



普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

大学数学

代数与几何 学习辅导

林翠琴 居余马 编著

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材配套参考书

大学数学

代数与几何学习辅导

林翠琴 居余马 编著

高等教育出版社

内容简介

本书是与萧树铁主编的《大学数学——代数与几何(第2版)》(居余马,李海中编著)配套的辅导教材和教学参考书。全书以章为单位,每章包含学时安排的建议、基本要求、内容提要、内容综述与分析、例题分析与解答、习题提示与解答、补充题提示与解答等内容。

本书是为工科教师和学生提供的一本参考书,也可为使用其他教材的读者提供有益的借鉴。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学——代数与几何学习辅导/林翠琴,居余马编著. —北京:高等教育出版社,2005.7

ISBN 7-04-016133-8

I. 大... II. ①林... ②居... III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料②线性代数—高等学校—教学参考资料③解析几何—高等学校—教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 049511 号

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>

经 销 北京蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京民族印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 25.5
字 数 470 000

版 次 2005 年 7 月第 1 版
印 次 2005 年 11 月第 2 次印刷
定 价 26.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 16133-00

前 言

《大学数学——代数与几何(第2版)》(居余马,李海中编著)(以下称为“主教材”)是由萧树铁教授主编的普通高等教育“十五”国家级规划教材,本书是与其配套的学习辅导和教学参考书。

本书是编者多年教学经验的积累,是依据主教材对教学体系的安排和课程的基本要求以及学生的认识规律和学习中存在的问题编写而成。本书中各章的编排和习题的标号都与主教材相同。

本书各章包含以下几部分内容(个别章根据内容需要有相应调整):

(1) 学时安排的建议。给出主教材中各部分内容相应的学时安排建议。

(2) 基本要求。基本要求是学生学习的目标,要注意对不同内容有不同程度的要求,如“理解”、“准确理解”、“掌握”、“熟练掌握”和“知道”等。

(3) 内容提要。在第2章中给出“内容提要”是根据基本要求对该章内容做归纳和摘要,其他章的“内容提要”要求学生自己照此做出。

(4) 内容综述与分析。分析该章所研究的主要问题或该章在本书中的地位及其与其他章的关系,提纲挈领地概括该章基本内容,归纳和总结该章所用的基本理论和重要的数学方法,指出重要的解题方法、技巧和证明题的思路,明确该章的重点和难点,并分析学生在学习容易出现若干错误等,使学生清晰地了解该章的基本概念、基本理论、基本计算方法,并有深刻的印象。

(5) 例题分析与解答。针对该章的知识点,给出一些有代表性的例题,并给予详细的分析与解答,其中包含部分清华大学试题和研究生入学考试试题。

(6) 习题提示与解答。对主教材中的部分习题做详细的解答或给出必要的提示。

(7) 补充题提示与解答。对主教材中的部分补充题做详细的解答或给出必要的提示。

书后还附有编者近几年在清华大学若干院系讲授“代数与几何”时所出的试题及答案,并附有一些已发表的编者对高等数学教学内容和教学方法改革的看法。

本书面向的对象是使用《大学数学——代数与几何(第2版)》进行教学的教师和使用此教材进行学习的学生,以及想进一步加深对“代数与几何”课程内容的理解的学生。本书也是非数学专业学生应考硕士研究生的一本辅导书,还是数学专业的学生学习“代数与几何”的一本教学参考书。

近10年来,编者在清华大学使用主教材(及其前身)进行教学。本书是编者

教学经验的小结,其目的是帮助有关师生了解《大学数学——代数与几何(第2版)》对教学体系的安排和教学内容的改革的思考和出发点,了解教学进度和学时安排,正确理解和掌握线性代数和几何(空间解析几何、仿射几何、射影几何和微分几何)的基本概念和基本方法,掌握课程的基本要求,了解课程的重点和难点。本书分析和解答了某些较难习题和部分研究生入学考试试题,给出了计算题解题的基本方法(或技巧)和证明题的分析思路,指出了一些概念和计算中容易出错的地方,有针对性地破解学生学习中的疑难问题,使学生在解题过程中欣赏到数学所闪烁的美学之光。本书的最终目的是让学生在学好“代数与几何”课程的同时,培养学生形象思维、理性思维和逻辑推理的能力,提高学生分析问题、解决问题和创新的能力,以及综合与分析的能力,提高学生学习数学的兴趣,激发学生的创造性思维,提高学生的数学素养。

下面是对阅读本书的学生的几点要求:

(1) 要在认真阅读《大学数学——代数与几何(第2版)》的基础上再阅读本书,不能仅仅查看本书中的“习题提示与解答”。

(2) 先独立思考,再查看本书的“习题提示与解答”,最后再想想有没有别的题解或证明方法。这对培养有创造性思维的人才至关重要。如果你的题解或证明方法比本书更为优越,那要祝贺你了!

(3) 在一章内容全部学完之后,再阅读一次“内容综述与分析”。在全书内容全部学完之后,再阅读一次“篇首语”。这有助于你从整体上提高和深化所学的内容,系统掌握课程基本内容和基本方法,使你的学习能力更上一层楼。

(4) 附录1中的试题应留到相应内容学完之后再阅读。

阅读本书若只冲着题解而来,就违背了编者的原意。大学数学基础课的作用决不只是应付专业课程以及投考研究生的需要,它还负有提高学生文化素养的重要任务。本书若能在提高学习“代数与几何”的兴趣,培养独立学习的能力,养成分析思考的习惯,逐步培养创新能力等方面对读者有所帮助,编者将会感到十分欣慰。

高斯说:“数学是科学之王。”培根说:“数学是打开科学大门的钥匙。”马克思说:“一门科学,只有当它成功地运用数学时,才能达到真正完善的地步。”到了20世纪末,又有人说:“很少有人认识到被如此称颂的高技术本质上是一种数学技术。”当代高新技术以六大技术(信息技术、生物技术、新材料技术、新能源技术、海洋技术和空间技术)为主要内容,它们当中很多问题(如高精度、高质量、高自动化、高速度、高安全和高效率)的研究,都要通过建立数学模型和应用数学方法,并借助计算机的计算、模拟、仿真和控制等来实现。高技术中的软技术占有很大的比重,而软技术本质上就是数学技术。

学习“大学数学”,希望学习者能在工具利用、理性思维和审美意识诸方面得

到基本的训练。在“代数与几何”方面,更强调运算、抽象和推理,其中后两方面在我国传统教育中是较为薄弱的。

衷心感谢萧树铁教授对编写本书的尽心指导。高等教育出版社的文小西对本书的编写提出宝贵的意见,本书责任编辑张冰峰对本书编写和出版做了大量的工作,编者对他们表示衷心感谢。由于编者水平所限,错误和不当之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编者

2004年7月

目 录

篇首语——兼谈教学体系	1
第1章 集合 关系 运算 结构	7
1-1 学时安排的建议	7
1-2 基本要求	7
1-3 内容综述与分析	8
1-4 例题分析与解答	16
1-5 习题提示与解答	19
1-6 补充题提示与解答	39
第2章 线性空间 内积空间	44
2-1 学时安排的建议	44
2-2 基本要求	44
2-3 内容提要	45
2-4 内容综述与分析	48
2-5 例题分析与解答	57
2-6 习题提示与解答	64
2-7 补充题提示与解答	82
第3章 线性映射	89
3-1 学时安排的建议	89
3-2 基本要求	89
3-3 内容综述与分析	90
3-4 例题分析与解答	95
3-5 习题提示与解答	101
3-6 补充题提示与解答	110
第4章 矩阵	116
4-1 学时安排的建议	116
4-2 基本要求	116
4-3 内容综述与分析	117
4-4 例题分析与解答	125
4-5 习题提示与解答	136
4-6 补充题提示与解答	157

第5章 行列式	166
5-1 学时安排的建议	166
5-2 基本要求	166
5-3 内容综述与分析	167
5-4 例题分析与解答	172
5-5 习题提示与解答	185
第6章 线性方程组与线性几何	199
6-1 学时安排的建议	199
6-2 基本要求	199
6-3 内容综述与分析	200
6-4 例题分析与解答	205
6-5 习题提示与解答	214
6-6 补充题提示与解答	223
第7章 特征值与特征向量 矩阵的标准形	229
7-1 学时安排的建议	229
7-2 基本要求	229
7-3 内容综述与分析	230
7-4 例题分析与解答	240
7-5 习题提示与解答	269
7-6 补充题提示与解答	296
第8章 常见曲面及二次曲面的分类	310
8-1 学时安排的建议	310
8-2 基本要求	310
8-3 内容综述与分析	310
8-4 例题分析与解答	315
8-5 习题提示与解答	319
第9章 空间曲线与空间曲面	329
9-1 学时安排的建议	329
9-2 基本要求	329
9-3 内容综述与分析	330
9-4 例题分析与解答	332
9-5 习题提示与解答	337
9-6 补充题提示与解答	345
第10章 平面正交变换 仿射变换 射影变换	348
10-1 学时安排的建议	348

10-2 基本要求	348
10-3 内容综述与分析	348
10-4 例题分析与解答	354
10-5 习题提示与解答	361
第 11 章 非欧几何学简介	375
11-1 学时安排的建议	375
11-2 内容提要	375
11-3 内容注析	377
附录 1 清华大学试题选	380
试卷一	380
试卷二	382
试卷三	384
试卷四	386
试卷五	387
试卷六	389
清华大学试题选参考答案	390
附录 2 对高等数学教学内容和方法改革的一些看法	396
参考文献	397

篇 首 语

——兼谈教学体系

数学研究的是现实世界中的数量关系和空间形式,即“数”与“形”.初等数学的主要内容是数量关系和运算,以及简单几何图形的性质.高等数学对“数”与“形”的研究从直观的数量关系和空间形式提高到内涵更深,外延更广的抽象的“数学结构”和“空间概念”.例如,代数结构中的群、环、域已经见不到“数”的样子了;抽象空间中的线性空间、内积空间、拓扑空间、流形等已经见不到“形”的影子了.代数已经从数值和符号计算提升到一般代数结构(如线性空间及线性空间上的线性映射)的运算.

代数以数的运算规律为基础,中心问题是方程论.方程的基本问题是根的存在性问题和求根的方法.1799年高斯提出了著名的代数学基本定理:“一个 n 次复系数代数方程在复数域上至少有一个根”,由此得到“一个 n 次复系数代数方程在复数域上恰有 n 个根”.这就解决了根的存在性问题.关于求根的方法,二次方程有求根公式,三次和四次方程也有求根公式(但比较复杂,一般都不用),那么五次和五次以上是否有求根公式呢?许多数学家对此做了研究.法国数学家伽罗瓦(Galois, 1811—1832)在1829年(18岁)用群论方法证明了五次和五次以上代数方程没有求根公式,它宣告了古典代数的终结.伽罗瓦开创了代数的新领域——近世代数.伽罗瓦理论对近代数学的发展有深远的影响.《大学数学——代数与几何(第2版)》只对群、环、域的概念做简单的介绍,只要求知道半群、群、交换群、环、域的定义,简单的性质和例子.目的是让学生了解几个基本的数学结构,并从数学结构(运算)的性质上来区分各种数学问题的异同,这有助于培养学生抽象分析的能力.

《大学数学——代数与几何(第2版)》的第1章是基础知识,包括集合,二元关系(重点是等价关系),映射,各种运算(集的运算,命题的运算,几何向量的运算,求解线性方程组(高斯消元法)中 n 元向量和矩阵的线性运算,由某些“操作”定义的运算),以及基本代数结构——群、环、域的基本概念.这一章所铺垫的数学预备知识,使“微积分”和“代数与几何”的教学言简意赅,事半功倍,使学生初步接触现代数学的观点、语言和符号,增加学生应对数学学习新挑战的兴趣,有助于提高学生的逻辑思维、形象思维、抽象思维和模式思维能力,增强学生推理判断的能力.

“数”与“形”或“数学结构”与“空间概念”，以及数学中的“集合”、“关系”和“运算”等都是很抽象的，有时会借助几何术语来表示。例如，函数可看成空间中的一个点。线性空间是满足某些运算规律的元素的集合，因此，“集合”及其“运算”是最基本的内容。对集合，我们要求定义必须明晰，即对任何一个对象，人们可以明确判断它是否属于某一集合。进一步，对集合中的元素，尤其当元素是一些抽象的对象时，往往需要“区别异同”，即把什么样的元素看成是“相同”的，并据此来分类；或者需要对元素之间进行排序，总之是从不同的角度来研究集合之间或元素之间的各种关系。各种运算实质上都是各种集合之间的映射。映射还有运算律。本章内容的安排与以解题训练为主的中学数学教育有很大的区别。它为学生展现出大学数学区别于中学数学的崭新的学习内容和随之而来的新的学习方法，这就要求大学生要特别注重提高自学能力。

线性代数主要是研究有限维线性空间的结构和线性映射(变换)的理论。有限维线性空间和线性映射是线性代数的核心内容。现行的(非数学专业)线性代数教材，大多数是从行列式、线性方程组或矩阵开始，线性空间和线性变换的内容较少并且都安排在教材的最后。这种安排极大地削弱了线性代数的核心内容，并且各章节之间也缺乏有机联系。虽然行列式、矩阵、线性方程组、特征值和特征向量都是线性代数的重要内容，也有各自的应用，但它们都和线性映射有密切的关系：矩阵是线性映射在给定基下的数值表示，这是把一些“操作”转化为具体的数值运算的最好的例子之一；解线性方程组就是寻求线性映射的原像或核；线性变换(或矩阵)的特征值则是线性变换的像与原像成比例时的比例系数；行列式的研究始于线性方程组的求解(Leibniz曾在17世纪90年代用行列式解二元线性方程组)，它在判别向量组的相关性和矩阵可逆，解方程组，求特征值等问题中都是重要的工具。

《大学数学——代数与几何(第2版)》以线性空间和线性映射(变换)为纲，将线性代数各章内容贯穿起来，使之成为一个有机的整体。要研究线性空间的线性映射，首先要弄清楚什么是线性空间。线性空间是个重要的代数结构，它是几何空间的一种代数抽象。线性空间(或称向量空间)是一个集合，其中定义了具有八条性质的线性运算(加法和数量乘法，加法的四条运算规律使集合构成交换群)。要弄清楚线性空间的结构，就要了解线性空间中的元素(或称向量)在线性运算下具有怎样的关系，这就是向量的线性相关性。掌握了线性相关性的概念和理论就能揭示有限维线性空间的维数、基(底)、元素(向量)关于基(底)的坐标。线性相关性是线性代数中贯穿始终的最重要的概念，很多问题(如矩阵的秩，线性方程组解的结构，线性变换或矩阵的特征子空间的维数等)的研究都要用到它。另外还有一种具有几何度量性的线性空间(其中定义了内积运算)，称为内积空间。有限维实内积空间称为欧氏空间。在欧氏空间上做正交变换可以保持向量

的长度和夹角不变.一般二次曲面方程化为标准方程就要做正交变换.对抽象的 n 维线性空间和欧氏空间中的一些问题可在 $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ 中形象地加以理解.学好第 2 章(线性空间 内积空间)是学好线性代数的基础.

有限维线性空间上的线性映射(变换)是线性代数的核心内容. n 维线性空间到自身的映射称为线性变换.它是一元线性函数($\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$)的推广.在 $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ 中,向量的比例(放大或缩小)变换、旋转变换、投影变换、镜面反射和错切变换都是线性变换.由 n 个未知数 m 个(实系数)方程构成的线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$ (其中 $\mathbf{A}$ 是方程组的系数矩阵, $\mathbf{b}$ 是 m 维列向量),则是 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的一个线性映射 σ (即将 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ 映射为 $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$, 称 $\mathbf{b}$ 为 $\mathbf{X}$ 的像, $\mathbf{X}$ 为 $\mathbf{b}$ 的原像).方程组的解 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{b}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的全体原像;当 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 时,齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 的解 $\mathbf{X}$ 是映射 σ 在 $\mathbf{R}^n$ 中的核(即零向量的全体原像),它是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间,称为 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}$ 的解空间,记作 $N(\mathbf{A})$ 或 $\text{Ker}\sigma$.它的维数 $\dim N(\mathbf{A})$ 与 $\mathbf{A}$ 的行向量组的秩(即矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩,记作 $r(\mathbf{A})$),也就是相应的线性映射 σ 的秩,记作 $r(\sigma)$)满足

$$\dim N(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) = n (\text{矩阵 } \mathbf{A} \text{ 的列数}),$$

即

$$\dim (\text{Ker}\sigma) + r(\sigma) = n (\mathbf{R}^n \text{ 的维数}).$$

研究齐次线性方程组解的结构就是研究相应的线性映射 σ 的核空间(它是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间),而讨论非齐次方程组是否有解以及解的结构就与相应的线性映射 σ 的值域(它是 $\mathbf{R}^m$ 的子空间)有关.这两个子空间的维数公式是研究它们的基础.学懂第 3 章就能将线性代数各章的内容串成有机的整体,起到提纲挈领的作用.

第 4 章是矩阵.如果把有限维线性空间之间的线性映射看作是一种“操作”,那么矩阵的作用就是把这类操作化成一种数值(或某个域上)的运算.当线性空间的基给定后,线性映射与矩阵一一对应.矩阵的运算对应于线性映射的运算且具有相同的运算律.可逆的矩阵对应于可逆的线性映射,矩阵的秩等于对应的线性映射的秩.有限维线性空间的线性映射所研究的问题都有一个矩阵问题与之对应,反之亦然.正确理解和熟练掌握矩阵的运算是学好线性代数的基础.

行列式安排在第 5 章是为了突出线性代数的核心内容——线性空间和线性映射,并以此作为串联各章的纲,使教材具有较强的系统性和连贯性.行列式和线性方程组等内容的处理不宜喧宾夺主.行列式采用公理化定义,是为了和全书协调,这样定义不仅使重要定理的叙述、表达和证明大为简化,从而缩减了教材的篇幅和教学学时,更重要的是加深了读者对公理化思维的认识.行列式是学习线性代数的一个基本工具.在 $\mathbf{R}^3$ 中它有明确的几何意义,它表示三个向量的混合积(其绝对值等于三个向量所张成的六面体的体积),在 $\mathbf{R}^n$ 中,它的绝对值等于 n 个线性无关的向量所张成的“ n 维形体”的体积.

第 6 章是线性方程组与线性几何.对于线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}$,虽然在第 1 章

中已经会用高斯消元法求解,但总体上对线性方程组问题还缺乏深刻的理性认识.例如,如何通过已知的系数矩阵 A 与向量 b 来分析线性方程组在什么条件下有解;如果有解,解是否唯一;如果不唯一,解集合具有怎样的结构.对系数矩阵为 $m \times n$ 实矩阵的线性方程组 $AX = b$ (或 $AX = 0$) 的求解问题,实际上是已知 A 所对应的有限维线性空间 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的线性映射 σ 的像 β (β 在 $\mathbf{R}^m$ 的基下的坐标为 b (或 0)), 求其所有的原像 α (或 σ 的核). 所以,有限维线性空间的线性映射的理论为解决上述问题提供了足够的理论依据.线性方程组的求解问题是有限维线性空间的线性映射理论的一个具体应用.

在三维空间的直角坐标系中,平面和空间直线方程是三元一次方程和方程组,所以把它们称为线性图形.讨论线性图形的位置关系,要用到三元线性方程组的解的理论;讨论线性图形的度量关系,要用到 $\mathbf{R}^3$ 中的内积.

线性代数与几何学是密切相关的,线性空间的概念是几何空间的一种代数抽象.线性变换的理论特别是以后讲的正交变换、仿射变换和射影变换等都有其几何背景.在《大学数学——代数与几何(第2版)》的前半部,多是用几何直观来解释线性代数的概念和理论,在第6章和第7章中开始注意线性代数在几何中的应用了,在第8章、第9章和第10章中就以几何为主了.

第7章是特征值和特征向量以及矩阵的标准形.线性变换所对应的矩阵与基的选择有关.如何选择基,才能使线性变换在该基下对应的矩阵具有最简单的形式?线性变换是否存在与基无关的不变量?这就是矩阵的对角化问题和矩阵(或线性变换)的特征值与特征向量的问题.

该章由正交变换和正交矩阵开始.正交变换和正交矩阵当然也可以分别放在“线性变换”和“矩阵”那两章讲,但放在这里讲,目的性就更清楚.因为实对称矩阵可经正交矩阵相合(或合同)于对角矩阵;二次型经正交变换化为纯平方项之和;二次曲线的一般方程化为标准方程(及其分类),以及下面将要讨论的欧氏空间中的二次曲面的正交分类等都要用到正交变换.

特征值和特征向量以及矩阵对角化的问题、二次型的标准形以及二次型的正定性的问题在线性代数中都是非常重要的问题.它们综合应用了前几章的知识:行列式的计算;齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及求其解空间基的方法;向量组的线性相关性,矩阵的初等变换、转置、乘法、求秩、求逆和分块运算,欧氏空间的内积, Schmidt 正交化过程和单位正交基,线性变换的矩阵表示,值域,核和维数公式等.作为线性代数教学的最后一章,它要综合应用以前各章的内容.它们本身也有许多重要的应用.工程技术中的许多问题,如振动问题和稳定性问题,以及数学中求微分方程组的解等问题常常归结为求矩阵的特征值和特征向量的问题.此外,矩阵的正定性也在多元函数的极值等问题中有重要的应用.

从第8章开始讨论几何问题:空间解析几何、微分几何、仿射几何、射影几何与非欧几何.“非欧几何简介”中只介绍两个简单的几何模型.

代数是现代数学的重要基础.初等代数着重于数值和符号的运算;线性代数着重于代数结构(线性空间及其上的线性映射)的运算.它不仅是个重要的数学工具,而且在培养学生抽象思维和逻辑推理能力,提高数学素养等方面都起着重要的作用.数学研究的是“数”与“形”的模式结构,但在近四五十年的基础课教学中“形”的教学被人们忽视了.历史上,几何学曾具有重要的地位.线性代数也与几何学密切相关:线性空间的概念是从几何空间抽象出来的;仿射变换、射影变换、正交变换是从几何中产生的;三元线性方程组的求解问题有明显的几何背景.几何是许多代数问题的来源、背景和形象表示;反之,代数研究的结果又应用到几何中去.近来可视化技术的快速发展更引发人们对几何的重视.《大学数学——代数与几何(第2版)》偏重于利用代数方法研究几何,学生学习时应尽可能地将代数问题与几何问题联系起来.

第8章的内容是 $\mathbf{R}^3$ 中的常见曲面和利用二次型的正交变换对二次曲面进行化简和分类.解析几何是用代数方法来解决几何问题,因此,要将几何图形与代数方程紧密相连.

第9章是微分几何的最基本的内容,是微积分的一个重要应用.应该在学完微积分后再讲授.如果教学课时较少,就不讲这一章.

从教学的角度看,《大学数学——代数与几何(第2版)》开始的“坡度”较陡,“台阶”较大,内容比较抽象.不少学生不大适应,听课不能一下子就明白,特别是一些比较抽象的概念(定义)的叙述和定理的证明,学生会感到难懂.这与学生在中学里只学习具体的数学问题并着重于计算的学习习惯有关.如何克服这类“开头难”的现象?一方面,明确告诉学生“开头较难”,内容比较抽象,要认真地、反复地阅读教材,一次未读懂的内容,过一些时候再回过头来读,并要求大家不要以“课上全都听懂,课后作业全都会做”来衡量教和学的效果.一种好的教学并不是让学生在课堂上舒舒服服地接受教师灌输给他的一堆知识,而是要启发学生多思考,给学生思考问题留出足够的空间,培养学生的自学能力和钻研精神.这正是使学生改变中学的学习方法以适应大学学习的良好时机,要使学生体会到大学学习是“老师引进门,修行在自身”.另一方面,教师要吃透教材的内容,做到“驾轻就熟,深入浅出”(不是“浅入浅出”);要遵循“循序渐进”和“宏观上从一般到具体,微观上从具体到一般”的原则,多举一些例子.不要试图以“一听就懂,就会做题”来助长学生学习上的依赖心理,养成懒于思考的不良习惯,阻碍创新意识和能力的培养.

多年来的教学实践都说明:开头难,但越学越容易.学生打比方说:“学习好似登山.爬又高又陡的山会很苦,还有掉下去的危险.但经过一番奋斗终于到达

顶峰时,会发现所置身的天地是多么广阔,这是在山脚下无法欣赏到的.此刻心中会油然而升起一种说不出的喜悦.以后再登其他矮一点的山时,会感到轻松自在,如履平地.”

教材上打“*”号(或小字)处可以不讲,也可以简单介绍而不证明,或建议学生自己阅读,或依据不同专业的要求和学生入学水平而采取不同的处理方法.课后布置的习题可以分为三类:一类是作业,必须认真完成交给老师批改或部分批改并登记成绩的;另一类是练习,不要求解题的每一步骤都很齐全,以理解题目内容为主,和作业一齐交但不计成绩;还有一类是打“*”号的题,是提高题,可做可不做的.原则上是平时要求多一点,严一点;考试时少一点,松一点.

第 1 章 集合 关系 运算 结构

1-1 学时安排的建议

表 1-1

节①	教 学 内 容	复习页数
1	1.1 集合 子集 幂集 直积, 1.2 二元关系及其性质, 1.3 节中的等价关系	1—5
2	1.3 节中的等价类 商集, * 1.4 节中的序关系 数学归纳法原理, 1.5 运算与映射	5—13
3	* 1.6 命题运算 量词, 1.7 节中的几何向量的运算(加法, 数乘, 内积)	13—21
4	1.7 节中的向量的外积, 混合积; 空间直角坐标系; 向量的坐标表示及其运算	21—28
5	1.8 n 元向量的线性运算 高斯消元法	28—36
6	1.9 平面方程与空间直线方程	36—41
7	1.10 基本代数结构——群、环、域的基本概念, 第一章小结.	41—46

1-2 基本要求

1. 理解集合、子集、幂集和直积的概念. 掌握集合的交、并、余的运算规律. 会证明两个集合相等.

2. 理解二元关系、等价关系. 正确理解自反性、对称性、反对称性、传递性、等价类和商集的定义并会举例子.

① 本书学时安排所指每节均为 45×2 分钟.

* 3. 知道序关系、偏序集、全序集和数学归纳法原理. 会用第一和第二数学归纳法.

4. 理解一元运算(映射)和二元运算, 熟悉各种运算的例子. 理解单射、满射、双射(一一对应或可逆映射)的定义. 理解映射的乘法满足结合律而不满足交换律和消去律.

5. 知道命题的运算(且、或、蕴涵、等价、否定)及其运算规律(对照集合的运算规律). 理解逆命题、否命题和逆否命题, 会叙述含量词“ $\forall$ ”, “ $\exists$ ”的命题的否定命题.

6. 理解几何向量的加、减、数乘、内积(点积)、外积(叉积)和混合积的定义及其运算规律(注意仅在3维空间中有叉积运算). 会求向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度和 $\boldsymbol{a}$ 方向上的单位向量; 会求向量间的夹角; 会判别两个向量是否平行或垂直; 会判别三个向量是否共面.

7. 熟悉向量的坐标表示式及坐标表示式下向量运算(加、减、数乘、内积、外积和混合积)的计算公式.

8. 熟练掌握高斯消元法求线性方程组解的方法. 线性方程组有无穷多个解时, 求出全部解.

9. 掌握平面和直线的各种形式的方程及其互换. 会根据所给条件写出平面方程或直线方程. 知道三元线性联立方程组的几何意义.

10. 知道半群、群、交换群、环和域的定义、例子和简单性质.

1-3 内容综述与分析

1. 本章在本书中的地位及其用意

本章是大学数学的基础知识. 它包括集合、关系(重点是等价关系)、映射和各种运算(命题的运算及量词, 几何向量的运算, n 元向量的线性运算和高斯消元法), 还有空间平面与直线方程, 以及基本代数结构——群、环、域的基本概念. 把这些知识安排在第1章, 主要的用意有以下两方面.

一方面, 它们是学习以后各章必须具备的基础知识. 例如, 集合与映射的概念是贯穿全书的, 如何证明两个命题的等价, 如何用反证法证明含有量词($\forall$, $\exists$)的命题是常要用到的. 熟悉了几何向量的线性运算和内积的运算以及平面和直线方程, 便于用 $\mathbf{R}^3$ 作为背景理解抽象的线性空间、子空间和内积空间的概念、性质和一些重要理论, 用高斯消元法求解线性方程组的知识更是讨论很多问题都不可或缺的.

另一方面, 用很大篇幅讲集合、映射与命题的运算, 以及几何向量、 n 元向量的运算与矩阵的初等运算, 其用意是要让学生在进入大学数学的领域时, 形成一