

北京万向思维·教育图书大系



# 学习计划

总主编 刘增利

配全日制普通高级中学教科书

## 高一数学 上

北京出版集团 北京教育出版社



个性化计划 个性化成功

成功公式: 计划+方法+习惯+悟性=成功

计划学习·知识细品·题例推敲·课后解答



200000000 字子的助力器

# 学习计划

## 高一数学（上）

总主编：刘增利

学科主编：杨 斌

本册主编：钟 政 姜德林

作 者：钟 政 姜德林 徐洪波

石晓红 甘广武 周广英

 北京出版社出版集团

 北京教育出版社  
BEIJING EDUCATION PUBLISHING HOUSE

# 北京万向思维幸运之星奖学金评选活动

- 参加办法** 凡购买北京万向思维任意产品,填写下面的“幸运之星奖学金申请表”,并于2006年11月30日之前寄至“北京市海淀区王庄路1号清华同方科技广场B座11层北京万向思维抽奖活动办公室(邮编100083)”,或者随特快邮件发送至“万向思维”7个短信号码中任意一个,就有机会获得“万向思维幸运之星奖学金”。
- 抽奖时间** 第一次:2006年12月10日 第二次:2007年6月10日
- 奖金** 每次均抽出以下奖项(各奖项中均含1/2短信抽奖名额):  
 一等奖2名,奖学金5000元 二等奖20名,奖学金1000元  
 三等奖300名,奖学金100元 鼓励奖2000名,各赠送两套价值10元的学习信息资料  
 一、二、三等奖奖金均为税前,个人所得税由北京万向思维国际教育科技中心代扣代缴。  
 以上获奖者还将有幸成为“万向思维幸运之星”,参加全国性、地方性宣传推广活动。
- 中奖概率** 1:12%
- 抽奖结果** 中奖名单分别于2006年12月31日和2007年6月30日在万向思维学习网上公布,届时我们还将以电话或信件方式通知本人并以邮寄的方式发放奖金及奖品,敬请关注。
- 开奖地点** 北京市海淀区王庄路1号清华同方科技广场B座11层  
 详情请登陆 [www.wanxiangwei.com](http://www.wanxiangwei.com)  
 本次抽奖活动的最终解释权归北京万向思维国际教育科技中心。  
 本次抽奖活动经北京市海淀区公证处公证。

幸运之星奖学金申请表

|                |                                                                                                                       |  |  |    |        |  |  |      |  |  |  |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|----|--------|--|--|------|--|--|--|
| 姓名             |                                                                                                                       |  |  | 学校 |        |  |  | 班级   |  |  |  |
| 通信地址           |                                                                                                                       |  |  |    | 邮编     |  |  | 家长电话 |  |  |  |
| 本人电话           |                                                                                                                       |  |  |    | E-mail |  |  |      |  |  |  |
| 购书方式           | 书店购买 <input type="checkbox"/> 学校订购 <input type="checkbox"/> 网上购买 <input type="checkbox"/> 函购 <input type="checkbox"/> |  |  |    |        |  |  |      |  |  |  |
| 购书书店           |                                                                                                                       |  |  |    |        |  |  | 书店电话 |  |  |  |
| 你还购买过万向思维的哪些图书 |                                                                                                                       |  |  |    |        |  |  |      |  |  |  |

## 成功学习计划 高一数学(上)

|      |                     |    |                           |
|------|---------------------|----|---------------------------|
| 策划设计 | 北京万向思维基础教育教研中心教学教研组 | 出版 | 北京教育出版社                   |
| 总主编  | 刘增利                 | 发行 | 北京出版集团出版                  |
| 学科主编 | 杨斌                  | 印刷 | 陕西思维印务有限公司                |
| 本册主编 | 钟政 姜德林              | 经销 | 各地书店                      |
| 责任编辑 | 关振兴 蔡文玲             | 开本 | 890 mm × 1240 mm 1/32     |
| 责任审读 | 周广英 甘广武             | 印张 | 12                        |
| 责任校对 | 屈鲁 石叶 陈桂荣           | 字数 | 336千字                     |
| 责任编排 | 赵建英                 | 版次 | 2006年6月第1版                |
| 封面设计 | 魏晋                  | 印次 | 2006年6月第1次印刷              |
| 版式设计 | 董奇钢                 | 书号 | ISBN 7-5013-5148-6/G·5067 |
| 执行策划 | 杨文彬                 | 定价 | 15.80元                    |

版权所有 翻印必究 发行业务专线电话:13381013806 13381013832



## 第一章 集合与简易逻辑

|                |     |                |      |
|----------------|-----|----------------|------|
| 本章知识综合评价 ..... | (1) | 教材课后习题解答 ..... | (34) |
|----------------|-----|----------------|------|

|               |     |
|---------------|-----|
| 本章学习计划表 ..... | (1) |
|---------------|-----|

### 1.1 集合

|                |      |
|----------------|------|
| 细品书中知识 .....   | (2)  |
| 归纳解题方法 .....   | (4)  |
| 多角度推敲试题 .....  | (5)  |
| 知识规律总结 .....   | (8)  |
| 题海轻舟 .....     | (8)  |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (10) |
| 教材课后习题解答 ..... | (11) |

### 1.2 子集、全集、补集

|                |      |
|----------------|------|
| 细品书中知识 .....   | (13) |
| 归纳解题方法 .....   | (16) |
| 多角度推敲试题 .....  | (17) |
| 知识规律总结 .....   | (19) |
| 题海轻舟 .....     | (20) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (21) |
| 教材课后习题解答 ..... | (22) |

### 1.3 交集、并集

|                |      |
|----------------|------|
| 细品书中知识 .....   | (24) |
| 归纳解题方法 .....   | (27) |
| 多角度推敲试题 .....  | (29) |
| 知识规律总结 .....   | (32) |
| 题海轻舟 .....     | (32) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (33) |

### 1.4 含绝对值的不等式解法

|                |      |
|----------------|------|
| 细品书中知识 .....   | (37) |
| 归纳解题方法 .....   | (39) |
| 多角度推敲试题 .....  | (41) |
| 知识规律总结 .....   | (44) |
| 题海轻舟 .....     | (45) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (46) |
| 教材课后习题解答 ..... | (48) |

### 1.5 一元二次不等式解法

|                |      |
|----------------|------|
| 细品书中知识 .....   | (50) |
| 归纳解题方法 .....   | (53) |
| 多角度推敲试题 .....  | (58) |
| 知识规律总结 .....   | (60) |
| 题海轻舟 .....     | (60) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (62) |
| 教材课后习题解答 ..... | (63) |

### 1.6 逻辑联结词

|                |      |
|----------------|------|
| 细品书中知识 .....   | (66) |
| 归纳解题方法 .....   | (68) |
| 多角度推敲试题 .....  | (70) |
| 知识规律总结 .....   | (72) |
| 题海轻舟 .....     | (72) |
| 题海轻舟参考答案 ..... | (74) |
| 教材课后习题解答 ..... | (75) |



### 1.7 四种命题

|          |      |
|----------|------|
| 细品书中知识   | (76) |
| 归纳解题方法   | (78) |
| 多角度推敲试题  | (80) |
| 知识规律总结   | (82) |
| 题海轻舟     | (83) |
| 题海轻舟参考答案 | (84) |
| 教材课后习题解答 | (85) |

### 1.8 充分条件与必要条件

|        |      |
|--------|------|
| 细品书中知识 | (87) |
| 归纳解题方法 | (89) |

|            |       |
|------------|-------|
| 多角度推敲试题    | (91)  |
| 知识规律总结     | (93)  |
| 题海轻舟       | (94)  |
| 题海轻舟参考答案   | (95)  |
| 教材课后习题解答   | (97)  |
| 全程计划       | (98)  |
| 互动立体思维     | (98)  |
| 错题笔记       | (98)  |
| 高考分析       | (100) |
| 全章综合测试     | (105) |
| 全章综合测试参考答案 | (107) |
| 教材课后习题解答   | (109) |

## 第二章 函数

|          |       |
|----------|-------|
| 本章知识综合评价 | (112) |
| 本章学习计划表  | (112) |

### 2.1 函数

|          |       |
|----------|-------|
| 细品书中知识   | (113) |
| 归纳解题方法   | (117) |
| 多角度推敲试题  | (118) |
| 知识规律总结   | (121) |
| 题海轻舟     | (122) |
| 题海轻舟参考答案 | (123) |
| 教材课后习题解答 | (124) |

### 2.2 函数的表示法

|        |       |
|--------|-------|
| 细品书中知识 | (126) |
|--------|-------|

|          |       |
|----------|-------|
| 归纳解题方法   | (128) |
| 多角度推敲试题  | (132) |
| 知识规律总结   | (136) |
| 题海轻舟     | (137) |
| 题海轻舟参考答案 | (138) |
| 教材课后习题解答 | (140) |

### 2.3 函数的单调性

|          |       |
|----------|-------|
| 细品书中知识   | (143) |
| 归纳解题方法   | (146) |
| 多角度推敲试题  | (147) |
| 知识规律总结   | (150) |
| 题海轻舟     | (151) |
| 题海轻舟参考答案 | (152) |



|                 |       |                    |       |
|-----------------|-------|--------------------|-------|
| 教材课后习题解答 .....  | (153) | 归纳解题方法 .....       | (199) |
| <b>2.4 反函数</b>  |       | 多角度推敲试题 .....      | (201) |
| 细品书中知识 .....    | (156) | 知识规律总结 .....       | (204) |
| 归纳解题方法 .....    | (159) | 题海轻舟 .....         | (205) |
| 多角度推敲试题 .....   | (160) | 题海轻舟参考答案 .....     | (206) |
| 知识规律总结 .....    | (165) | 教材课后习题解答 .....     | (208) |
| 题海轻舟 .....      | (165) | <b>2.8 对数函数</b>    |       |
| 题海轻舟参考答案 .....  | (167) | 细品书中知识 .....       | (210) |
| 教材课后习题解答 .....  | (169) | 归纳解题方法 .....       | (213) |
| <b>2.5 指数</b>   |       | 多角度推敲试题 .....      | (217) |
| 细品书中知识 .....    | (171) | 知识规律总结 .....       | (221) |
| 归纳解题方法 .....    | (174) | 题海轻舟 .....         | (221) |
| 多角度推敲试题 .....   | (176) | 题海轻舟参考答案 .....     | (223) |
| 知识规律总结 .....    | (178) | 教材课后习题解答 .....     | (225) |
| 题海轻舟 .....      | (178) | <b>2.9 函数的应用举例</b> |       |
| 题海轻舟参考答案 .....  | (180) | 细品书中知识 .....       | (227) |
| 教材课后习题解答 .....  | (181) | 归纳解题方法 .....       | (230) |
| <b>2.6 指数函数</b> |       | 多角度推敲试题 .....      | (231) |
| 细品书中知识 .....    | (183) | 知识规律总结 .....       | (235) |
| 归纳解题方法 .....    | (187) | 题海轻舟 .....         | (235) |
| 多角度推敲试题 .....   | (189) | 题海轻舟参考答案 .....     | (237) |
| 知识规律总结 .....    | (192) | 教材课后习题解答 .....     | (240) |
| 题海轻舟 .....      | (193) | 全程计划 .....         | (243) |
| 题海轻舟参考答案 .....  | (194) | 互动立体思维 .....       | (243) |
| 教材课后习题解答 .....  | (196) | 错题笔记 .....         | (243) |
| <b>2.7 对数</b>   |       | 高考分析 .....         | (246) |
| 细品书中知识 .....    | (197) | 全章综合测试 .....       | (254) |
|                 |       | 全章综合测试参考答案 .....   | (256) |
|                 |       | 教材课后习题解答 .....     | (259) |



## 第三章 数列

本章知识综合评价 ..... (262)

本章学习计划表 ..... (262)

## 3.1 数列

细品书中知识 ..... (263)

归纳解题方法 ..... (266)

多角度推敲试题 ..... (267)

知识规律总结 ..... (269)

题海轻舟 ..... (269)

题海轻舟参考答案 ..... (270)

教材课后习题解答 ..... (273)

## 3.2 等差数列

细品书中知识 ..... (276)

归纳解题方法 ..... (279)

多角度推敲试题 ..... (280)

知识规律总结 ..... (282)

题海轻舟 ..... (283)

题海轻舟参考答案 ..... (284)

教材课后习题解答 ..... (287)

3.3 等差数列的前  $n$  项和

细品书中知识 ..... (290)

归纳解题方法 ..... (292)

多角度推敲试题 ..... (293)

知识规律总结 ..... (297)

题海轻舟 ..... (297)

题海轻舟参考答案 ..... (298)

教材课后习题解答 ..... (302)

## 3.4 等比数列

细品书中知识 ..... (307)

归纳解题方法 ..... (310)

多角度推敲试题 ..... (311)

知识规律总结 ..... (314)

题海轻舟 ..... (315)

题海轻舟参考答案 ..... (316)

教材课后习题解答 ..... (320)

3.5 等比数列的前  $n$  项和

细品书中知识 ..... (323)

归纳解题方法 ..... (325)

多角度推敲试题 ..... (325)

知识规律总结 ..... (329)

题海轻舟 ..... (329)

题海轻舟参考答案 ..... (330)

教材课后习题解答 ..... (335)

全程计划 ..... (339)

互动立体思维 ..... (339)

错题笔记 ..... (339)

高考分析 ..... (341)

全章综合测试 ..... (347)

全章综合测试参考答案 ..... (349)

教材课后习题解答 ..... (353)

期中测试 ..... (357)

期中测试参考答案 ..... (359)

期末测试 ..... (362)

期末测试参考答案 ..... (364)

## 第一章 集合与简易逻辑



集合理论是基础。  
列举描述法表示。  
交集、并集与补集。  
运算可寻维恩图。

## 本章知识综合评价

本章主要讲述集合的初步知识与简易逻辑知识两部分内容。集合概念及其理论,称为集合论,是近、现代数学的一个重要基础。一方面许多重要的数学分支,如数理逻辑、近世代数、实变函数、泛函分析、概率论与数理统计、拓扑等,都建立在集合理论的基础上;另一方面集合论及其所反映的数学思想,在越来越广泛的领域中得到应用。逻辑是研究思维形式及其规律的一门基础学科。学习数学,需要全面地理解概念,正确地进行表述、判断和推理,这就离不开对逻辑知识的掌握和应用。

## 本章学习计划表

| 章节  | 指数   |      |        |        |        |        | 状元建议                                          |
|-----|------|------|--------|--------|--------|--------|-----------------------------------------------|
|     | 重要指数 | 难度指数 | 课后温课   | 练习反思   | 适时巩固   | 复习提高   |                                               |
| 1.1 | ☆☆☆☆ | ☆☆   | 30 min | 40 min | 20 min | 10 min | 集合的概念、集合的三种表示方法                               |
| 1.2 | ☆☆☆☆ | ☆☆   | 40 min | 50 min | 20 min | 10 min | 子集、全集、补集的概念及相关结论                              |
| 1.3 | ☆☆☆☆ | ☆☆☆☆ | 40 min | 50 min | 30 min | 20 min | 交集、并集的概念及相关结论                                 |
| 1.4 | ☆☆   | ☆☆   | 30 min | 40 min | 20 min | 10 min | $ x  > a$ 及 $ x  < a$ 的解集                     |
| 1.5 | ☆☆☆☆ | ☆☆☆☆ | 40 min | 50 min | 30 min | 30 min | $ax^2 + bx + c > 0$ 及 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解集 |
| 1.6 | ☆☆   | ☆☆   | 30 min | 30 min | 20 min | 10 min | 三种复合命题的真值表                                    |
| 1.7 | ☆☆   | ☆☆   | 30 min | 30 min | 20 min | 10 min | 四种命题及四种命题的真值关系                                |
| 1.8 | ☆☆☆☆ | ☆☆   | 40 min | 40 min | 20 min | 20 min | 充分条件、必要条件、充要条件的判断                             |



### 1.1 集合

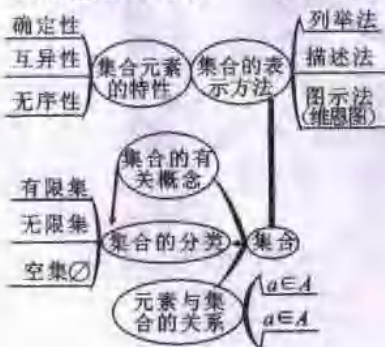
#### 预习 & 听读点

- ★集合的定义
- ★集合的表示方法
- ★元素与集合的关系

#### 状元心得笔记

- ★有关集合的问题须注意集合中的元素的确定性、互异性、无序性
- ★用图示法(维恩图)表示集合,在集合的运算中有重要的作用

#### 绽放的思维之花——思维导图



**细品书中知识** 关键词:集合 有限集 无限集 空集

#### 001-1 集合的概念

集合是现代数学的基本概念。一般地,某些指定的对象集在一起就成为一个集合,简称“集”。我们一般用大括号表示集合,如:|我队的篮球队的队员|。

#### 002-2 常见的数集及其记法

- (1)自然数集(非负整数集):全体非负整数的集合记作  $\mathbf{N}$ 。
- (2)正整数集:自然数集内排除0的集合记作  $\mathbf{N}^+$  或  $\mathbf{N}_+$ 。
- (3)有理数集:全体有理数的集合,记作  $\mathbf{Q}$ 。
- (4)实数集:全体实数的集合,记作  $\mathbf{R}$ 。

#### 集合的概念

**例1** 下列各种对象的全体,

- ①不超过  $\pi$  的正有理数;
  - ②高一③班个子高的学生;
  - ③算术平方根等于自身的数;
  - ④水泊梁山的108将。
- 其中能组成集合的是( )。

- A. ①②③ B. ①③④  
C. ②③④ D. ①②④

**解:**由集合的概念知,集合中的元素具有确定性,②描述的对象高一③班个子高的学生没有统一标准,描述的对象不确定,不能组成集合,而①③④所描述的对象都是确定的,故选B。

### 扫雷专区

**误解:**任一对象都可构成一个集合.

**辨析:**集合中的对象必须是确定的,否则不能构成集合.比如:“好人”“较大的数”,由于没有明确的判定标准,因此无法确定哪些对象是属于“好人”“较大的数”,它们都不能构成集合.

### 003-3 集合与元素的关系

我们把集合中的每个对象叫做这个集合的元素.集合中的元素常用小写的拉丁字母表示,而集合则用大写的拉丁字母表示.

(1)属于:如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素,就说 $a$ 属于 $A$ .记作 $a \in A$ .

(2)不属于:如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素,就说 $a$ 不属于 $A$ .记作 $a \notin A$ .

**相关引申** (1)一个元素与某个集合的关系只有两种: $a \in A$ 或 $a \notin A$ .

(2)集合中的元素具有确定性、无序性与互异性.

### 004-4 集合的表示方法

(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内表示集合的方法.

如:由方程 $x^2 - 1 = 0$ 的所有解组成的集合可以表示为 $\{-1, 1\}$ .

(2)描述法:用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合,并把这个条件写在大括号内表示集合的方法.

格式: $\{x \in A \mid P(x)\}$ .

如:所有的直角三角形的集合可以表示为 $\{x \mid x \text{ 是直角三角形}\}$ .

(3)图示法(维恩图):用一条封闭的曲线的内部表示一个集合的方法.

**反思:**集合中的对象必须是可判定的,也就是说任何一个对象(即元素)是否属于集合是可以判定的,否则不能构成集合.

### 集合中元素的特性

**例2** 若 $-3 \in \{a-3, 2a-1, a^2-4\}$ ,求实数 $a$ 的值.

**解:** $\because -3 \in \{a-3, 2a-1, a^2-4\}$ ,  
 $\therefore -3 = a-3$  或  $-3 = 2a-1$  或  $-3 = a^2-4$ .  
 若 $-3 = a-3$ ,则 $a=0$ ,  
 $\therefore$ 集合为 $\{-3, -1, -4\}$ ,符合题意.  
 若 $-3 = 2a-1$ ,则 $a=-1$ , $\therefore$ 集合为 $\{-4, -3, -3\}$ ,不符合元素的互异性,故 $a=-1$ 舍去.  
 若 $-3 = a^2-4$ ,则 $a=1$ 或 $a=-1$ (舍去),  
 $\therefore$ 集合为 $\{-2, 1, -3\}$ ,符合题意.

综上知: $a=0$ 或 $a=1$ .

**反思:**本题重点考查集合元素的确定性和互异性,利用确定性可解出所有可能的 $a$ 值,再根据互异性,对集合进行检验,这一点必须引起足够重视.

### 集合的表示方法

**例3** 已知集合 $M =$

$$\left\{x \in \mathbf{N} \mid \frac{6}{1+x} \in \mathbf{Z}\right\}, \text{求 } M.$$

**解:** $\because x \in \mathbf{N}$  且  $\frac{6}{1+x} \in \mathbf{Z}$ ,

$$\therefore 1+x=1, 2, 3, 6.$$



### 005-5 集合的分类

- (1)有限集:含有有限个元素的集合.
- (2)无限集:含有无限个元素的集合.
- (3)空集:不含任何元素的集合,如  $\{x \in \mathbf{R} | x^2 + 1 = 0\}$ .

#### 扫雷专区

误解: $0 = \{0\}$ ,  $\{0\} = \emptyset$ ,  $\{\emptyset\} = \emptyset$ .

探析:(1)0 是集合  $\{0\}$  的一个元素可记为  $0 \in \{0\}$  (2) $\emptyset$  表示空集,  $\{0\}$  表示含一个元素 0 的集合. (3) $\{\emptyset\}$  表示含有一个元素  $\emptyset$  的集合.

$$\therefore x = 0, 1, 2, 5.$$

$$\therefore M = \{0, 1, 2, 5\}.$$

**反思:**描述法的一般格式为  $\{x \in A | P(x)\}$ , 其中  $x$  是集合的代表元素,  $A$  是  $x$  的取值范围,  $P(x)$  是元素  $x$  满足的条件, 意义为“使命题  $P(x)$  成立的  $A$  中诸元素之集”, 弄清这点是解题关键.

### 【归纳解题方法】关键词:集合 元素

### 006-1 解答元素与集合的

关系题要注意理解

(1)元素的确定性:设  $A$  是一个给定的集合,  $a$  是某一具体的对象, 则  $a$  或者是  $A$  的元素, 或者不是  $A$  的元素, 两种情况必有一种且只有一种成立.

(2)元素的互异性:集合中的元素必须是互异的, 也就是说, 对于一个给定的集合, 它的任何两个元素都是不同的.

(3)元素的无序性:集合与其中元素的排列次序无关, 如集合  $\{a, b\}$  与  $\{b, a\}$  是同一集合.

### 007-2 使用列举法应注意的问题

- (1)元素间用分隔号“,”.
- (2)元素不重复, 不遗漏.
- (3)元素可无顺序.

例 4 (2002 年潍坊高考模拟试题) 设  $a$ 、

$b$ 、 $c$  为非零实数, 则  $m = \frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b} + \frac{c}{|c|} + \frac{|abc|}{abc}$  的所有值组成的集合为( ).

- A.  $\{4\}$                       B.  $\{-4\}$   
C.  $\{0\}$                       D.  $\{0, -4, 4\}$

**分析:**对  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的正负要分类讨论.

**解:**当  $a$ 、 $b$ 、 $c$  全为正数时,  $m = 4$ ;

当  $a$ 、 $b$ 、 $c$  全为负数时,  $m = -4$ ;

当  $a$ 、 $b$ 、 $c$  中只有一个为负数时,  $m = 0$ ;

当  $a$ 、 $b$ 、 $c$  中只有两个为负数时,  $m = 0$ .

$\therefore$  所组成的集合为  $\{0, -4, 4\}$ . 故应选 D.

**反思:**(1)按  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的正负恰当地分类是解题关键. (2)根据元素的互异性, 相同元素在一个集合里只能算一个元素.

例 5 下面三个集合:①  $\{x | y = x^2 + 1\}$ ,

②  $\{y | y = x^2 + 1\}$ , ③  $\{(x, y) | y = x^2 + 1\}$ . 问:

(1)它们是不是相同的集合? (2)它们的各自的含义是什么?

(4) 对于含较多元素的集合, 如果构成该集合的元素有明显规律, 可用列举法.

### 008-3 描述法的语言形式有三种

文字语言、符号语言、图形语言, 会用简洁、准确的数学语言进行交流是数学素质的一个重要方面. 这种交流有时就是各种语言形态间的互译.

(1) 文字语言形式: 直线  $y=x$  上所有点组成的集合.

(2) 符号语言形式:  
 $\{(x, y) | y=x\}$

(3) 图形语言形式: 在平面直角坐标系内画出直线  $y=x$  的图象 (如图 1-1-1).

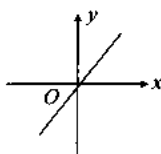


图 1-1-1

分析: 对给出的集合, 首先要搞清楚集合中的元素指的是什么, 元素须满足什么条件, 区别符号语言所表达的含义.

解: (1) 不是相同的集合.

(2) 集合①是函数  $y=x^2+1$  的自变量  $x$  所有允许值组成的集合,  $\therefore \{x | y=x^2+1\} = \mathbf{R}$ ; 集合②是函数  $y=x^2+1$  的所有函数值的集合,  $\therefore \{y | y=x^2+1\} = \{y | y \geq 1\}$ ; 集合③是函数  $y=x^2+1$  图象上所有点的坐标组成的集合.

反思: 用描述法表示的集合, 认识它一要看集合代表元素是什么, 二要看元素满足的条件.

例 6 已知方程  $ax+b=0$ , 当  $a, b$  满足什么条件时, 方程解集为有限集、无限集或空集.

分析: 根据集合元素的个数, 集合分为有限集、无限集、空集.

解: ①当  $a \neq 0$  时,  $x = -\frac{b}{a}$ , 方程的解集为

$$\left\{x \mid x = -\frac{b}{a}\right\}, \text{ 是有限集.}$$

②当  $a=0$  时, 方程要成立, 只有  $b=0$ , 此时方程的解为任意实数, 解集为  $\mathbf{R}$ , 是无限集.

③当  $a=0$  且  $b \neq 0$  时, 方程的解集为  $\emptyset$ .

反思: 对于含参数的方程, 一般要分类讨论. 对于方程  $ax+b=0$  的解, 不仅要考虑  $a$  也要考虑  $b$ .

## 【多角度推敲试题】

### (一) 紧扣教材试题研究

例 7 下列各组集合表示同一个集合的为( ).

A.  $M = \{(1, 2)\}, N = \{(2, 1)\}$

B.  $M = \{1, 2\}, N = \{2, 1\}$

C.  $M = \{y | y = x - 1, x \in \mathbf{R}\}, N = \{y | y = x - 1, x \in \mathbf{N}\}$



$$D. M = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-1}{x-2} = 1 \right\}, N = \{ (x, y) \mid y-1 = x-2 \}$$

分析: 两个集合相同, 它们包含的元素必须全部相同。

解: A 用列举法表示集合,  $M, N$  都是点集且只含有一个元素, 不过点  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$  是不同的点, C 中  $M = \mathbf{R}, N = \{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\therefore M$  与  $N$  是不同的集合, D 中  $N$  表示直线  $y = x - 1$  上所有点的集合, 而  $M = \{ (x, y) \mid y = x - 1 \text{ 且 } x \neq 2 \}$ ,  $\therefore (2, 1) \in N$ , 但  $(2, 1) \notin M$ ,  $\therefore M$  与  $N$

**◆解题关键** 列举法表示集合时, 元素具有无序性。

**◆规律总结** 注意点集与数集的区别, 如:  $\{y \mid y = x - 1, x \in \mathbf{R}\}$  是数集,

$\left\{ (x, y) \mid \frac{y-1}{x-2} = 1 \right\}$  是点集。

6

是不同的集合, B 中  $M$  与  $N$  表示同一集合, 根据集合中元素的无序性得知选 B。

**例 8** 已知集合  $A = \{x \mid x^2 + px + q = x\}$ , 集合  $B = \{x \mid (x-1)^2 + p(x-1) + q = x+3\}$ ,

当  $A = \{2\}$  时, 求集合  $B$ 。

分析: 有关一元二次方程根的问题注意使用根与系数的关系式。

解:  $\because A = \{x \mid x^2 + px + q = x\} = \{2\}$ ,

$\therefore$  方程  $x^2 + (p-1)x + q = 0$  有两个相等的实根 2,

$$\therefore \begin{cases} 2+2=1-p, \\ 2 \times 2 = q, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p = -3, \\ q = 4. \end{cases}$$

$$\therefore B = \{x \mid x^2 - 6x + 5 = 0\} = \{1, 5\}.$$

**◆解题关键** 将  $A = \{2\}$  转化为 2 是方程  $x^2 + px + q = x$  的两个相等的根。

**◆规律总结** 根与系数的关系, 若  $x_1, x_2$  是方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的两根, 则

$$\text{有: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

### (二) 综合拔高试题研究

**例 9** 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid ax^2 - 3x + 2 = 0, a \in \mathbf{R}\}$ .

(1) 若  $A$  是空集, 求  $a$  的取值范围;

(2) 若  $A$  中只有一个元素, 求  $a$  的值, 并把这个元素写出来;

(3) 若  $A$  中至多只有一个元素, 求  $a$  的取值范围。

分析: 集合  $A$  中的元素即是方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  的解,  $A$  中元素的个数即是方程解的个数。

解: (1)  $\because A = \emptyset, \therefore$  方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  的判别式  $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 < 0$ , 解得:  $a > \frac{9}{8}$ .

(2)  $\because A$  中只有一个元素,

∴ 方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  仅有一个根.

当  $a = 0$  时,  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  的根为

$$\frac{2}{3}, A = \left\{ \frac{2}{3} \right\}.$$

当  $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot a \cdot 2 = 0$  时,  $a =$

$\frac{9}{8}$ . 这时方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  有两相等

实根为  $\frac{4}{3}$ ,  $\therefore A = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$

(3) 若  $A$  中至多只有一个元素, 则方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  的判别式  $\Delta = (-3)^2 -$

$4 \cdot a \cdot 2 \leq 0$  或  $a = 0$ , 解得:  $a \geq \frac{9}{8}$  或  $a = 0$ .

**◆ 解题关键** 理解集合元素个数

即是方程  $ax^2 - 3x + 2 = 0$  的解的个数, 是此题关键.

**◆ 规律总结** 方程  $ax^2 + bx + c =$

0. (1)  $a = 0$  且  $b \neq 0$ , 方程有一解.

(2)  $a \neq 0$ . ①  $\Delta > 0$  时方程有两个不同解;

②  $\Delta = 0$  时方程有唯一解;

③  $\Delta < 0$  时方程无解.

**例 10** 若数集  $A$  满足: 若  $a \in A, a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$ .

求证: (1) 若  $2 \in A$ , 则  $A$  中另有两个元素;

(2) 集合  $A$  不可能是单元素集;

(3) 集合  $A$  中至少有三个不同元素.

**分析:** 根据条件若  $a \in A, a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$ .  $a$  的条件是  $a \neq 1$ , 所以只需将  $a$  值代入即可.

**证明:** (1) 若  $2 \in A$  则  $\frac{1}{1-2} = -1 \in A$ ;

若  $-1 \in A$ , 则  $\frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \in A$ .  $\therefore 2 \in A$

时, 集合  $A$  中另有两个元素  $-1$  和  $\frac{1}{2}$ .

(2) (用反证法证明) 若  $A$  为单元素集, 则  $a = \frac{1}{1-a}$ , 即  $a^2 - a + 1 = 0$ .

$\therefore \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ ,  $\therefore$  此方程无实数解.

$\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$ ,  $\therefore a$  与  $\frac{1}{1-a}$  都为集合  $A$  的元素, 则  $A$  不是单元素集.

(3)  $\because a \in A, a \neq 1$ , 则  $\frac{1}{1-a} \in A$ . 又  $\frac{1}{1-a} \neq 1$ , 即  $a \neq 0$ , 则  $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}} = \frac{a-1}{a} \in A$ . 又

**◆ 解题关键** 证明 (3) 中需说明

三数互不相等, 否则证明不严谨.

**◆ 规律总结** (1) 判断某元素是

否在某集合中, 就是判断这个元素是否满足该集合的条件. 如果满足, 则元素在集合中. 不满足则这个元素不在该集合中. (2) 反证法是高中数学中应用较广的数学方法, 值得我们重视.

$$\frac{a-1}{a} \neq 1, \therefore \frac{1}{1-\frac{a-1}{a}} = a \in A.$$

现证明,  $a, \frac{1}{1-a}, \frac{a-1}{a}$  三数互不相等.

①若  $a = \frac{1}{1-a}$ ,  $\therefore a^2 - a + 1 = 0$ , 此方程无解,  $\therefore a \neq \frac{1}{1-a}$ .

②若  $a = \frac{a-1}{a}$ ,  $\therefore a^2 - a + 1 = 0$ , 此方程无解,  $\therefore a \neq \frac{a-1}{a}$ .

③若  $\frac{1}{1-a} = \frac{a-1}{a}$ ,  $\therefore a^2 - a + 1 = 0$ , 此方程无解,  $\therefore \frac{1}{1-a} \neq \frac{a-1}{a}$ .

综上, 集合  $A$  中至少有三个不同元素.

8



### 【知识规律总结】

| 知识要点    | 关键总结            | 注意问题                |
|---------|-----------------|---------------------|
| 集合的概念   | 指定对象集在一起        | 集合中的元素具有确定性、无序性、互异性 |
| 集合的表示方法 | 列举法、描述法、图示法     | 对于不同的集合采用适宜的表示方法    |
| 集合的分类   | 有限集、无限集、空集      | 根据集合中元素的个数分类        |
| 解题方法    | 解题点拨            | 链接例题                |
| 分类讨论    | 对涉及的未知量分情况讨论    | 例 4、例 6             |
| 转化和化归   | 善于把求解的问题进行转化    | 例 9                 |
| 反证法     | 假设结论不成立, 善于找到矛盾 | 例 10                |

## 题海轻舟

(总分 100 分 练习时间 60 分钟)

### 一、选择题(每小题 8 分, 共 32 分)

1. 下列各条件:

- ①充分接近  $\pi$  的实数的全体;
- ②大于 0 小于 20 的 9 与 12 的公倍数的全体;
- ③实数中不是有理数的所有数的全体;



④数轴上到原点的距离大于1的点的全体.



## 题海轻舟参考答案

1. C 分析:判断一个语句是否能构成一个集合,关键是看这个语句所描述的对象是不是确定的,所以①语句不能构成集合,故选 C.
2. A 分析:判断一个集合是有限集还是无限集,主要看集合的元素的个数.若为有限个则是有限集,若为无限个则是无限集.
3. D 分析:二元一次方程组的解集是一组实数对,只有一组解则这个集合只有一个元素.

$$\begin{cases} x+2y=2, \\ 2x-y=9, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=4, \\ y=-1. \end{cases} \therefore \text{选 D.}$$

4. D 分析:这个集合是用描述法表示的集合,描述的对象为  $(x, y)$ , 由  $xy \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 0, \end{cases}$  或

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \therefore \text{选 D.}$$

5.  $\{1, -1\}$  分析:由  $(x-1)^2(x+1)=0$  解得  $x=1$  或  $-1$ , 均属于整数. 故用列举法表示为  $\{1, -1\}$ .
6.  $\{x \mid -10 < x < 0, x \in \mathbf{Z}\}$  分析:注意描述法的格式,  $\{x \mid x \text{ 适合的条件}\}$ .
7.  $\{\frac{1}{3}, 1, 3\}$  分析:  $\because p+q=4$  且  $p, q \in \mathbf{N}_+$ ,  $\therefore \begin{cases} p=1, \\ q=3, \end{cases}$  或  $\begin{cases} p=2, \\ q=2, \end{cases}$  或  $\begin{cases} p=3, \\ q=1. \end{cases} \therefore \frac{p}{q} = \frac{1}{3}$  或 1 或 3.
8.  $a \geq \frac{9}{8}$  或  $a=0$  分析:分类讨论:①  $a=0$ , ②  $a \neq 0$  的两种情况. ①  $a=0$ , 则  $3x+2=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ , 符合. ②  $a \neq 0$ ,  $ax^2+3x+2=0$  至多只有一个解, 则  $\Delta=9-8a \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{9}{8}$ .

9. 分析:分类讨论,对  $x, y, z$  的符号进行讨论即可求出结果.

解:①当  $x, y, z$  均为正时,其值为 7.

②当  $x, y, z$  中有两个为正,一个为负时,其值为 -1.

③当  $x, y, z$  中有一个为正,两个为负时,其值为 -1.

④当  $x, y, z$  均为负时,其值为 -1.

故所求的集合为  $\{-1, 7\}$ .

10. 分析:元素  $x$  是否属于集合  $A$ , 只需看  $x$  是否可表示成  $a+b\sqrt{2}$ ,  $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$  的形式即可.

解:(1)  $\because x=0=0+0 \times \sqrt{2}, \therefore x \in A$ .

(2)  $\because x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 1+1 \times \sqrt{2}, \therefore x \in A$ .

(3)  $\because x = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ , 而  $\sqrt{3} \notin \mathbf{Z}, \therefore x \notin A$ .

(4)  $\because x_1 \in A, x_2 \in A$ , 可设  $x_1 = a_1 + b_1 \sqrt{2}, x_2 = a_2 + b_2 \sqrt{2}$  ( $a_1, a_2, b_1, b_2$  均为整数),

则  $x = x_1 + x_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot \sqrt{2}$ . 而  $a_1 + a_2 \in \mathbf{Z}, b_1 + b_2 \in \mathbf{Z}, \therefore x \in A$ .