

全国高等教育精选系列辅导教材

Gaodeng Shuxue Xuexi Yu Xunlian zhidao

高等数学

学习与训练指导

路永洁 宋岱才 苗晨 等编著
陈明明 刘国志 主审



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

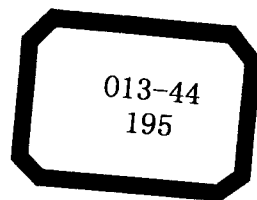
Gaodeng Shuxue Xuexi Yu Xunlian zhidao

高等数学

学习与训练指导

主编 王明远 副主编 王明远 王明远
编委 王明远 王明远 王明远

中国矿业大学出版社



全国高等教育精选系列辅导教材

高等数学学习与训练指导

路永洁 宋岱才 苗 晨 等编著

陈明明 刘国志 主审



中国经济出版社

CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

北 京

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学学习与训练指导/路永洁等编著. —北京: 中国经济出版社, 2006. 9

(全国高等教育精选系列辅导教材)

ISBN 7-5017-7746-2

I. 高… II. 路… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 109909 号

出版发行: 中国经济出版社 (100037·北京市西城区百万庄北街 3 号)

网 址: www.economyph.com

系列教材总编辑: 魏 民

责任编辑: 高书精 (电话: 010-68319110)

E-mail: zsl8838@sina.com

责任印制: 石星岳

封面设计: 中子画艺术设计

经 销: 各地新华书店

承 印: 北京君升印刷有限公司

开 本: 787mm×1092mm 1/16 印 张: 17 字 数: 310 千字

版 次: 2006 年 9 月第 1 版 印 次: 2006 年 9 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-5017-7746-2/F·6452 定 价: 20.00 元

版权所有 盗版必究

举报电话: 68359418 68319282

序

Preface

随着普通高校教育规模的不断扩大，受教育者的不同层次的各个群体对高等数学的学习提出了不同的要求，因此出版一套有针对性的辅助教材是十分必要的。目前的数学教学辅助资料很多，有的是侧重于通用教材的习题全解，这对于培养学生的数学思维能力十分无益，有的是考研培训教材，对大多数初学者学习起来又有一定的难度。

这本书所列章节与同济大学高等数学教材同步，每章有知识点概要，例题精析，重要知识点和方法的注解，适当数量的习题，内容紧扣教学大纲和主讲教材，解析最基本的内容和方法，具有浓重的强化基础的特色。

出版这本书，作者的目的是愿望是：在课堂学习之余通过这本书的学习，能够使学习者完全掌握主讲教材的全部内容，解题能力随之能有一定幅度的提高，为各种形式的考试准备厚重的基础。

数学基础知识和基本方法的训练，是能力训练的主要手段，也是各类不同专业教学的迫切需要。相信在具体的使用过程中应该获得成功，学习者的渴望会得到满足，教育者的愿望会得以实现。

吕 方

2006年6月

前言

Foreword

高等数学作为理工科院校学生的必修课，历来备受青睐。它不但是学好其他课程的基础，其本身也是内容丰富的。通过高等数学的学习，会提高学生的空间想象能力、严格的逻辑推理能力和深刻的思维能力。

然而，高等数学的学习又往往因其抽象、繁多难懂而使学生产生畏惧心理。学生往往是盲目地去做题，缺乏科学的选择，最后很难达到预期的目的，同时又浪费了许多宝贵的时间。编写本书的目的，就是为学生学好高等数学提供有益的参考。

本书将高等数学诸多问题进行合理的归类，通过典型例题解析和方法归纳帮助读者理解基本概念，增强运算能力；介绍方便快捷的解题方法，使读者耳目一新。

参加本书编写的有宋岱才（第一章、第二章），侯景臣（第三章、第六章），苗晨（第四章、第五章），路永洁（第八章），佟毅（第十章），李阳（第十一章），魏晓丽（第十二章），陈德艳（第七章），聂宏（第九章），全书由刘国志组织编写，路永洁统稿，陈明明、刘国志教授主审。

本书适用于理工科高等院校的学生，特别是使用同济大学数学教研室编写的高等数学的学生，对于那些有志“考研”的学生也是一本有益的参考用书，本书也可作为理工科高等院校数学教师的教学参考书。

高等数学是高等工科院校最主要的基础课之一。学生对它掌握的好坏，直接关系到后续课程的学习。为了适应不同专业和不同学生的学习，编写了本书。由于作者水平所限，疏漏与不妥之处在所难免，恳切希望广大读者批评、建议，关心扶植，使本书能不断丰富完善。

编者

2006年4月20日

目 录

Contents

第一章 极限与函数的连续	(1)
一、内容提要	(1)
二、典型例题	(3)
三、练习题	(14)
四、练习题答案	(17)
第二章 导数与微分	(19)
一、内容提要	(19)
二、典型例题	(21)
三、练习题	(31)
四、练习题答案	(34)
第三章 中值定理与导数的应用	(36)
一、内容提要	(36)
二、典型例题	(39)
三、练习题	(48)
四、练习题答案	(49)
第四章 不定积分	(52)
一、内容提要	(52)
二、典型例题	(57)
三、练习题	(70)
四、习题解答	(73)
第五章 定 积 分	(79)
一、内容提要	(79)
二、典型例题	(83)
三、练习题	(103)

目 录

Contents

四、练习题答案	(106)
第六章 定积分的应用	(109)
一、内容提要	(109)
二、典型例题	(110)
三、练习题	(121)
四、练习题答案	(123)
第七章 空间解析几何与向量代数	(124)
一、内容提要	(124)
二、典型例题	(129)
三、练习题	(136)
四、练习题答案	(139)
第八章 多元函数微分学	(140)
一、内容提要	(140)
二、典型例题	(144)
三、练习题	(151)
四、练习题答案	(155)
第九章 重 积 分	(158)
一、内容提要	(158)
二、典型例题	(161)
三、练习题	(168)
四、练习题答案	(172)
第十章 曲线积分与曲面积分	(175)
一、内容提要	(175)

目 录

Contents

二、典型例题	(181)
三、练习题	(191)
四、练习题答案	(199)
 第十一章 无穷级数	(207)
一、内容提要	(207)
二、典型例题	(213)
三、练习题	(224)
四、练习题答案	(227)
 第十二章 常微分方程	(233)
一、内容提要	(233)
二、典型例题	(238)
三、练习题	(252)
四、练习题答案	(256)

第一章 极限与函数的连续

一、内容提要

(一) 有关极限的基本定义

定义1 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使当 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限。通常说, 当 n 趋于无穷时, 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 。记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 或 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ 。

如果数列没有极限, 就说数列是发散的。

定义2 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限。记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$ 。

注: (1) 当 $A = 0$ 时, 则称 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小。

(2) 若将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改为 $x_0 - \delta < x < x_0$, 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0 - 0$ 时的左极限。记为 $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$, 或 $f(x_0 - 0) = A$ 。类似地可以定义 $f(x)$ 的右极限 $f(x_0 + 0) = A$ 。

定义3 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限。记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty)$ 。

若将不等式 $|x| > X$ 改为 $x < -X$ 或 $x > X$, 则可得到 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义。

定义4 $\forall M > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x)| > M$, 则称函数 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷大量, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 。

同样可以定义 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 的定义。

无穷大量与无界函数的关系是: 无穷大量必然是无界函数, 反之不一定成立。

注: 在以后的问题叙述中, 当 $x \rightarrow x_0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时结论都成立时, 极限符号简记为 $\lim$ 。

(二) 函数的连续性与间断点的定义

1. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续: 是指 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ 。其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 。其等价性定义是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。使函数不连续的点称为间断点。第一类间断点有可去间断点与跳跃间断点, 其特征是 $f(x_0 \pm 0)$ 都存在。若 $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, 此间断点称为可去间断点, 否则称为跳跃间断点; 除此之外的间断点统称为第二类间断点。比如无穷间断点、振荡间断点等。

2. 渐近线: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$, 则直线 $y = c$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线; 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形的铅直(垂直)渐近线。

(三) 极限的性质、无穷小量与两个重要极限

1. 若 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则 $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$,
 $\lim f(x)g(x) = AB$, 当 $B \neq 0$ 时, $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ 。

2. 极限存在准则: (1) 单调有界数列必有极限; (2) 若 $y_n \leq x_n \leq z_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 。准则(2)对函数的极限也成立。

3. 若 $\lim \alpha(x) = \lim \beta(x) = 0$, 且 $\beta(x) \neq 0$, 又 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$,
 则当 $c = 0$ 时, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$;
 $c = 1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;
 $c = \infty$ 时, 称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶无穷小, 除此之外, 称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小。

特别, $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = c \neq 0$, $k > 0$, 称 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小。

4. 在自变量的同一变化过程中, 有界变量与无穷小的乘积是无穷小; 有限个无穷小的和、积仍是无穷小。

5. 等价无穷小具有传递性、替换性。即在同一变化过程中, 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$,
 $\beta(x) \sim \gamma(x)$, 则有 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ 。以及若 $\alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x)$, $\beta(x) \sim \bar{\beta}(x)$, 且 $\lim \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$ 存在, 则有 $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$ 。

6. $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim \alpha(x) = 0$ 。

7. 若在 $U(x_0, \delta)$ 内有 $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$), 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $A \geq 0$ ($A \leq 0$)。

8. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ ($A < 0$), 则必存在 $U(x_0, \delta)$ 使 $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

9. 若极限存在, 则其值必然唯一。

10. 两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ 。

特别地, 若 $\lim f(x) = 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 有下列结论成立, $\lim \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$ 由以上重要极限知, $x \rightarrow 0$ 时, $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x)$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$, $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$, $a^x - 1 \sim x \ln a$ 。

11. 常用到的结论: (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & m = n \\ 0 & m < n \\ \infty & m > n \end{cases}$

(2) 不等于零的无穷小的倒数为无穷大, 无穷大的倒数为无穷小。

(四) 函数连续的条件及闭区间上的连续函数的性质

- 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续必须满足的条件是: ① $f(x)$ 在 x_0 点有定义; ② $f(x_0 - 0)$ 及 $f(x_0 + 0)$ 都存在; ③ $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ 。
- 连续函数的和、差、积、商 (分母不为零) 仍为连续函数; 若函数 $y = f(u)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 连续, 且 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续。初等函数在它们的定义区间上都是连续的。
- 闭区间上的连续函数: ①必有最大值与最小值; ②必有界; ③若两端点的函数值异号, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$; ④必能取得介于最大值与最小值之间的任何值。

二、典型例题

【例 1】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 10^n - 3 \times 10^{2n}}{3 \times 10^{n-1} + 2 \times 10^{2n-1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】分子分母同时除以 10^{2n-1} , 再取极限得 -15。

【例 2】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \arctan x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\arctan x \rightarrow \frac{-\pi}{2}$, $e^x \rightarrow 0$, 所以应填 0。

【例 3】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 - 3)^3 (3x - 2)^4}{(6x^2 + 7)^5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】做此类题时, 应用结论 11, 主要考虑分子、分母中 x 的最高次数。在此, 分子为 $4^3 x^6 \cdot 3^4 x^4$, 分母为 $6^5 x^{10}$, 所以极限为 $\frac{2}{3}$ 。

【例 4】已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^p} = \frac{1}{2}$, 则 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】注意到, $\frac{\tan x - \sin x}{x^p} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^{p-1}}$, 而 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 可知 $p = 3$ 。

【例 5】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{4x+4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 $\left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{4x+4} = \left(1 + \frac{2}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{2} \cdot 8}$, 利用重要极限得知, 应填 e^8 。

注: 对于形如 $\lim u(x)^{v(x)}$ 的极限, 若 $\lim u(x) = 1$, 又 $\lim v(x) = \infty$ 时, 应考虑用重要极限来做。

【例 6】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{3x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】注意到, $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1-2x) \sim -2x$, 所以应填 $-\frac{2}{3}$ 。

【例 7】 $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos[\ln(1+x)] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】同上题, $x \rightarrow 0$ 时, $\ln(1+x) \sim x$, 从而得, $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos x = \frac{\pi}{2}$ 。

【例 8】 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\sin \pi x}{x}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】 $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x} = \pi$, $\therefore$ 应填 -1 。

【例 9】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(\cos^2 x + \sqrt{1-x^2})}{e^x + \sin 2x} + (1+x)^x \right] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】第一个极限显然等于 $\ln 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(1+x)} = 1$, 应填 $1 + \ln 2$ 。

【例 10】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【解】分子分母同时乘以 $\sqrt{x+3}+2$ ，约去因子 $x-1$ ，即得 $\frac{1}{16}$ 。

【例 11】当 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小，则当 $x \rightarrow x_0$ 时，无穷小 $f(x)+g(x)$ 与无穷小 $g(x)$ 的关系是_____。

【解】 $\frac{f(x)+g(x)}{g(x)} = 1 + \frac{f(x)}{g(x)}$ ，由条件知，应填等价无穷小。

【例 12】函数 $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$ 的连续区间是_____。

【解】由于函数是初等函数，所以，其连续区间为其定义域。应填 $(1, 2)$ 。

【例 13】若 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < a \\ 2a & x = a \text{ 在 } x = a \text{ 处连续, 则 } a = \end{cases}$ _____。

【解】由函数在一点连续的定义知，应有 $f(a-0) = f(a+0) = f(a) = 2a$ ，所以 $a = 2$ 。

【例 14】若 $f(x) = \frac{e^{x-1} - a}{x(x-1)}$ 有无穷间断点 $x = 0$ 及可去间断点 $x = 1$ ，则 $a =$ _____。

【解】由条件知， $x \rightarrow 0$ 时， $f(x) \rightarrow \infty$ ，而 $x \rightarrow 1$ 时， $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在，所以只要 $a \neq e^{-1}$ ，就有第一个条件满足，而 $x \rightarrow 1$ 时， $e^{x-1} - 1 \sim x - 1$ ，所以

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1 + 1 - a}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - a}{x(x-1)}$ ，要使极限存在必有 $a = 1$ 。

【例 15】设 $f(x)$ 处处连续，且 $f(1) = 2$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right] =$ _____。

【解】由于 $f(x)$ 处处连续，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ，所以应填 2。

【例 16】“数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在”是“数列 $\{x_n\}$ 有界”的_____。

- (A) 充分必要条件； (B) 充分但非必要条件；
(C) 必要但非充分条件； (D) 既非充分条件，也非必要条件。

【解】应选(B)。因为有界数列不一定有极限。比如，1, -1, 1, -1, ……为有界数列，但是没有极限。所以是充分不必要的条件。

【例 17】当 $x \rightarrow x_0$ 时，若 $f(x)$ 有极限， $g(x)$ 没有极限，则下列结论正确的是_____。

- (A) $f(x)g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时必无极限；
(B) $f(x)g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时必有极限；

(C) $f(x)g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时可能有极限, 也可能无极限;

(D) $f(x)g(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 若有极限其极限必等于零。

【解】看以下两例: $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x$, 有极限 0, $g(x) = \frac{1}{x}$ 无极限。但当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)g(x)$ 有极限 1; 而 $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)g(x)$ 无极限。由此排除 (A)、(B)、(D), 应选 (C)。

【例 18】“当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x) - A$ 是无穷小”是“ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ”的_____。

(A) 充分但非必要条件; (B) 必要但非充分条件;

(C) 充分必要条件; (D) 既非充分条件, 也非必要条件。

【解】由内容提要 12. $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 $\lim \alpha(x) = 0$ 知, 应选 (C)。

【例 19】当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 是 $\sin^2 x$ 的_____。

(A) 高阶无穷小; (B) 同阶无穷小, 但非等价无穷小;

(C) 低阶无穷小; (D) 等价无穷小。

【解】由 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $x \sim \sin x$, 自然知, 应选 (A)。

【例 20】当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 - \sin x$ 是 x 的_____。

(A) 高阶无穷小; (B) 同阶无穷小, 但非等价无穷小;

(C) 低阶无穷小; (D) 等价无穷小。

【解】 $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x}{x} = -1$, $\therefore$ 是同阶无穷小, 但不是等价无穷小。应选 (B)。

【例 21】无穷小量就是_____。

(A) 比任何数都小的数; (B) 零;

(C) 以零为极限的函数; (D) 以上三种情况都不是。

【解】由无穷小量的定义知, 它是在自变量的变化过程中, 以零为极限的函数, 并不是一个很小的常数。当然零是一个无穷小量, 但不能说无穷小量就是零。应选 (C)。

【例 22】当 $x \rightarrow x_0$ 时, 若 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ ($\beta \neq 0$) 都是无穷小, 则 $x \rightarrow x_0$ 时, 下列哪一个表示式不一定是无穷小_____。

(A) $|\alpha(x)| + |\beta(x)|$; (B) $\alpha^2(x) + \beta^2(x)$;

(C) $\ln[1 + \alpha(x)\beta(x)]$; (D) $\frac{\alpha^2(x)}{\beta(x)}$ 。

【解】由于在自变量的同一变化过程中, 有界变量与无穷小的乘积是无穷小; 有限个无穷小的和、积仍是无穷小, 但是无穷小的商不一定是无穷小。比如, $x \rightarrow 0$ 时,

$\alpha(x) = x$, $\beta(x) = x^3$ 均为无穷小, 而 $\frac{\alpha^2(x)}{\beta(x)} = \frac{1}{x}$ 不再是无穷小。而当 $x \rightarrow x_0$ 时, 由于 $\alpha(x), \beta(x)$ 都是无穷小, 所以 $\ln(1 + \alpha(x)\beta(x)) \sim \alpha(x)\beta(x)$ 。因而应选 (D)。

【例 23】极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$ 的结果是_____。

(A) 无穷大;

(B) 零;

(C) $-\frac{1}{2}$;

(D) 不存在, 也不是无穷大。

【解】因为 $\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x} = -2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}$, 而 $\sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$ 是有界函数, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = 0$, 所以原极限等于 0。因而应选 (B)。

【例 24】设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$, 则函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow 1$ 时的结果是_____。

(A) 1;

(B) 2;

(C) 0;

(D) 不存在。

【解】 $\because f(1-0) = 1, f(1+0) = 2, \therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在。因而应选 (D)。

【例 25】极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^x}$ 的结果是_____。

(A) 0;

(B) 1;

(C) 不存在但不是 ∞ ;

(D) ∞ 。

【解】 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1, \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^x}$ 不存在, 也不是无穷大。因而应选 (C)。

【例 26】极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ 的结果是_____。

(A) 0;

(B) $\frac{1}{2}$;

(C) ∞ ;

(D) 不存在。

【解】分子分母同时乘以 $\sqrt{x^2 + x} + x$, 即得知 $x \rightarrow +\infty$ 时结果是 $\frac{1}{2}$, 而 $x \rightarrow -\infty$ 时, 原极限不存在。所以应选 (D)。

【例 27】设曲线的方程为 $y = \frac{\sin x}{x} + \arctan(1 - \sqrt{x})$, 则_____。

(A) 曲线没有渐近线;

(B) $y = -\frac{\pi}{2}$ 是曲线的渐近线;

(C) $x = 0$ 是曲线的渐近线;

(D) $y = \frac{\pi}{2}$ 是曲线的渐近线。

【解】由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{-\pi}{2}$ ，所以直线 $y = \frac{-\pi}{2}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图形的水平渐近线。 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 + \frac{\pi}{4}$ ，从而函数 $y = f(x)$ 没有垂直渐近线。所以应选 (B)。

【例 28】设 $f(x) = x \cos \frac{2}{x} + x^2$ ，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的_____。

(A) 连续点； (B) 可去间断点； (C) 无穷间断点； (D) 振荡间断点。

【解】 $\because \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ，即 $f(0-0) = f(0+0)$ ，而 $f(0)$ 没有定义， $\therefore x = 0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。应选 (B)。

【例 29】设 $f(x) = x^2 + \arccot \frac{1}{x-1}$ ，则 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的_____。

(A) 可去间断点； (B) 跳跃间断点； (C) 无穷间断点； (D) 振荡间断点。

【解】 $\because \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ， $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + \pi$ ，即为 $f(1-0)$ 和 $f(1+0)$ 都存在但不相等的情况， $\therefore x = 1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。应选 (B)。

【例 30】设 $f(x) = \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^x}$ ，则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的_____。

(A) 可去间断点； (B) 跳跃间断点； (C) 无穷间断点； (D) 振荡间断点。

【解】 $\because \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{3}$ ， $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$ ， $\therefore x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。应选 (B)。

1. 常用求极限的方法

(1) 利用等差、等比数列求和公式求极限

【例 31】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} \right)$

【解】原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n-1)/2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(n-1)}{2n^2} \right) = \frac{1}{2}$ 。

【例 32】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right)$

【解】原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-1/2^{n+1}}{1-1/2} \right) = 2$ 。

(2) 利用部分分式法求和式的极限

【例 33】求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$

【解】由于 $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ，所以有