WUTP

高等学校应用型本科教材

高等数学（下册）

◉ 主 编/彭斯俊　吴有方

Gaodeng Shuxue

武汉理工大学出版社
WUTP
Wuhan University of Technology Press

高等数学

（下册）

主　编　彭斯俊　吴有方
副主编　杨爱芳　何　朗　易风华
　　　　陈盛双　周　俊　陈建业

武汉理工大学出版社

内容简介

本书是根据《高等数学课程教学基本要求》，结合编者多年的教学实践，为适应独立学院本科教学的特点编写而成的.

本书分上、下册出版.下册内容为多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数五章.

本书结构严谨，逻辑清晰，注意应用，例题丰富，叙述简明，便于自学，可供高等学校独立学院工科类专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/彭斯俊，吴有方主编.—武汉：武汉理工大学出版社，2006.9
ISBN 7-5629-2446-5

Ⅰ.高…
Ⅱ.①彭…②吴…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 071186 号

出　版：武汉理工大学出版社(武汉市洪山区珞狮路 122 号　邮编：430070)
发　行：武汉理工大学出版社发行部
印　刷：湖北省石首市第二印刷厂
开　本：787×960　1/16
印　张：16.5
字　数：312 千字
版　次：2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷
印　数：1～2000 册
定　价：25.00 元　　全书总定价：50.00 元

目 录

8 多元函数微分法及其应用

上册我们讨论的函数均为一元函数,即函数的自变量只有一个.然而理论问题和实际问题都需要我们去研究具有两个及两个以上自变量的函数,这类函数称为多元函数,这就提出了多元函数的微分和积分问题,本章在一元函数微分学的基础上讨论多元函数的微分法及其应用.

讨论多元函数,我们以二元函数为主.二元函数可以看做是一元函数的推广,因此,一元函数的许多性质在二元函数中仍适用.但由于自变量的增加,二元函数无论在形式上还是在本质上都会产生新的变化,需要进一步的讨论.二元函数到二元以上的函数可以类推.

8.1 多元函数的基本概念

一元函数的定义域是实数轴上的点集,对于二元函数,其定义域则是平面上的点集.要想详细地研究二元函数,需要介绍平面点集的一些基本概念.

8.1.1 平面点集

由平面解析几何可知,在平面直角坐标系中,平面上的一个点 P 可以用有序实数组 (x,y) 表示,其中 x、y 分别是点 P 的横坐标与纵坐标;反之,任一有序实数组 (x,y) 也对应平面上的一个点 P.这种一一对应关系,使我们可以把平面上的点 P 与实数组 (x,y) 等同对待.以后我们用 $\mathbf{R}^2$ 表示所有实数组 (x,y) 组成的集合,并称之为二维空间,它由坐标平面的点组成.

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合,称为平面点集,记作

$$E=\{(x,y)\mid(x,y)\text{具有性质 }P\}.$$

例如,平面点集 $E=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}$ 是坐标平面上以 (x_0,y_0) 为圆心,以 $r(r>0)$ 为半径的圆内所有点所构成的集合(注意圆周上的点不在其内).而平面点集

$$D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$$

表示一矩形，其中边界上的点也在其内. 这一集合也可记为积集的形式：

$$D=[a,b]\times[c,d].$$

二维平面 $\mathbf{R}^2$ 可表示为 $\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty\}$.

1. 邻域

我们已经知道直线上一点的邻域是一个开区间，类似地我们引进 $\mathbf{R}^2$ 中一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域这一概念.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域. 记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |P_0P|<\delta\},$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

点 P_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

在几何上，$U(P_0,\delta)$ 就是 xOy 面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，$\delta(>0)$ 为半径的圆的内部的点 $P(x,y)$ 的全体.

如果不需强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$.

2. 内点、外点、边界点、聚点

有了邻域的概念，我们可以考察平面上任一点 P_0 与给定的平面点集 E 之间的关系.

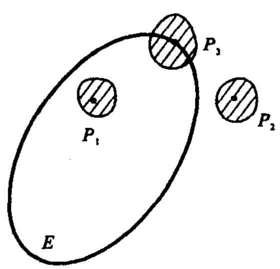

图 8-1

(1) 内点：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点（如图 8-1 中，P_1 为 E 的内点）.

(2) 外点：如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点（如图 8-1 中，P_2 为 E 的外点）.

(3) 边界点：如果点 P 的任一邻域内既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的边界点（如图 8-1 中，P_3 为 E 的边界点）. E 的边界点的全体，称为 E 的边界，记作 ∂E.

注意：E 的内点一定属于 E；E 的外点一定不属于 E；而 E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E.

点 P_0 与点集 E 的上述关系是按“点 P_0 在 E 内或 E 外”来区分的. 此外，还可按在点 P_0 的附近是否密集着 E 的无穷多个点而构成下面的另一类关系.

(4)聚点：如果对于任意给定的 $\delta>0$，点 P_0 的去心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内总有 E 的点，则称 P_0 为 E 的聚点.

容易知道，聚点本身可能属于 E，也可能不属于 E.

例如，设平面点集

$$E=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

满足 $1<x^2+y^2<4$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的内点；满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点 (x,y) 都是 E 的边界点，它们都不属于 E；满足 $x^2+y^2=4$ 的一切点 (x,y) 也是 E 的边界点，但它们都属于 E；不满足 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 的一切点都是 E 的外点. 点集 E 以及它的边界 ∂E 上的一切点都是 E 的聚点.

3. 几种重要的平面点集

我们知道，开区间、闭区间是直线上的重要点集. 现在我们介绍几种重要的平面点集.

(1)开集：如果点集 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集.

(2)闭集：如果点集 E 的余集 E^C 为开集，则称 E 为闭集.

例如：集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是开集；集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭集；而集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$ 既非开集，也非闭集.

规定 $\mathbf{R}^2$ 和空集 $\varnothing$ 既是开集，也是闭集. 在平面点集中，既是开集也是闭集的仅为全平面 $\mathbf{R}^2$ 和空集 $\varnothing$ 这两个点集.

(3)连通集：如果点集 E 内任何两点都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集.

(4)区域(或开区域)：连通的非空开集称为区域或开区域.

(5)闭区域：开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域.

例如，集合 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是开区域；而集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是闭区域.

(6)有界集：对于平面点集 E，如果存在某一正数 r，使得

$$E\subset U(O,r),$$

其中 O 是坐标原点，则称 E 为有界集.

(7)无界集：一个点集如果不是有界集，就称这个点集为无界集.

例如，集合 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 是有界闭区域；集合 $\{(x,y)\mid x+2y>0\}$

是无界开区域;集合$\{(x,y)\mid x+2y\geqslant 0\}$是无界闭区域.

4. n 维空间

设 n 为自然数,我们用 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体所构成的集合,即

$$\mathbf{R}^n=R\times R\times\cdots\times R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$$

称为 n 维空间.每个 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 n 维空间的点.为书写方便,记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.当所有 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$都为零时,称这样的元素为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{O}$.在解析几何中,通过直角坐标系,$\mathbf{R}^2$(或 $\mathbf{R}^3$)中的元素分别与平面(或空间)中的点或向量建立一一对应关系,因而 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维向量,x_i 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量.

$\mathbf{R}^n$ 中点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和点 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离,记作 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,规定

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

显然,$n=1,2,3$ 时,上述规定与数轴上、平面直角坐标系及空间直角坐标系中两点间的距离的定义是一致的.

8.1.2 多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中,经常会遇到多个变量,它们之间存在着依赖关系.举例如下:

例 1 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2 h,$$

这里,当 r、h 在一定范围$(r>0,h>0)$内取定一对数值(r,h)时,V 就有唯一确定的值与之对应.

例 2 一定量的理想气体的压强 P、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$P=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数,这里,当 V、T 在一定范围$(V>0,T>T_0)$内取一定数值(V,T)时,P 就有唯一确定的值与之对应.

例 3 物体运动的动能 W 与物体的质量 m 和运动的速度 v 两个量联系着.对任意有序对(m,v)都对应着唯一一个动能 W.它们之间的对应关系是

$$W=\frac{1}{2}mv^2.$$

上面三个例子的具体意义虽各不相同,但它们却有共同的性质,抽出这些共

性就可得出以下二元函数的定义.

定义 1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集,若按某种对应法则 f,D 中每一点 $P(x,y)$ 都有唯一的实数 z 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的二元函数,通常记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D$$

或

$$z=f(P),P\in D.$$

其中点集 D 称为该函数的定义域,x、y 称为自变量,z 称为因变量. 该函数的值域记作 $f(D)$,即

$$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}\subset\mathbf{R}.$$

类似地可以定义三元函数 $u=f(x,y,z),(x,y,z)\in D$ 以及三元以上的函数. 一般地,把定义 1 中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的点集 D,若某种对应法则 f 使 D 中每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都有唯一一个实数 u 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的 n 元函数,通常记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

或简记为

$$u=f(x),x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D,$$

也可记为

$$u=f(P),P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D.$$

在 $n=2$ 或 3 时,习惯上将点 (x_1,x_2) 与点 (x_1,x_2,x_3) 分别写成 (x,y) 与 (x,y,z),此时,若用字母表示 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中的点,即写成 $P(x,y)$ 或 $M(x,y,z)$,则相应的二元函数及三元函数也可简记为 $z=f(P)$ 及 $u=f(M)$.

当 $n=1$ 时,n 元函数就是一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数.

在空间直角坐标系中,点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为二元函数 $f(x,y)$ 的图形. 通常该图形是三维空间中的一张曲面. 该曲面在 xOy 面上的投影即为二元函数 $f(x,y)$ 的定义域.

例如,由空间解析几何知,线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一个平面,而函数

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

的图形是中心在原点、半径为 a 的上半球面.

8.1.3 多元函数的极限

现在讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$,即点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限. 与一元函数的极限概念类似,如果在 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 的过程

中，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于一个确定的常数 A，就称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限.

定义 2 设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是定义域 D 的聚点. 如果存在常数 A，使得对于任意给定的正数 ε（不论多么小），总存在正数 δ，对于 D 内的适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

一切点 $P(x,y)$ 对应的函数值 $f(x,y)$ 都满足不等式

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

那么就称常数 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \qquad \text{或} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,$$

也可记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0).$$

为了区别于一元函数的极限，我们把二元函数的极限叫做二重极限.

例 4 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证 因为

$$|f(x,y)-0|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

可见，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，

总有 $$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}<\frac{1}{2}\delta=\varepsilon,$$

所以 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

必须注意，所谓二重极限存在，是指 $P(x,y)$ 以任何方式趋向 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数都趋向同一数值 A. 因此，如果 $P(x,y)$ 以某一特殊方式，例如沿着一条定直线或定曲线趋向 $P_0(x_0,y_0)$ 时，即使函数无限接近于某一确定值，我们也不能由此断定函数的极限存在. 反之，如果当 $P(x,y)$ 以不同方式趋向 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数却趋向不同的值，那么就可以断定这个函数当 $P\to P_0$ 时的极限不存在. 下面通过例子来说明这样的情形.

例 5 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

解 当点 $P(x,y)$ 沿 x 轴（即固定直线 $y=0$）趋向点 $(0,0)$ 时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0.$$

又当点 $P(x,y)$沿 y 轴(即固定直线 $x=0$)趋向点(0,0)时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

虽然点 $P(x,y)$以上述两种特殊方式(沿 x 轴、沿 y 轴)趋向原点时函数的极限存在且相等,但是并不能说明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$存在. 事实上当点 $P(x,y)$沿直线 $y=kx$ 趋向点(0,0)时,有

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着 k 的值的不同而改变的,因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在.

以上关于二元函数的极限概念,可相应地推广到 n 元函数 $u=f(P)$即 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$上去.

关于多元函数的极限运算,有与一元函数类似的运算法则.

例 6 求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

解 $0\leqslant\left|\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{1}{x}\right|+\left|\dfrac{1}{y}\right|$,而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\left|\dfrac{1}{x}\right|+\left|\dfrac{1}{y}\right|\right)=0$,

由两边夹法则,知 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}=0$.

例 7 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$.

解 由积的极限运算法则,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y\cdot\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{y\to 0} y\cdot\lim_{xy\to 0}\frac{\sin xy}{xy}=0\times 1=0.$$

8.1.4 多元函数的连续性

与一元函数的情形一样,利用函数的极限就可以说明多元函数在一点的连续的概念.

定义 3 设二元函数 $f(x,y)$在区域(或闭区域)D 内有定义,$P_0(x_0,y_0)$是 D 的内点或边界点,且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$连续.

如果函数 $f(x,y)$在区域(或闭区域)D 内每一点都连续,那么就称函数 $f(x,y)$在 D 内连续,或者称 $f(x,y)$是 D 内的连续函数.

定义 4 设二元函数 $f(x,y)$ 在区域或闭区域 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点，且 $P_0\in D$. 如果 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 不连续，则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $f(x,y)$ 的间断点.

我们指出，一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用. 根据极限运算法则，可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商也是连续函数；多元连续函数的复合函数也是连续函数.

与一元初等函数相类似，可以定义多元初等函数. 考虑一个变量 x 或 y 的基本初等函数：

$$c;x^{\mu},y^{\mu};a^{x},a^{y};\log_a x,\log_a y;\sin x,\sin y,\cdots;\arcsin x,\arcsin y,\cdots$$

这些函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的且能用一个式子表示的多元函数称为多元初等函数. 例如

$$\frac{x+x^2-y^2}{1+y^2},\sin(x+\mathrm{e}^y),\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$$

等都是多元初等函数.

一切多元初等函数在其定义区域内都是连续的.

与一元函数类似，可利用函数的连续性来求极限. 若函数 f 在点 P_0 连续，则

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

例 8 求 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$
$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}.$$

以上运算的最后一步用到了二元初等函数 $\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ 在点 $(0,0)$ 的连续性.

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上连续的多元函数具有如下性质.

性质 1（有界性与最大值最小值定理） 在有界闭区域 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值和最小值.

性质 1 就是说，若 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则必定存在常数 $M>0$，使得对一切 $P\in D$，有 $|f(P)|\leqslant M$；且存在 $P_1,P_2\in D$，使得

$$f(P_1)=\max\{f(P)\mid P\in D\},f(P_2)=\min\{f(P)\mid P\in D\}.$$

性质 2（介值定理） 在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

习题 8－1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集.

(1) $\{(x,y) \mid x\neq 0, y\neq 0\}$;

(2) $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$;

(3) $\{(x,y) \mid y>x^2\}$;

(4) $\{(x,y) \mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y) \mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

2. 求下列函数的定义域，并绘出定义域的图形：

(1) $z=\sqrt{4x^2+y^2-1}$;　　(2) $z=\ln(xy)$;

(3) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;　　(4) $z=\ln(1-|x|-|y|)$.

3. 求下列各函数表达式：

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$，求 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)$;

(2) $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

4. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式：

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

5. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

6. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^3-y^3}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$.

7. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$;　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

8. 下列函数在何处是间断的？

(1) $z=\dfrac{y^2+x}{y^2-x}$;　　(2) $z=\dfrac{1}{\sin x\cos y}$.

9. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

10. 设 Ω 为 $\mathbf{R}^3$ 中一有界闭区域，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 Ω 外一点，证明 Ω 上到 M_0 距离最远及最近的点一定存在.