1－5，线段 PQ 过 ΔABC 的重心 G，P、Q 分别内分 AB、AC 所成的比值是 p，q．求 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 的值．

【点拨】　我们先对 PQ 取特殊位置时加以考虑，即 PQ 过点 G 平行于 BC．可发现 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，于是猜想 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，下面证明．

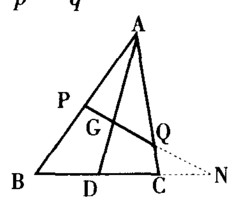


图 1－5

延长 PQ、BC，交于点 N，则由

梅内劳斯定理得：

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{p}{q}\cdot\frac{BN}{NC}=1 \qquad ①$$

$$\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DN}{CN}\cdot\frac{CQ}{QA}=\frac{2}{q}\cdot\frac{DN}{CN}=1 \qquad ②$$

由①得 $\frac{1}{q}\left(1+\frac{BC}{NC}\right)=\frac{1}{p}\Rightarrow\frac{BC}{NC}=\frac{q}{p}-1$

③

由②得 $\frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{BC}{NC}\right)=1$ ④

把③代入④中，解得：

$$\frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p}-\frac{1}{2}\right)=1$$

即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

【例 9】 证明具有下列形式的数 $N=\underbrace{11\cdots1}_{n-1个}\underbrace{22\cdots2}_{n}5$ 是完全平方数.

【点拨】 首先读者需对此种完全平方数的特殊情况有所了解.

当 $n=1$ 时，$N=25=5^2$

当 $n=2$ 时，$N=1225=35^2$

当 $n=3$ 时，$N=112225=335^2$

由此大胆猜测 $N=\underbrace{11\cdots1}_{n-1}\underbrace{22\cdots2}_{n}5=\underbrace{3\cdots3}_{n-1}5$5

下面加以证明：

$$N=\underbrace{11\cdots1}_{n-1}\underbrace{22\cdots2}_{n}5$$

$$=\left(\underbrace{11\cdots1}_{n}+1\right)\times10^n+2\times\underbrace{11\cdots1}_{n}+3$$